

Редакција

Проф. др Милош Ковачевић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Миленко Пикула, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Миланка Бабић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Снежана Билбија, Универзитет у Сарајеву
Проф. др Бранко Летић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Владимир Кадум, Универзитет Јурија Добриле Пула
Проф. др Ђуро Тошић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Драган Бошковић, Универзитет у Крагујевцу
Проф. др Мишо Кулић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Јелица Стојановић, Универзитет Црне Горе
Проф. др Рајко Кулић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Димка Савова, Универзитет у Софији
Проф. др Драгољуб Крнета, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Милена Максимовић, Универзитет у Источном Сарајеву
Проф. др Ала Татаренко, Универзитет у Љвову
Доц. др Горан Мутабџија, Универзитет у Источном Сарајеву
Доц. др Видан Говедарица, Универзитет у Источном Сарајеву
Доц. др Златко Павловић, Универзитет у Источном Сарајеву
Доц. др Саша Кнежевић, Универзитет у Источном Сарајеву

Радове у овој књизи су рецензирали:

Проф. др Драгица Живковић
Проф. др Горан Јовић
Доц. др Горан Мутабџија
Проф. др Миленко Пикула
Проф. др Крстивоје Шпијуновић
Доц. др Видан Говедарица

Зборник је штампан уз финансијску подршку
Министарства науке и технологије Владе Републике Српске.

Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале

Посебна издања
НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига 5
том 3

НАУКА И ПОЛИТИКА

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

ЗБОРНИК РАДОВА СА НАУЧНОГ СКУПА
(Пале, 22 - 23. мај 2010.)

Пале, 2011

НАУЧНИ СКУП

НАУКА И ПОЛИТИКА

Књига 5
том 3

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Издавач:

Филозофски факултет Универзитета у Источном Сарајеву

За издавача:

Проф. др Миленко Пикула

Главни уредник:

Проф. др Милош Ковачевић

Одговорни уредник:

Проф. др Миленко Пикула

Секретар редакције:

Проф. др Миланка Бабић

Технички уредник и компјутерски слог:

Властимир Пантић

Лектура и коректура:

Јадранка Регоје

Штампа:

“DIS COMPANY” д.о.о. Пале

Тираж:

300 примјерака

Пале, 2011

Секција за географију

ИНФОРМАТИЧКО-ТЕХНОЛОШКА БАЗА – УСЛОВ ИНТЕГРАЦИЈА И ЕКОНОМСКОГ РАЗВОЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Увод

У последњих пола века човечанство је постало богатије у многим наукама, теоријама, технологијама, техникама итд. Многобројна научна открића преточена су у непосредна технолошко-практична решења која у основи мењају физиономију целокупног људског рада и живота. Три главне епохе су обележиле људско друштво:

- пољопривредна епоха,
- индустријска епоха и
- информатичка епоха.

Информатичка технологија представља јединство средстава, метода и поступака и главни је генератор промена. Уместо фразе: „Улагаћу у информативну технологију када будем довољно богат“, свет се данас понаша на начин: „Улагаћу у информативну технологију да бих био богат“.

Република Српска и технолошки развој

Републике Српска јасно је опредељена ка европским интеграцијама. Влада Републике Српске подржава и подстиче развој свих организација, како би на адекватан начин одговориле потребама грађана и стандардима Европске уније. Подршка се огледа кроз законску регулативу која даје правни оквир за функционисање, развој и имплементацију низа међународних и домаћих пројеката чији је циљ побољшање пружања услуга грађанима и достизања европског стандарда.

Циљеви које подржава Европска унија релевантни су за све развојне стратегије на простору Европе. У периоду 2007–2015. година Европска унија ће посебно подржавати развој информатичког друштва. У том циљу основана је Агенција за информационо друштво Републике Српске (АИДРС), прва јавна институција ове врсте у Босни и Херцеговини и међу првима у региону (www.aidrs.org). Потреба за оснивањем једног владиног тела које би се бавило питањима стандардизације и координације пројеката

* dragica@gef.bg.ac.rs

** jasminka@gef.bg.ac.rs

из области информационо-комуникационих технологија, планирањем и изработом стратешких докумената на пољу развоја информационог друштва у целини, проистекла је из регионалних и европских иницијатива (*Лисабонска декларација*). По Одлуци о оснивању, циљ агенције је координација развоја информатике и интернета у сарадњи са другим надлежним органима у јавној управи, школству и здравству; предлагање и спровођење мера изградње информационих система органа локалне самоуправе који обезбеђују примену унифицираних програмских решења у што већој мери итд.

На крају 2009. године закључено је да Република Српска неповратно иде ка свеопштем информационом друштву. Протекла година донела је електронску Српску (eSrpska), почетак реализације пројекта дигитализације земљишних књига, информационог система о простору Републике Српске.

Информациони системи о простору Републике Српске

Потреба за оснивањем једног владиног тела које би се бавило питањима стандардизације и координације пројеката из области информационо-комуникационих технологија, планирањем и изработом стратешких докумената на пољу развоја информационог друштва у целини, проистекла је из регионалних и европских иницијатива.

Влада Републике Српске је, после потписивања стратешког уговора са компанијом Мајкрософт 2006. године и обезбеђивањем буџетских средстава, предузела прве кораке ка усвајању европских норми у циљу смањења технолошког раскорака са земљама региона и Европске уније.

Крајем 2002. године усвојен је Закон о земљишним књигама Републике Српске, којим се уређује вођење, одржавање и успостављање земљишних књига, упис права на непокретности итд. Програм послова премера и успостављање катастра непокретности базиран је на искуству европских држава. По програму је предвиђена:

- изградња јединствене рачунарске комуникационе мреже са софтверском подршком информационом систему катастра непокретности Републике Српске;
- јединствена контрола и управљање процесима израде и одржавања катастра Непокретности;
- организовање мултимедијалне презентације катастарских података итд.

У том циљу започети су послови дигитализације катастарских планова, чиме се постиже савремено вођење графичке евиденције о непокретностима и функционалније се манипулише графичким подацима катастарског оператa. Програм послова премера предвиђа успостављање и повезивање новог геодетског референтног система са европским референтним системом, израду модела трансформације са постојећим референтним системом, као и просторних локалних референтних мрежа и реконструкцију по-

стојећих полигоних мрежа. Следећи корак је трансформација свих врста геодетских подлога. Резултат ће бити подаци премера у европском координатном систему, са много већим нивоом тачности.

Најповољнији картографски производ за израду и вођење разних врста евиденција о простору је основна карта 1 : 5.000. С обзиром да подручје Републике Српске покрива 4.956 листова ОК 1 : 5.000, планирана је израда 500 нових листова дигиталне основне карте за градска и подручја од посебног интереса. Планирано је ажурирање и дигитализација постојећих листова ОК 1 : 10.000 (Бојат 2007: 11–20).

У оквиру међународне сарадње, влада Јапана почела је са пројектом успостављања дигиталне топографске карте за БиХ. Пројекат је реализован у периоду 2002–2005. година и обухвата:

- израду нових аеро-фотограметријских снимака БиХ и
- припрему нових дигиталних топографских карата у размеру 1 : 25.000.

Овим пројектом за подручје БиХ израђена су 444 листа дигиталне топографске карте, од чега 68 листова нове карте, а остало је израђено дигитализацијом постојећих листова.

Дигитално графичко приказивање података подразумева импортовање резултата аеротриангулације, импортовање стерео-парова, графички преглед тродимензионалних слика, проверу извучених података, чување података у CAD формату итд. ГИС подаци креирани су у ArcGIS програму (www.rgurs.org).

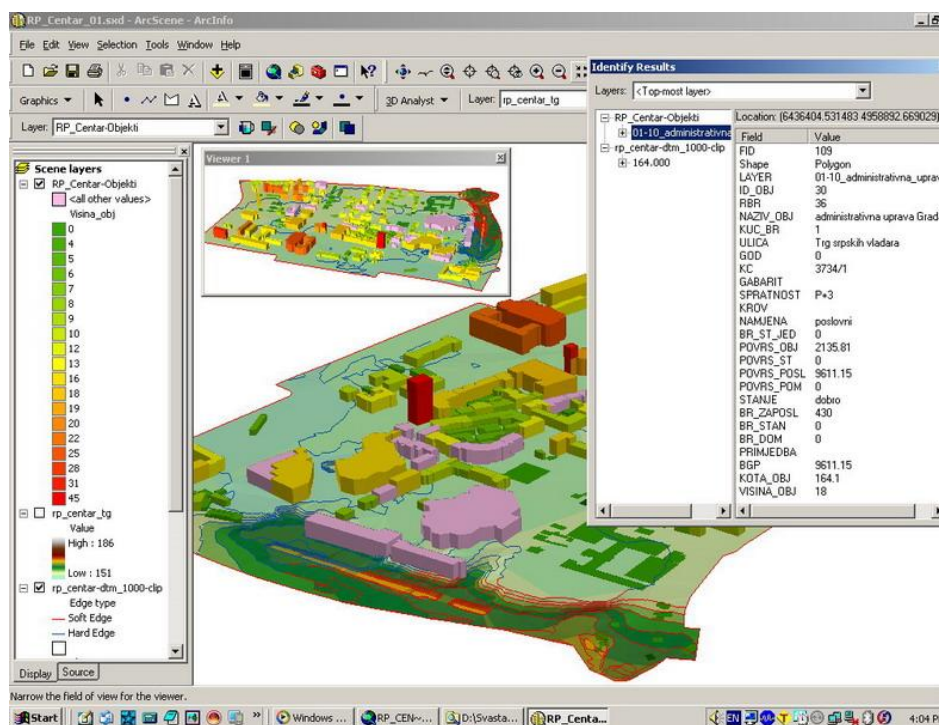
Примена ГИС-а у Урбанистичком заводу Републике Српске започела је 2002. године радом на пројекту LIFE-Third Countries који су финансирани Европска комисија и Министарство за просторно уређење, грађевинарство и екологију Републике Српске. Реч је о пројектима INFRARED и LICENSE. За потребе пројеката креирани су дигитални модели терена слива река Врбаса и Требишњице.

На основу прикупљених података на терену, израђен је велики број тематских карата. За софтверске алате одабрани су програми ArcGIS 8 и MIKE BASIN. У току 2004. године Завод је учествовао у изради међународног пројекта – *Одрживи развој кроз еко-туризам* (The Study on Sustainable Development through Eco-tourism in Bosnia and Herzegovina).

У оквиру овог пројекта радило се на изради дигиталног модела терена, еколошких карата и прегледу потенцијалних туристичких одређишта са ресурсима. Студијска подручја обухватала су регион планине Вележ и слив реке Пливе. Пројекат је финансирала JICA (Japan International Cooperation Agency). Тренутно је актуелан развојни пројекат увођења ГИС алата у процес израде просторно-планске документације у Урбанистичком заводу. Увођењем овог системског решења омогућиће се стручна и информатичка подршка општинама – наручиоцима планова. Увођењем „зонинга“ као законске категорије у просторном планирању ГИС ће постати неопходан алат у изради и коришћењу урбанистичке документације, а грађевинар-

ству и потенцијалним инвеститорима пружаће се бржа и квалитетнија услуга (www.iu-rs.com).

Ефикасно управљање и планирање развоја града, подразумева постојање информационе основе, која би омогућила праћење и вредновање остварених резултата и усвојених индикатора. Проблем са којим се срећу градска администрација и корисници услуга је непостојање јединствене базе података за планирање и праћење развоја града. Ово генерише читав низ проблема који утичу на ефикасност постојећег система рада и управљања јавном администрацијом. С друге стране, савремене технологије намећу нова решења и стандарде у раду, којима се осигурава конкурентска позиција у окружењу. На примеру пројекта *Бања Лука – град информатике*, може се сагледати важност изградње неопходне инфраструктуре, која ће бити у стању да подржи примену нових технологија, информационо повећавање институција града и изградњу јединственог МИС-а (менаџмент информационог система) (Стратегија развоја града Бање Луке, 2008).



Слика 1: 3Д модел РП центра града Бање Луке (www.iu-rs.com)

Пројекат eSrpska је јединствени web портал (www.esrpska.com) за пружање електронских сервиса и информација из Републике Српске грађанима, пословном сектору и владама у окружењу и шире. Портал eSrpska представља дугорочни пројекат Владе Републике Српске и Агенције за -

информационо друштво и замишљен је као место где ће корисници услуга јавне управе моћи да пронађу тачне и поуздане информације користећи интернет као средство комуникације. Циљ је да портал, функционално и садржајно буде по мери корисника и њихових потреба. Да би се то остварило, потребно је повезати све функције јавне управе, тако да се кориснику поједноставе и убрзају послови са јавном управом.

На порталу eSrpska могу се добити конкретне услуге. Портал eSrpska пратиће напредак електронских сервиса, тако да ће се пријавом на портал моћи наручити изводи из матичних књига, платити порез, поднети захтев за регистрацију возила, итд. Организационо, портал је подељен у две категорије: Грађани и Привреда. Унутар категорија су теме Здравље, образовање, Становање, Пословање, Финансије, итд. Отварањем подтеме нуди се низ сервиса у којима су описане услуге државне и јавне управе и линкови страница надлежних институција, као и линк на закон на чијим основама се поменути сервис заснива. На порталу eSrpska налази се Регистар институција. Напредно претраживање омогућава да се на основу кључне речи са најмање четири карактера пронађу све институције у Републици Српској које у свом називу, делатности или адреси садрже унету реч. Резултат претраге, осим пуног назива институције, даће и друге контакт информације о институцији, као што су овлашћена особа, контакт особа, web адреса, адреса, број телефона и факса и др. (www.aidrs.org/forum).

Закључак

Данашње потребе у области просторног планирања, пројектовања и вођења разних врста евиденција о простору захтевају примену нових технологија. Оне омогућавају добијање брзих и тачних информација и могућност повезивања и укрштања разноврсних података. Развој и интеграција Републике Српске зависиће од примене ГИС алата у стручној и информатичкој подршци развојним плановима. Једна страна технолошког напретка су портали, базе података, електронски сервис итд., а с друге стране битан је ниво образовања корисника и њихова могућност коришћења велике количине архивираних података. Зато је потребно да се и образовање усмерава у правцу нових технологија, у складу са стандардима образовања Европске уније.

Литература

Бојат 2007: В. Бојат, *Програм радова Републичке управе за геодетске и имовинско-правне послове Републике Српске за период 2007–2016. године*, Први конгрес о катастру у БиХ, Мостар: Геодетско друштво Херцег-Босне, 11–20.

Стратегија развоја Града Бања Лука у периоду 2007–2015., Бања Лука: Скупштина Града Бања Лука, 2008.

Интернет извори

www.aidrs.org

www.esrpska.com

www.iu-rs.com

www.rgurs.org

www.tors.rs.sr

Стево Р. Пашалић
Универзитет у Источном Сарајеву
Дарко С. Пашалић
Универзитет „Синергија“ Бијељина
Мариана Г. Лукић*
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за географију

Прегледни рад

УТИЦАЈ ТУРИЗМА НА ДЕМОГРАФСКИ РАЗВИТАК РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Увод

Смањивање броја становника и демографско пражњење одређених простора (брдско-планинских, аграрних, оних са неповољним саобраћајно-географским положајем, а и појединих градских насеља) један је од доминантних демографских процеса у Републици Српској.

Расправљајући о могућностима смањивања депопулације, најчешће се као фактор ревитализације наводи туризам.

Његов би развој у емиграционим подручјима са редукованим демографским потенцијалима, али са очуваним природним вриједностима и - богатим етно-наслеђем, вјерује се, не само зауставио иселавања већ, евентуално, довео до повратних миграција и економског опоравка. То би допринијело и привредном уравнотежењу, јер би управо простори у којима нису развијене друге привредне гране добили шансу да валоризују своју изворност.

Велика диверсификација туристичке понуде и разноврсни алтернативни облици туризма који подржавају концепт одрживог развоја и представљају нову парадигму глобалног развоја туризма, чине овај модел још прихватљивијим.

Туризму се приписује моћ да поспјешуи друштвено-економски и демографски развој. Бројни су параметри у којима је туризам доминантна или обједињавајућа дјелатност, а које биљеже економске компаративне предности у односу на регионе који не развијају туризам.

Који су предуслови да туризам заиста постане катализатор популационог успона или опоравка, може се рећи тек након комплексних и интердисциплинарних корелационих истраживања развитка становништва и туризма.

И поред увјеравања да туризам може довести до демографске ревитализације одређених крајева, и поред конкретних примјера који то по-

* mariana.lukic@gmail.com

тврђују, искуство и истраживања нам такође говоре да се то не дешава по - аутоматизму, и са истим позитивним ефектима.

Идеја овога рада је да се на релацији туризам – демографске карактеристике становништва Републике Српске, препознају најлогичније спреге, конекције у којима системи ближе функционишу.

Такође, настоји се утврдити постоји ли универзално дејство туризма на демографски развој, и увијек позитивна корелација развоја ова два система.

Утицај туризма на поједине елементе демографског развоја

Друштвено-економски развој инициран туризмом има своје специфичности. Ма колико системска повезаност демографског и туристичког феномена личила на остале системске повезаности становништва и привреда других оријентација, велика варијабилност и еластичност туристичке - потражње, непрекидно иновирање понуде, планетарне димензије туризма, - специфицирају ову спрегу. Стога се локални ефекти могу разликовати од глобалних, а да при том не негирају и не доводе у питање.

Да би се лакше утврдио реалан утицај туризма као фактора демографског развоја, пожељно је структурисати поступак истраживања становништва и видјети у којим елементима и са колико смисла и дејства је присутан туризам.

Укупна динамика становништва може бити функција развоја туризма. Развој туристичке привреде својим економским ефектима стимулише демографски развој. Утолико је значајнији што се често развијао у привредно неразвијеним подручјима, гдје се, према досадашњим искуствима, показао као једна од најпропулзивнијих дјелатности за превазилажење регионалне неразвијености. Утицај туризма огледа се у порасту становништва на простору Јахорине, Бање Врућице и Теслића, бање Дворови и Бијељине.

Неки подаци указују да и у оквиру потенцијалних туристичких регија или зона постоје контраверзе, да није свуда присутан демографски развој. Тако је саобраћајно повезивање села и градова, довело до њиховог убразаног демографског пражњења. Рурална насеља општине Фоча су као примјер. Атрактивне високе планине, очувана животна средина, Национални парк „Сутјеска“, инфраструктурна неопремљеност, али се изванградска насеља константно демографски празне.

Насупрот насељима општине Фоча, број становника подручја Јахорине је постао двоструко већи. Туристичка функција је овдје толико - јака, да је покренула и друге дјелатности, побољшала инфраструктурну опремљеност и подстакла цјелогодишњи туристички промет.

Миграције становништва су многоструко везане за туризам. Најједноставнији, најконкретнији, али и најповршнији начин поимања те везе

је демографско тумачење туристичких кретања као вида најмасовнијих сезонских миграција.

Уколико би се туристичка кретања подвргла демографској анализи, за шта би морали постојати прецизнији и детаљнији подаци, добили би се резултати о обиму и структурама миграција, веома корисни за туристичку привреду и функционалну организацију рецептивних мјеста.

Пораст становништва у туристичким зонама и мјестима Републике Српске, првенствено се остварује миграционом компонентом, те је лако закључити да су она међу најинтересантнијим имиграционим центрима.

За разлику од подстицајне миграторне улоге, туризам испољава и другу врсту дејства. Она се уочава у појединачним насељима који нису унутар туристичких регија и у којима се развијају немасовни облици туризма (бања Мљечаница). Мањи економски дometи ових видова туризма, мања улагања, нису стимулативна (за сада) за досељавања становништва.

Структуре становништва на различите начине корелирају са елементима туристичког система. С обзиром да туризам није фактор који радикализује друштвене околности, не може бити није утицати на биолошке структуре. Ни старосна структура становништва није непосредан израз промјена покренутих дјеловањем туризма. Туризам на измјене у старосној структури становништва дјелује преко старосне структуре миграција.

Промјене изазване развојем туризма најдиректније се огледају у економским структурама становништва. Простори и мјеста у којима се развија туризам, као доминантна привредна грана, показују адекватно велико учешће терцијарног сектора у структури активног становништва по дјелатностима (бањска туристичка мјеста у Републици Српској).

Туризам се често истиче као дјелатност која утиче на еманципацију жена и повећава активност женске радне снаге. И немасовни облици туризма могу имати овакве ефекте, али се у суми не исказују као значајни помак који би био индикатор демографских процеса.

Домаћинства у туристичким зонама и мјестима, у којима се развојем туризма долази до процеса урбанизације, показују оријентацију на непољопривредне дјелатности, неупосленост газдинстава, нове начине економског ангажовања домаћинстава. Промјене у домаћинству су одраз - прилагођавања новонасталим друштвено-економским околностима и приказују укупност друштвеног преображаја на економском, демографском и социјалном плану. Домаћинства су такође мјесто на којима се одвија процес туристичке акултурације, гдје се мијењају стандарди живљења и размишљања. Туризам захваљујући овим стандардима врши промјене у свим домаћинствима, а не само у оним која су директно укључена у туристичку понуду.

За разлику од домаћинстава која су укључена у масовни туризам, па се у потпуности оријентишу на непољопривредне дјелатности, занемарују газдинства и главницу својих прихода налазе управо у овој дјелатности, етно и екотуризам, који тражи услуге домаћинстава, потенцирају -

агроекономију и традиционалне обрасце организације, те ревитализацију - вриједности сеоског домаћинства. У том контексту, туризам није главна економска активност домаћинства, већ споредна (примјер простора Бијељине) (Пашалић 2009: 268–271).

Социолошко-културолошка обиљежја Републике Српске

Према процјенама за 2009. годину, Република Српска има око 1.44-9.000 становника, што је за око 200.000 становника мање у односу на број становника 1991. године. Опадање броја становника посљедица је пада стопе природног прираштаја и изражене емиграције. Природни прираштај у 2007. години износио је -2,8‰. Просјечна густина насељености је 57 стан./км², са највећом концентрацијом у сјеверном дијелу РС, гдје на простору Бањалучке и Добојско-бијељинске регије живи око 75% укупног становништва РС, просјечне густине преко 80 стан./км², а око регионалних - средишта и преко 100 стан./км².

На обим туристичког промета битно утиче бројност становништва и њихов социјални статус. Посматрајући ова два фактора у Републици Српској се примећује да је учешће домаћих туриста веће и изражајније, и по локалним средиштима и на нивоу регија, у сјеверном дијелу Републике Српске у односу на јужни и источни дио.

Сарајевско-зворничка регија има око 230.000 становника просјечне густине насељености од 44 стан./км². Ова регија има неповољну основу за - развој туризма, с обзиром на то да преко 40% становништва ове регије чини избјегло становништво са великом стопом незапослености. Становништво ове регије има мању могућност учествовања у туристичким кретањима и нема реалне основе развој туризма у индивидуалним приватном смештају.

Најрјеђе су насељене Требињска и Фочанска регија, око 17 стан./км². Око 2/3 становништва у тим регијама живи у општинским средиштима, док је у селима изражен процес депопулације и старења, што не чини добру претпоставку развоја туризма (Ћато и други 2005: 43–65).

Преко 60% становништва РС спада у категорију зрелог, радноспособног, у доби између 35. и 64. године. Привидно, ово је потенцијал који би могао имати значајну претпоставку у развоју туристичке дјелатности. Но, образовна и професионална структура, што ћемо касније показати, не одговара захтјевима савремене туристичке праксе.

Анализирајући сјеверни дио Републике Српске, уочава се да сеоска домаћинства имају већи број чланова, повољну старосну структуру и око 40% становништва са завршеном средњом школом, што може представљати добар предуслов за развој сеоског, етно, еко, ловног, риболовног и спортско-авантуристичког туризма. За разлику од овога, брдско-планинска домаћинства су углавном мања, старачка, самачка, слабе економске моћи и нижег степена образовања, што не погодује развоју наведених облика т-

уризма. Из тих разлога, туристичка понуда и смјештај туриста темеље се на хотелском смјештају и капацитетима планинарских домова и кампова, - којих нема у довољном броју нити са потребним капацитетима и квалитетом понуде.

С обзиром на то да 50% популације Републике Српске живи у руралним подручјима развој сеоског, еко, излетничког туризма и улагања у индивидуалне смјештајне капацитете, подстакао би обнову и развој села. Међутим, за развој сеоског туризма потребана су финансијска улагања, - како би се омогућило јачање економског статуса, унапређивање туристичке понуде и едукација локалног становништва. (Пашалић 2009: 268–271).

Према подацима Републичког завода за статистику, Република Српска крајем 2009. године има 253 665 запослених и 145 396 незапослених. Иако је просјечни БДП по становнику порастао, мањи је у односу на окружење. Потребан је приход од најмање 3.500 долара по становнику за повољнију економску основу у којој становништво може учествовати у туристичким кретањима и улагати у развој туризма.

Брзим социјалним раслојавањем становништва и сиромашењем средњег слоја, смањен је број учесника у туристичким кретањима. Новоформирани богатији слој становништва учесник је туристичких кретања углавном изван територија РС и нема изграђен однос према националним туристичким вриједностима и потреби стварања домаћег туристичког производа.

Културноисторијска основа Републике Српске отвара могућност - развоја и унапређивања скоро свих видова туризма. Очуван фолклор, гастрономија, традиционално занатство, народне манифестације (косидба, корида, зборови, обичаји везани за вјерске празнике и сл.) дио су богате туристичке понуде. Присуство већег броја етничких заједница (Украјинци, Италијани, Словаци, Роми) доприноси разноликости културног живота, чије се дјеловање кроз удружења и културноумјетничка друштва може укључити и у туристичку понуду. Поједине културне манифестације као - Бањалучко љето, Кастел фест, Ђурђевдански фестивал, Смотра позоришта у Приједору, Дучићеве вечери, Вишеградске стазе, Сајам књига, Сајам туризма и др. имају локални и дјелимично регионални карактер, па им је неопходна шири промоција (Пашалић 2009: 268–271).

Економске функције туризма у Републици Српској

Економске функције туризма чине један битан дио цјелокупног привредног система и битно утичу на одрживост осталих привредних подсистема (пољопривреду, занатство, саобраћај, културу и сл.).

Могу се издвојити следеће економске функције туризма:

- конверзијска (природне и културне вриједности чини профитабилним);
- индуктивна (покреће производњу);
- мултипликативна (покреће скоро све гране домаће економије);
- акцелераторска (убрзава регионални и локални развоја брже од било које друге привредне гране);
- извозна (поспјешује девизни прилив и платни биланс земље);
- подстицајна (покреће развој неразвијених општина);
- запошљавање (туризам је радно интензивна, али у новије вријеме и на знању заснована дјелатност, која тражи обучен персонал и високе радне, експертне и управљачке вјештине).

Утицаји туризма на различите дјелатности у оквиру привреде и друштва могу се подијелити на високе утицаје и нешто ниже утицаје. *Висок утицај* туризам има на следеће економске секторе: пољопривреда, производња хране и пића, грађевинарство, некретнине, друмски саобраћај, -ваздушни саобраћај, телекомуникације, угоститељство, хотелијерство, индустрија забаве, спортски догађаји, образовање (средње и универзитетско), запосленост, платни биланс, инвестиције и животни стандард. *Нешто нижи утицај* туризам има на следеће економске секторе: електроенергетика, ауто- индустрија, жељезнички саобраћај, малопродајни ланац трговина, банкарске услуге, услуге осигурања, друге финансијске услуге, маркетинг агенције, култура и умјетност, развој малих и средњих предузећа (Пашалић 1996).

У табели 1 може се пратити број укупно запослених у РС, број запослених у туризму и угоститељству, као и удио запослених у овим дјелатностима у укупној запослености. Примјећује се да у Републици Српској од 1990. до 2008. стално расте број запослених, а број запослених у туризму и угоститељству расте од 1990. до 2007, када је забиљежен највећи проценат удјела запослених у овим дјелатностима у односу на укупно запослене (6%). У задње двије године (2008. и 2009) број запослених у туризму и угоститељству се креће око 14 000, што чини око 5,5% укупно запослених у Републици Српској.

Табела 1: Кретање броја запослених у туризму и угоститељству и - укупно запослених у РС у периоду 1990–2009. Године

Година	Број укупно запослених у РС	Број запослених у туризму и угоститељству	Удио запослених у туризму и угост. у укупно запосленим
1990.	353.975	10.883	3,1%
1999.	220.782	8.828	3,8%
2001.	211.628	9.637	4,5%
2003.	23.819	13.595	5,7%
2006.	25.711	15.334	5,90%
2007.	258.236	15.598	6,0%
2008.	259.205	14.153	5,5%
2009.	253.665	14 .003	5,52%

Извор: Подаци Републичког завода за статистику, Бањалука

И поред огромних потенцијала, туризам у БиХ се налази у почетној фази развоја. Према процјенама датим у глобалном извјештају о конкурентности у туризму за 2009. годину, процјењује се да индустрија туризма (ужи приступ туризму са директним ефектима у угоститељству, хотелима и другим дјелатностима) остварује 461 мил. долара БДП-а, односно да учествује у БДП-у БиХ са 2,9%, а да запошљава 26.000 радника и учествује у укупној запослености са 2,3%. Међутим, туристичка привреда (шири приступ туризму који укључује и индиректне ефекте у дјелатностима повезаним са туризмом (трговина, банкарство, финансијске услуге, услуге забаве, грађевинарство, некретнине, спорт, култура и остало) носи много веће ефекте за БиХ. Тако се процјењује да она ствара 1.637 мил. долара БДП-а и да туристичка привреда учествује са 10,3% у БДП-у БиХ, те да ствара 95.000 радних мјеста и учествује у укупној запослености са 8,3%. Ако се има у виду да туризам у Републици Српској чини 40 до 45% укупног туризма у БиХ, онда се може процијенити да туристичка индустрија ствара око 200 мил. долара БДП-а и око 11.000 радних мјеста, а да туристичка привреда ствара око 700 мил. долара БДП-а и око 40.000 радних мјеста. Имајући у виду да су ово процјене и да у туризму влада високи степен сиве економије, ови се показатељи могу повећати за 35 до 40%. Но, званични показатељи за Републику Српску, за 2008. годину, показују да у туризму учествује свега 5,5% укупног броја запослених, те да туризам остварује свега 0,9% бруто друштвеног производа, што је сасвим сигурно мање од реалног.

Закључак

Везе туристичког и демографског развитка су изузетно комплексне. Аналитички инструментариј којим би се потврдила укупност ефеката факторског дјеловања туризма на становништво не постоји. Међутим, макар и фрагментарно уочавање глобалних позитивних посљедица има важност због етикетирања туризма као фактора ревитализације и стимулатора економског развоја.

Утицаји туризма се најбоље могу документовати у потенцијалним туристичким регијама, туристичким зонама и мјестима Републике Српске, јер је у њима у највећој мјери могуће изоловати дејство овог фактора.

Истраживања у потенцијалним туристичким регијама, освијетлило је три фазе утицаја туризма:

- иницијалну (узлазну),
- развијену (експанзивну) и
- стационирану (успорену),

које се подударају са различитим нивоом развијености туризма.

Ни много детаљнија елаборирања насловљене проблематике не би могла да дају коначне одговоре, како због флотантности самог фактора и његових небројених форми, тако и због аутономности система становништва. Ипак се туризам упорно апострофира као фактор ревитализације простора са неповољним демографским трендовима.

Становиште је да би специјализоване туристичке понуде које подржавају постојећу структуру насеља, облике домаћинства и радикално не мијењају породичну и социјалну организацију, а омогућавају економску добит, довеле до усклађеног економског и демографског развоја.

Туризам као нискоакумулативна дјелатност не испољава брзо економске ефекте. Када је у питању демографски развој, иако је туризам за релативно кратко вријеме у појединим подручјима постигао ефекте немјерљиве са другим дјелатностима, његова дејства су махом дугорочна и одложена.

Развој туризма у пасивним крајевима Републике Српске се мора базирати на детаљним анализама потенцијала, туристичког тржишта и могућности пласмана, а као развојни резултат посматрати не само позитивне демографске помаке, већ и успостављање склада привредног комплекса и комплекса становништва.

Литература

- Гњато и др. 2005: Р. Гњато и др., *Република Српска – Туристички потенцијали*, Источно Сарајево: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Пашалић и др. 2006: С. Пашалић и др., *Демографски развој и популациона политика Републике Српске*, Бијељина: Младост.
- Пашалић 1996: С. Пашалић, *Туристички потенцијали Републике Српске*, Зборник радова, Нови Сад: Природно-математички факултет.
- Пашалић 2007: С. Пашалић, *Демографски процеси у Републици Српској – наталитет као детерминанта развоја*, Зборник радова, Бања Лука: Академија наука и умјетности РС.
- Пашалић, Пашалић 2009: С. Пашалић, Д. Пашалић, *Рурална подручја као туристичке дестинације Републике Српске*, Зборник радова, Бијељина: Универзитет „Синергија“.
- Пашалић 2010: С. Пашалић, *ГИС – примјена у планирању и управљању одрживог развоја туризма БиХ*, Зборник радова, Бијељина: Универзитет „Синергија“.
- Подаци Републичког завода за статистику, Бања Лука.

Ђуро Марић*
Универзитет у Бањој Луци
Природно-математички факултет
Студијски програм за географију
Жељко Лекић**
Сарајево

Стручни рад

ГЕОПОЛИТИЧКИ И ГЕОЕКОНОМСКИ И ЗНАЧАЈ КОРИДОРА 5С

Увод

Региональноекономске интеграције неминовно доводе до бројних промјена и захтијевају одређене модификације у свим аспектима социјалноекономског живота. Посебан значај представља саобраћајни систем који чини окосницу друштвеноекономског развоја сваке државе. Осим улоге генератора свеопштег развоја заједнице, посједује и интегративни карактер свих људских активности који је у корелацији са економским, социјалним и политичким окружењем.

Незадовољавајући степен развијености саобраћајног система и низак степен изграђености саобраћајне инфраструктуре, техничко-технолошка неусклађеност саобраћајних система са савременим стандардима ЕУ и физичка повезаност са сусједним државама и регионима, представљају реалну опасност да проузрокују још већи ниво изолације геопростора БиХ и заостајања за савременим европским токовима.

Европски интеграциони процеси континуално се потврђују ширењем Европске уније прије свега у постсоцијалистичким државама, које у процесу транзиције из социјализма у капиталистичко уређење улажу знатне напоре у сфери изградње демократског друштва, правне државе и тржишне (либералне) привреде. Како би се задовољили строги критеријуми који су прописани као један од услова пуноправног чланства у ЕУ, државе кандидати приморане су задовољити одређени степен макроекономске стабилности, путем усвајања заједничких правила, стандарда и политике ЕУ. Босна и Херцеговина је једна од шест земаља југоисточне Европе која након потписивања *Споразума о стабилизацији и придруживању* (Stabilisation and Association process – SAP) 26. маја 1999. године, мора провести још низ активности како би имплементирала дефинисани сет економских, социјалних и политичких реформи.

Посебан значај има пројекат TEN-T (Трансевропска транспортна мрежа) заснован на систему еврокоридора, кога је успоставила ЕУ почетком деведесетих година XX вијека са основним циљем економске и терито-

* djuromaric@yahoo.com

** zeljko.lekic@gmail.com

ријалне интеграције, условно речено, источноевропских социјалистичких земаља у заједничко тржиште ЕУ. У области имплементације пројекта изградње и развоја еврокоридора на простору југоисточне Европе, шест од десет коридора пролази овим регионом гдје посебно апострофирамо коридор 5С, који је дефинисан на Трећој конференцији у Хелсинкију 1997. године. Његовом активном партиципацијом у Паневропској транспортној мрежи стварају се реалне претпоставке интегрисања Босне и Херцеговине у европски геоекономски систем.

Геоекономске одлике Босне и Херцеговине и значај коридора 5С

Босна и Херцеговина је у саставу бивше Југославије имала изразито наглашену индустријско-сировинску оријентацију привредног развоја, дијелећи судбину социјалистичког самоуправног друштва и планске привреде. Започете транзиционе промјене из 1989. године, због политичког нејединства су онемогућене, што је довело до ескалације сукоба (грађанског рата) 1992–1995. године и драматичне историје стварања независне државе се несагледивим консеквенцама на будући социјално-економски развој. Дејтонска Босна и Херцеговина са два ентитета (Република Српска и Федерација БиХ) простира се на површини од 51.129 km² са укупном дужином границе од 1.538 km (ријечна граница 751 km), док је дужина изломљене ентитетске границе чак 2.177 km. Њен положај у односу на сусједне земље детерминисан је највећим дијелом ријеком Савом на сјеверу са Хрватском и ријеком Дрином на истоку са Србијом и Црном Гором, на југу остварује излаз на Јадранско море код Неума у дужини од свега 23,4 km док је на западу копнена граница са Хрватском.

Имајући у виду да Босна и Херцеговина просторно чини око 8% укупне површине југоисточне Европе, са БДП-ом од 9,1 милијарда америчких долара и per capita од 2.377 америчких долара (Statistical Yearbook, 2008) те вањскотрговинским дефицитом од 7,2 милијарде КМ и стопом незапослености од 40,8% (Статистички завод РС, 2009) евидентна је њена слаба економска моћ. Неповољни макроекономски индикатори и изразито негативан вањскотрговински биланс, као и спор процес приватизације и спровођења структуралних реформи, несумњиво доприносе слабом приливу страних инвестиција. Таква геоекономска позиција БиХ у регионалним оквирима са изразитом тенденцијом ширења ЕУ на југоисток континента и потписани *Споразум о стабилизацији и придруживању* из 1999. године захтијевају убрзани процес демократизације друштва и економски напредак уз консултативну помоћ ЕУ.

У контексту евроинтеграционих процеса, један од најважнијих услова за приступање ЕУ представља развој савремене саобраћајне мреже (транспорт, енергетика, телекомуникације и сл.) гдје би се простор БиХ физички повезао са земљама југоисточне Европе и даље са државама ЕУ. Макрорегионални контактни положај БиХ између Панонског басена на сјевер-

ру и топлот Јадранског мора на југу, детерминише њену територију најкраћом саобраћајном везом средњеевропских држава са Јадранским приморјем. Копнена саобраћајна мрежа наслијеђена је као интегрални дио саобраћајног система претходне заједничке државе, који је био прилагођен оптималној економској, друштвеној и политичкој организацији људских активности и простора. Овако радикално измијењене и комплексне друштвено-политичке околности изискују потребу за планирањем и изградњом савременог саобраћајног система са наглашеном интегративном функцијом у простору.

Коридор 5C у дужини од 336 km и пут Бања Лука–Градишка у дужини од 50 километара представљају прве аутопутеве и почетак развоја савременог друмског саобраћаја у БиХ. Иако је њихов удио у укупној дужини друмске саобраћајне мреже (23.151 km) свега 1,7%, ове дионице аутопутева, посебно коридор 5C, имају значајну интегришућу функцију трансграничне сарадње и укључивања БиХ у мрежу еврокоридора. Коридора 5C у гравитационој зони од 30 km, на мање од 20% територије БиХ, концентрише више од два милиона становника или око 50% од укупног становништва, које остварује око 60% ГДП-а БиХ. Коридор са ужом гравитационом зоном захвата укупно 61 општину, од чега су 43 у ФБиХ, а 18 у Републици Српској (табела 1). Директно пролази кроз 19 општина са 1.103.973 становника, док се утицајна зона (30 km) протеже кроз 42 општине, гдје обитава око 978.165 становника.

Поред свега, коридор 5C тангира привредно активне и интензивно насељене зоне као што су велики и важни градски центри: *Сарајево* са 421.289 становника, главни град БиХ, *Зеница* – 127.113 становника, водећи рударско-металуршки центар; *Мостар* – 111.116 становника, привредни и културни центар Херцеговине, те *Добој* са 81.426 становника, важно саобраћајно чвориште државе.

Према пројектној документацији Министарства комуникација и транспорта БиХ, основни циљеви приликом израде аутопута на коридору 5C су:

- Временске уштеде за транспорт путника и робе у односу на постојеће секције релевантне мреже која се суштински везује уз трасу пута Е-73 (М5/М17) на правцу Шамац–Добој–Сарајево–Мостар–Плоча (Р. Хрватска);
- Смањење експлоатационих трошкова за промет свих врста возила у односу на горе поменути мрежу и правац;
- Смањење трошкова и негативних посљедица саобраћајних несрећа у односу на горе поменути мрежу и правац;
- Редукција негативних утицаја саобраћаја на животну средину усмјеравањем дијела саобраћаја који пролази кроз густо насељена подручја (градске средине) са постојеће трасе на будућу трасу аутопута;

- Утицај на локалну економију кроз повећање конкурентности услјед боље приступачности (јефтинијег, бржег и безбједнијег транспорта) другим тржиштима кориштењем аутопута;
- Утицај на повећани ниво инвестирања у нове пројекте и локалне економске системе који се налазе у утицајној зони коридора 5С (*Feasibility studija* 2006).

Како би се добила што комплетнија слика утицаја коридора на простору БиХ, извршена је геопросторна анализа уже утицајне зоне коридора 5С (< 30 km) кроз више социоекономских параметара као што су: просторна дистрибуција становништва, односно густина насељености, секторска структура привреде општина у утицајној зони, природни прираштај и просјечна висина нето зарада у односу на ентитетски просјек. Све вриједности социоекономских параметара приказане су путем картографског приказа општина које партиципирају у ужој гравитационој зони коридора 5С, статистички су обрађени табеларно и путем дијаграма.

Табела 1: Основне карактеристика општина у утицајној зони коридора 5С

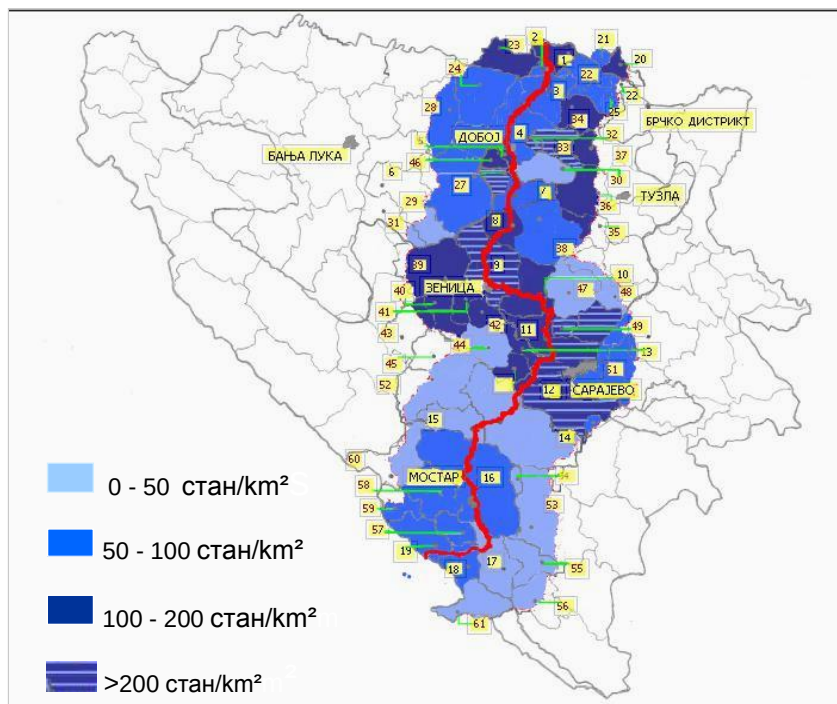
Општина	Кантон и ентитет	Површ. општине у km ²	Број становн.	Густина насељ. ст./km ²
1. Ошак*	Посавски кантон(ФБиХ)	158,4	15.925	100,5
2. Вукосавље*	Република Српска	81,6	5.522	67,7
3. Модрича*	Република Српска	352,2	28.944	82,2
4. Добој *	Република Српска	875,9	81.426	93,0
5. Добој-Југ*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	10,2	4.476	438,8
6. Тешањ*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	155,9	47.976	307,7
7. Маглај*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	290,0	23.469	80,9
8. Жепче*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	210,0	31.089	148,0
9. Зеница*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	558,5	127.113	227,6
10. Какањ*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	377,0	43.305	114,9
11. Високо*	Зеничко-добој. (ФБиХ)	230,8	40.212	174,2
12. Кантон Сарајево*	Кантон Сарајево (ФБиХ)	1.276,9	421.289	329,9
13. Кисељак*	Средњобосан. (ФБиХ)	165,0	20.734	125,7
14. Коњиц *	Херцег.-неретв. (ФБиХ)	1.169,0	28.780	24,6
15. Јабланица*	Херцего-неретв. (ФБиХ)	301,0	11.825	39,3
16. Град Мостар*	Херцег.-неретв. (ФБиХ)	1.175,0	111.116	94,6
17. Столац*	Херцег.-неретв. (ФБиХ)	286,0	13.308	46,5
18. Чапљина*	Херцег.-неретв. (ФБиХ)	256,0	23.433	91,5
19. Љубушки*	Западнохерцегов. (ФБиХ)	292,7	23.951	81,8
20. Орашје*	Посавски кантон (ФБиХ)	121,8	20.182	165,7
21.Домаљевац – Шамац	Посавски кантон (ФБиХ)	44,4	4.406	99,2
22. Доњи Жабар	Република Српска	46,8	2.948	63,0
23. Шамац	Република Српска	183,6	23.640	128,8
24. Дервента	Република Српска	516,7	43.248	83,7
25. Пелагићево	Република Српска	122,5	6.496	52,8

Геополитички и геоекономски и значај коридора 5C

26. Брод	Република Српска	234,2	20.591	87,9
27. Теслић	Република Српска	845,7	49.606	58,7
28. Пријевор	Република Српска	630,0	50.349	79,9
29. Котор Варош	Република Српска	560,1	20.217	36,1
30. Петрово	Република Српска	886,0	12.183	13,8
31. Кнежево	Република Српска	298,0	12.422	41,7
32. Добој – Исток	Тузлански (ФБиХ)	41,0	10.197	248,7
33. Грачаница	Тузлански (ФБиХ)	216,2	51.938	240,2
34. Градачац	Тузлански (ФБиХ)	218,0	46.217	212,0
35. Бановићи	Тузлански (ФБиХ)	185,0	25.732	139,1
36. Лукавац	Тузлански (ФБиХ)	337,0	51.098	151,6
37. Сребреник	Тузлански (ФБиХ)	248,0	41.325	167,6
38. Завидовићи	Средњобосански (ФБиХ)	590,3	38.017	64,4
39. Травник	Средњобосански (ФБиХ)	529,0	55.093	104,1
40. Нови Травник	Средњобосански (ФБиХ)	242,0	24.834	102,6
41. Витез	Средњобосански (ФБиХ)	159,0	25.070	157,7
42. Бусовача	Средњобосански (ФБиХ)	158,0	16.095	101,9
43. Бугојно	Средњобосански (ФБиХ)	361,0	37.359	103,5
44. Фојница	Средњобосански (ФБиХ)	306,0	12.222	39,9
45. Г.Вакуф – Ускопље	Средњобосански (ФБиХ)	402,0	19.376	48,2
46. Усора	Зеничко-добој. (ФБиХ)	49,8	6.988	140,3
47. Вареш	Зеничко-добој. (ФБиХ)	390,1	10.948	28,1
48. Олово	Зеничко-добој. (ФБиХ)	407,8	12.579	30,8
49. Бреза	Зеничко-добој. (ФБиХ)	72,9	14.676	201,3
50. Крешево	Средњобосан. (ФБиХ)	149,0	16.095	108,0
51. Град Ист. Сарајево	Република Српска	1.425,8	74.244	52,1
52. Прозор – Рама	Херцег-неретв. (ФБиХ)	477,0	16.229	34,0
53. Невесиње	Република Српска	910,7	19.149	21,0
54. Источни Мостар	Република Српска	87,8	812,0	9,2
55. Берковићи	Република Српска	253,5	2.832	11,2
56. Љубиње	Република Српска	326,4	4.300	13,2
57. Читлук	Херцегов-неретв. (ФБиХ)	181,0	15.932	88,0
58. Широки Бријег	Западнохерцегов. (ФБиХ)	387,6	26.252	67,7
59. Груде	Западнохерцегов. (ФБиХ)	220,8	15.558	70,5
60. Посушје	Западнохерцегов. (ФБиХ)	461,1	16.072	34,9
61. Неум	Херцегов-неретв. (ФБиХ)	225,0	4.638	20,6
Укупно		22.730,7	2.082.158	91,6

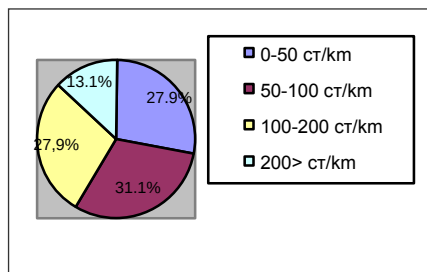
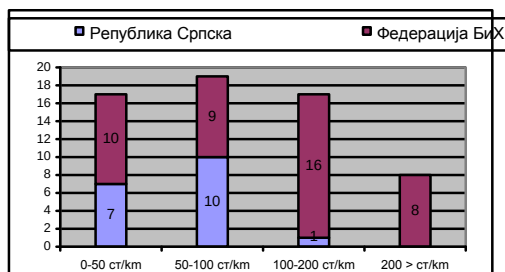
Извор: Стат .годишњак ФБиХ и РС, 2009. (*општине које дир. тангира коридор 5C)

Карта 1: Густина насељености општина у гравитационој зони коридора 5С



Густина насељености представља један од битних друштвено-географских параметара, а према карти 1. може се утврдити да је највећи дио општина у утицајној зони коридора средње густо насељен 50–100 ст/км² (31,1%), док са 27,9% учешћа подједнако партиципирају ријетко насељени простори 0–50 ст/км² (од тога чак 10 општина у РС) и релативно густо насељене територије 100–200 ст/км².

Дијаграм 1 и 2: Структура општина у утицајној зони према густини насељености



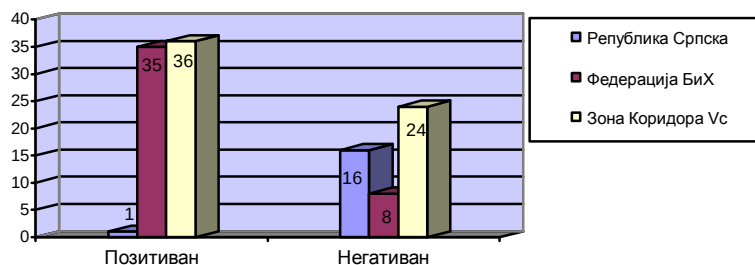
Најгушће насељени простори, >200 ст/км², учествују са 13,1% (дијаграм 1 и 2). Примјетна је велика диспропорција између густине насељености општина у РС и ФБиХ као и између рељефно нижих подручја БиХ (ријечне долине, равнице и побрђа) на сјеверном и средњем сектору трасе коридора 5C у односу на јужне дијелове (Херцеговина), већином брдско-планинског карактера у карсној области.

Карта 2: Природни прираштај општина у гравитационој зони коридора 5C



Природни прираштај је такође важан друштвено-географски чинилац и својеврстан показатељ свеукупне социо-економске ситуације у друштву. Од 61 општине (нема података за Источни Мостар) у зони коридора 5C, 60% или 36 општина има позитивне вриједности природног прираштаја, с тим да постоје извјесне специфичности на терену.

Дијаграм 3: Природни прираштај општина у зони коридора 5C за РС и ФБиХ



Од укупно 36 општина са позитивним салдом природног прираштаја само једна општина - Берковићи (табела 2) припада мањем БиХ ентитету, тј. РС, док је негативан природни прираштај у ФБиХ забиљежен у само 8 општина или 18,6% од укупног броја федералних општина у утицајној зони коридора.

Табела 2: Секторска структура привреде, просјечна нето зарада и п.прираштај општина у утицајној зони коридора 5С

Општина	Процент. удео прав. субјеката по секторима				Прос. нето плата у КМ	Природни прирашт. ај
	Примар.	Секунд.	Терциј.	Квартар		
1. Оцак*	2,4	13,4	64,2	20,0	557	-87
2. Вукосавље*	3,1	12,5	28,1	56,3	712	-8
3. Модрича*	3,8	21,1	49,4	25,7	670	-149
4. Добој*	3,3	21,6	41,2	33,9	730	-256
5. Добој-Југ*	0,0	7,6	57,6	34,8	568	34
6. Тешањ*	0,6	6,1	64,6	28,6	559	224
7. Маглај*	1,2	4,9	57,9	36,0	559	31
8. Жепче*	1,9	11,3	65,0	31,8	507	116
9. Зеница*	0,4	5,5	62,4	32,7	686	210
10. Какањ*	0,4	4,5	62,6	32,5	794	154
11. Високо*	0,8	7,3	66,8	25,1	533	199
12. Кантон Сарајево*	0,4	6,0	70,3	23,3	941	782
13. Кисељак*	0,7	8,6	50,3	40,4	549	20
14. Коњиц *	0,0	5,0	52,7	42,3	634	-4
15. Јабланица*	2,0	5,9	48,5	43,6	824	4
16. Град Мостар*	0,3	4,1	63,3	32,3	894	-27
17. Столац*	0,0	1,8	56,1	42,1	737	-51
18. Чапљина*	0,5	2,9	67,0	29,6	765	-87
19. Љубушки*	2,4	19,4	67,8	10,4	673	-33
20. Орашје	0,7	5,3	72,7	21,3	732	-77
21. Домаљевац – Шамац	0,0	5,9	80,0	14,1	541	-22
22. Доњи Жабар	10,4	19,4	46,3	23,9	549	-26
23. Шамац	5,1	20,9	45,0	29,0	637	-159
24. Дервента	4,0	29,5	38,3	28,2	541	-93
25. Пелагићево	7,6	16,5	34,1	41,8	753	-63
26. Брод	3,3	19,6	42,1	35,0	687	-65
27. Теслић	3,2	35,1	37,7	24,0	551	-92
28. Прњавор	4,7	27,3	42,3	25,7	618	-149
29. Котор Варош	10,1	36,9	31,8	21,2	539	-10
30. Петрово	2,5	36,9	25,4	35,2	593	-72
31. Кнежево	9,8	24,4	30,9	34,9	737	-10
32. Добој-Исток	0,0	6,2	64,0	29,8	558	52
33. Грачаница	0,6	7,2	68,7	23,5	520	248
34. Градачац	0,4	4,8	74,0	20,8	589	1
35. Бановићи	1,0	10,8	54,2	34,0	699	81
36. Лукавац	0,0	8,3	55,5	36,2	693	56
37. Сребреник	0,5	7,0	65,6	26,9	643	188
38. Завидовићи	0,8	7,6	59,7	31,9	476	126
39. Травник	0,5	4,6	58,8	36,1	530	70
40. Нови Травник	0,7	8,1	50,3	40,9	568	61
41. Витез	1,1	3,7	63,1	32,1	494	89

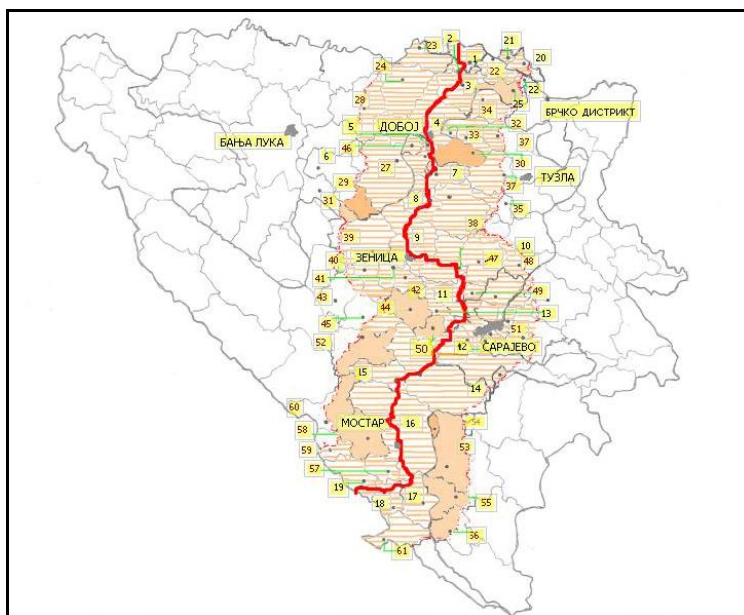
42. Бусовача	1,0	5,0	50,5	43,5	544	79
43. Бугојно	0,4	35,7	26,9	37,0	493	4
44. Фојница	0,0	7,4	39,7	52,9	578	-30
45. Г.Вакуф – Ускопље	2,2	6,4	53,8	37,6	539	1
46. Усора	0,0	3,6	55,4	41,0	482	-49
47. Вареш	1,0	6,9	47,0	45,1	585	-53
48. Олово	4,5	7,9	46,0	41,6	543	25
49. Бреза	0,0	4,5	61,4	34,1	660	2
50. Крешево	2,2	4,4	38,9	54,5	497	-7
51. Град Ист. Сарајево	1,9	24,5	49,8	23,8	786	-238
52. Прозор-Рама	4,7	3,1	42,2	50,0	747	48
53. Невесиње	5,9	18,3	28,8	47,0	706	-10
5.4 Источни Мостар	0,0	100	0,0	0,0	-	-3
55. Берковићи	8,2	22,4	20,4	49,0	779	5
56. Љубиње	16,1	25,8	20,4	37,7	595	-1
57. Читлук	0,0	1,1	80,0	18,9	629	-41
58. Широки Бријег	0,7	3,3	39,6	56,4	574	55
59. Груде	0,0	2,6	60,9	36,5	644	-13
60. Посушје	2,4	2,4	40,4	54,8	579	9
61. Неум	0,0	3,6	55,4	41,0	603	-26

Извор: Статистички годишњак ФБиХ и РС, 2009.

* Општине које директно тангира траса коридора 5С

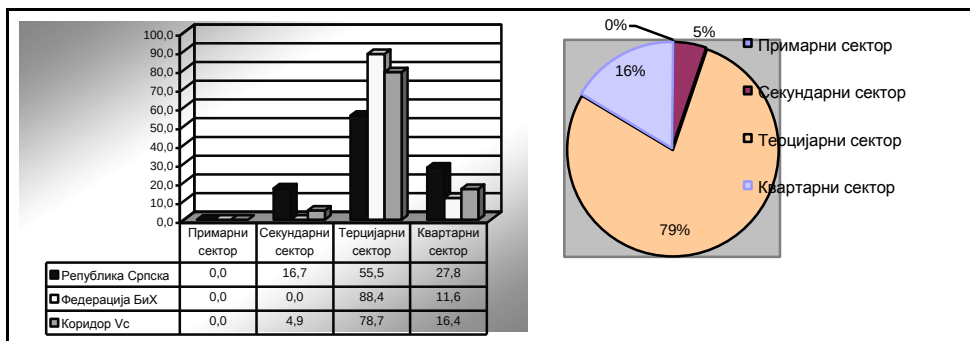
**Просјечна нето зарада у ФБиХ износи 751 КМ, док је у РС 755 КМ (31. 12. 2008. год.)

Карта 3: Структура привреде према доминантном привредном сектору општина у утицајној зони коридора 5С



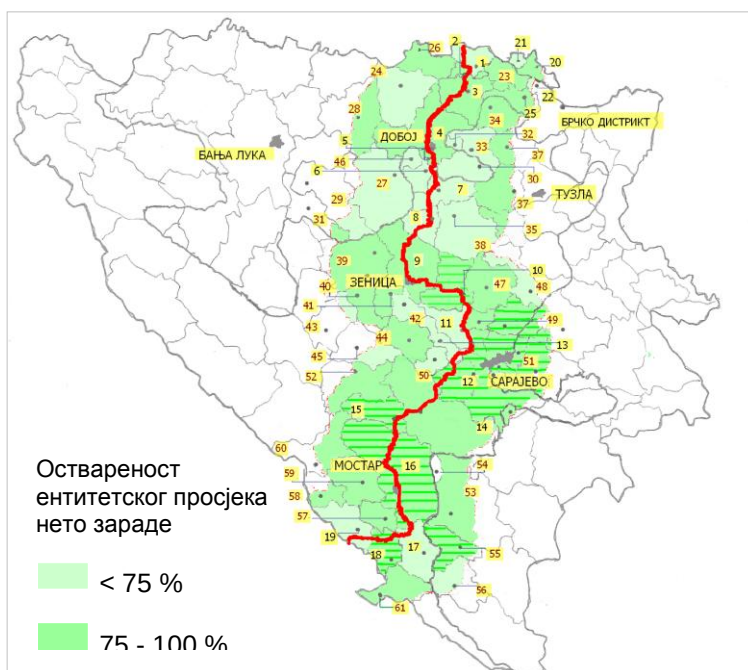
Простор Босне и Херцеговине карактерише прије свега специфичан транзициони период. Наиме, након ратних сукоба и распада социјалистичког самоуправног система, од изразито индустријско-рударске оријентације привредног развоја долази до доминације тзв. услужних дјелатности – развоја терцијарног и квартарног сектора (карта 3).

Дијаграм 4: Процентуално учешће општина са домин.сектором у зони коридора 5С



Овакав процес деиндустријализације има изразито стихијски карактер, односно има форму „наметнуте деиндустријализације“, што је резултат низа политичких и социоекономских аномалија друштвенополитичког и привредног ситема земље. Изразита доминација привредних субјеката услужног сектора (квартарни и терцијарни сектор) присутна је на 95,1% територије или 48 општина утицајне зоне коридора у БиХ. Једине три општине са доминантним производним (секундарним) сектором привреде лоциране су у Републици Српској (табела 2).

Карта 4: Просјечна нето зарада општина у гравитационој зони коридора 5C



У недостатку података о БДП-у општина у утицајној зони коридора 5C, као социоекономски индикатор развијености користиће се висина просјечне нето зараде општина у односу на ентитетски просјек. Висина оствареног ентитетског просјека представљаће основу за диференцирање општина према развијености.

Групу општина које остварују мање од 75% просјечне нето зараде чине 22 општине или 36,7% од укупног броја општина. Проценат општина са распоном испуњености ентитетског просјека зарада је највећи и износи 51,7% , док је број општина које имају једнаке или веће просјечне нето зараде у односу на ентитетски просјек седам, односно 11,6% (табела 3).

Табела 3: Распоред општина према разредима просјечне нето зараде у ентитетима

Ентитети (кантони)	100% >	75 - 100%	< 75%	УКУПНО
Посавски кантон	-	1	2	3
Зеничко-добојски кантон	1	4	6	11
Тузлански кантон	-	4	2	6
Средњобосански кантон	-	2	8	10
Сарајевски кантон	1	-	-	1
Херцег.-неретвански кантон	3	5	-	8
Западно-херцеговачки кантон	-	4	-	4
Федерација БиХ	5 (11,6%)	20 (46,5%)	18 (41,9%)	43 (100%)
Република Српска	2 (11,8%)	11 (64,7%)	4 (23,5%)	17 (100%)
УКУПНО	7 (11,6%)	31 (51,7%)	22 (36,7%)	60 (100%)

Извор: Статистички годишњак ФБиХ и РС 2009.

Геополитичке одреднице коридора 5С

Нова је геополитичка и економска оријентација Босне и Херцеговине у измијењеном географском положају сведена углавном на посавско-пуднавску компоненту, јер је моравско-вардарска изгубљена док је из јадранске, као једне од главних токова литорализације, добрим дијелом дијелом искључена.

SWOT – анализа

<i>Предности (Strenghts):</i> – пролази кроз густо насељена подручја (4 од 6 највећих урбаних центара БиХ); – повезује велике привредне центре: Зеница (металуршки комбинат), Мостар (алуминијски комбинат), Брод и Модрича (рафинерије нафте и уља), Какањ (рудник и ТЕ), Добој (рудник Станари и ТЕ у изградњи); – измјештање саобраћаја из ужих градских зона, – смањење нивоа полуције жив. средине у ужим градским подручјима, – повећање безбједности учесника у саобраћају; – интензивна саобраћ. активност (M17/M5) ПГДС: 13.000–16.000 возила/дан (Добој–Каруше, Хацићи–Мостарско раскршће и Мостар–Буна–Житомислић;	<i>Недостаци (Weaknesses):</i> – дефрагментираност саобраћајне мреже са коридором 5C; – велики дио становништва са два регионална и једним мезорегионалним центром остаје ван зоне утицаја Коридора (Бања Лука 227.046 стан., Тузла 131.464 стан. и Требиње 31.620 стан.); – повећан ризик по животну средину узурпацијом зиратног земљишта.
<i>Шансе (Opportunites):</i> – заустављање „демографског“ пражњења у неразвијеним рубним општинама РС; – укључивање у савремене социоекономске и политичке европске интеграције; – стварање бољих позиција у предстојећем „енергетском сукубу“ на простору југоисточне Европе између САД и земаља ЕУ са једне и Русије са друге стране.	<i>Пријетње (Threats):</i> – неопходно повезивање великих центара са коридором, како би се избјегао изразито неравномјеран развој региона у БиХ изградњом аутопутева или реконструкцијом постојећих праваца: Бања Лука–Шешлије, Бања Лука–Приједор, Добој–Јакеш–Брчко–Бијељина, Кладањ–Зворник или Лукавац–Тузла–Зворник.

Наиме, јадранска оријентација сведена је на уски појас од свега 23,4 km код Неума, при чему је приступ отвореном мору због природних предиспозиција онемогућен. У привредном смислу, уски босанскохерцеговачки пробални појас нема индустријски, нити инфраструктурни значај изuzeв туристичко-угоститељског.

Карта 5: Утицајна зона коридора 5C са планираним путевима у БиХ



Извор: Аутоцеста на коридору 5C “Feasibility” студија, Сарајево 2006. год.

Посебну пажњу треба усмјерити на ријечни ток Саве који је плован 333 km и представља најкраћу везу Босне и Херцеговине и дијела Хрватске са ријечно-каналским системом Рајна–Мајна–Дунав, а будући да се правцем ријеке Дунав пружа еврокоридор VII, то ствара предуслове за укључивање наше државе у јединствени европски систем водених путева и потпунију валоризацију њеног саобраћајно-географског положаја. На ријеци Сави налазе се највећа босанскохерцеговачка пристаништа: Брчко, Шамац и Брод са нафтним терминалом, што уз постојећи нафтовод Омишаљ–Панчево, односно планирани гасовод „Јужни ток“, чија би се траса пружала уз трасу поменутог нафтовода знатно добија на значају геополитичка и геое-

кономска димензија тзв. „савске“ осовине развоја, којој гравитирају сви велики регионални центри: Бања Лука, Тузла, Добој, Зеница и добрим дијелом Сарајево.

Несумњиви значај укључивања Босне и Херцеговине у европске интеграционе процесе путем приступа Трансевропској транспортној мрежи југоисточне Европе која обухвата пет коридора: IV, V, VII, VIII и X, рефлектује се у доступности енергентима и другим стратешким сировинама које се допремају из црноморско-каспијског басена у Европску унију, битно ће утицати на пораст међународних робних токова, али и на општи привредни опоравак и развој босанскохерцеговачког друштва.

Литература

Statistical Yearbook, UN, New York, 2008.

Statistički godišnjak, Federalni zavod za statistiku, Sarajevo 2009 (www.fzs.ba)

Статистички годишњак РС, Републички завод за статистику, Бањалука 2009.

Министарство комуникација и транспорта БиХ: *Аутоцеста на коридору 5C*, „Feasibility“ студија Сарајево, децембар 2006.

Separat SR Bosne i Hercegovine (1983), Jugoslovenski leksikografski zavod, Zagreb

Јелена М. Пецељ*
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за географију
Мирољуб А. Милинчић**
Универзитет у Београду
Географски факултет
Катедра за животну средину и ГИС

Оригинални научни рад

ПРАВЦИ РАЗВОЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ У СКЛАДУ СА ЕВРОПСКОМ ЕНЕРГЕТСКОМ ПОЛИТИКОМ

Европску унију чине различити органи и институције међу којима се Европска заједница (Европска економска заједница) и Европска заједница за атомску енергију (EURATOM) баве питањима енергетске политике.

Савет министара Европске уније (Council of European Union) доноси главне политичке смернице, а Европска комисија и Европски парламент доносе извршне прописе. У оквиру Европске комисије формиран је Директорат за енергетику и транспорт (DG TREN), за чији рад је надлежан комесар за енергетику Европске комисије. За питања везана за инфраструктуру, поред политичке одлуке о приоритетним пројектима, значајна је и улога финансијских институција – Европске инвестиционе банке (EIB) и Европског фонда за регионални развој.

Основни циљеви енергетске политике Европске уније су:

- обезбеђење снабдевања енергијом,
- интеграција енергетских тржишта,
- обезбеђење усклађености енергетске политике с циљевима одрживог развоја рационалним кориштењем енергије и развојем обновљивих извора,
- подстицање истраживања и технолошког развоја у енергетици,
- енергетска политика Европске уније обухвата коришћење угља, нафте, природног гаса, обновљивих извора енергије, нуклеарне енергије и управљање тражњом за различитим облицима енергије.

Европски документи

Због бројних изазова са којима је суочена енергетика ЕУ, Европска комисија је 8. марта 2006. године објавила *Зелену књигу* (Green Paper) којом је покренула решавање проблематике будуће европске енергетске политике. Главни правци развоја енергетске политике ЕУ су дефинисани у

* j_pecelj@yahoo.com

** mikan@gef.bg.ac.rs

оквиру *Зелене књиге* о стратегији за сигурно снабдевање енергијом. *Зелена књига* предвиђа спровођење двадесетак мера за остваривање главних циљева енергетске политике, одрживог развоја, конкурентности и сигурности снабдевања. Уз развој заједничке енергетске политике, што је дугорочни циљ, *Зелена књига* предвиђа и краткорочне мере усмерене на шест основних области:

- формирање јединственог енергетског тржишта,
- обезбеђење солидарности између држава чланица,
- одржив, ефикасан и разнолик избор енергената,
- климатске промене,
- „чисте“ енергетске технологије,
- заједничку спољну енергетску политику.

Европска комисија је 1997. године објавила и *Белу књигу* (White Paper) *Енергија за будућност: обновљиви извори енергије* као основу за израду стратегије и акционог плана у којој је прокламован циљ да се до 2010. године обезбеди 12% укупне потрошње енергије добија из обновљивих извора.

У септембру 2001. године усвојена је *Директива о промоцији електричне енергије произведене из обновљивих извора енергије* (Директива о обновљивим изворима енергије). Она је пружила ЕУ правни оквир за промоцију и развој даљег коришћења потенцијала обновљивих извора енергије. Пуна примена *Директиве о обновљивим изворима енергије* има потенцијал уштеде од 200 милиона тона емисије CO₂, односно 6% укупне емисије CO₂ у 1990. години, у ЕУ. Основни циљ *Директиве* је дуплирање учешћа обновљивих извора у укупној производњи енергије на 12% до 2010. године.

С обзиром на то да се обновљиви извори енергије највећим делом користе за производњу електричне енергије, постављен је и циљ да се 21% укупне електричне енергије произведе из обновљивих извора енергије. Обновљиви извори енергије и заштита човекове околине у сектору енергетике постају кључни услов одрживог развоја и опстанка.

Енергетска политика Европске уније у својој подршци за енергију из обновљивих извора се огледа и у појачаном индустријском развоју, отварању нових радних места и смањењу потреба за извоз фосилних горива, чијом употребом се нарушава животна средина. Осим тога, подстиче се и регионални развој, што би резултовало извозом технологија у државе које нису чланице Европске уније.

У складу са *Кјото протоколом*, Европска комисија за енергетику је покренула 2001. године акциони план којим је предвиђено да до 2020. године алтернативна горива учествују са 20% у укупној потрошњи горива. Употреба горива добијених из пољопривредних култура (биогорива) је технологија са највећим потенцијалом у наредном дугорочном периоду. Тај концепт је нарочито интересантан за државе са јаким агроиндустријским капацитетима.

Директивом 2003/30/ЕС донета је одлука којом се земље, чланице Европске уније, обавезују да обезбеде минималне пропорције биогорива и осталих обновљивих горива на својим тржиштима у односу на укупну потрошњу горива.

Директивом 2003/96/ЕС омогућено је државама Европске уније да ослободе биогорива опорезивања, чиме би се омогућила конкурентност у односу на фосилна горива.

Правилник о техничким и другим захтевима за течна горива биопорекла прописује коришћење биодизела у концентрацији од 100% (BD-100) и као додатак гориву за дизел моторе, у складу са захтевима стандарда SCS EN 590.

Акциони план биомасе

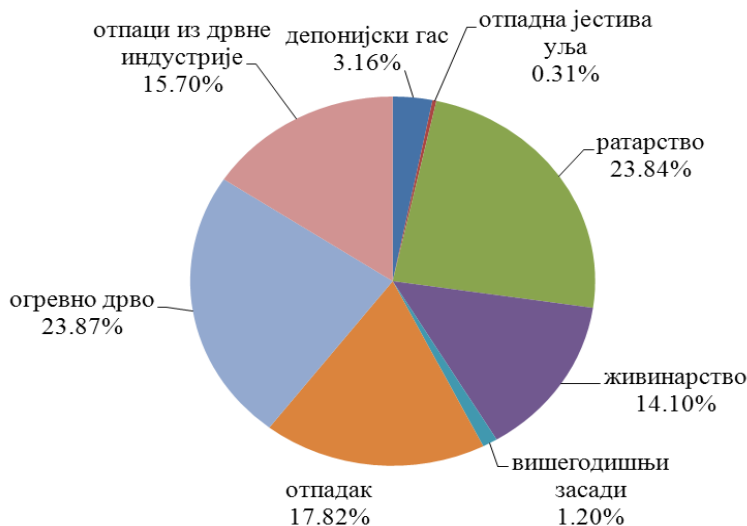
Акциони план биомасе (The Biomass Action Plan - BAP) је објавила Европска унија 7. децембра 2005. године као и стратегију ЕУ за биогорива (EU's Strategy for Biofuels) 8. фебруара 2006. године. Акциони план биомасе представља ефикасан оквир за убрзавање процеса примењивања биомасе у производњи електричне енергије, за грејање и транспорт горива. За имплементацију акционог плана на националном нивоу потребан је широк спектар приступа овој проблематици, као и развој технологија. Истраживања показују да су Кина и земље Европске уније у сличној ситуацији када је биоенергија, као алтернативни извор енергије, у питању. Са обе стране постоји огроман потенцијал кориштења биомасе, међутим није сасвим јасно какве врсте примењивања и технологије дају највише користи, ни како убрзати искориштење биомасе као ресурса. Стога је и објављен акциони план који ће послужити као пример уопштеног и целовитог кориштења биомасе, осврћући се и на проблем очување животне средине, стабилизацију економије и унапређивање пољопривреде. Биомаса тренутно представља највећи извор обновљиве енергије у оквиру региона Европске уније.

Акциони план биомасе сам по себи поставља оквир за имплементацију кориштења биомасе, док је одговорност за достизање жељених циљева на земљама чланицама Европске уније. Акциони план биомасе предвиђа мере за повећање развоја енергије из биомасе од дрвета, отпада и пољопривредних усева отклањајући економске баријере које постоје на јавном тржишту. Намера је да се промовише биомаса за потребе грејања, електричне енергије и транспорта. Осим тога, предвиђено је и да се повећа ефикасност снабдевања биомасом, обезбеди финансирање и подрже даља истраживања.

Кориштење биомасе у Републици Српској

Енергија биомасе представља велики потенцијал Републике Српске, обзиром да је богатство шумом њен највећи ресурс. У њој преовлађују руралне области, због чега би се велике количине дрвног и пољопривредног отпада могле користити за стварање топлотне и електричне енергије. Према проценама Економског института у Бањалуци, биомаса која је прикладна за производњу биогаса (комунални отпад, сточарство, енергетски усеви), чини 39% укупног потенцијала биомасе Републике Српске, а биомаса погодна за сагоревање (отпаци из дрвне индустрије, огревно дрво, шумски отпаци) чини око 59% (Јелавић, Бачан 2009). На дијаграму () су дати потенцијали различитих извора биомасе у Републици Српској.

Кориштење биомасе и производња биогорива у Републици Српској за сада су још увек скромни. Фабрика SISTEM ECOLOGICA за производњу биодизела у Српцу, је једини стандардизовани производни погон биогорива капацитета 1500 тона месечно из уљане репице. Од биомасе се највише користи дрво за огрев и то у 58% урбаних и 85% руралних домаћинстава на подручју Републике Српске. Постоје четири фабрике пелета производног капацитета 97 000 тона годишње као и топлана на угаљ и дрвену сечу Пале, снаге 6,52 MW, капацитета 18–24 000 m³ годишње сече.



Дијаграм 1.1: Процентуални удео различитих извора биомасе у Републици Српској (Економски институт Бањалука)

Влада Републике Српске је ипак начинила помак доношењем Уредбе о врстама, садржају и квалитету биогорива у моторним возилима 6. 9.

2007. године, којом се прописује садржај биогорива у горивима за моторе са унутрашњим сагоревањем, врста биогорива и својства квалитета биогорива, обавезе дистрибутера и начин доказивања усаглашености квалитета биогорива. Циљ ове уредбе је прописивање услова за стављање у промет на домаће тржиште биогорива и других обновљивих горива за потребе саобраћаја као замене за дизел гориво или бензин и подстицање кориштења биогорива и других обновљивих извора у сектору превоза (Пецељ 2010).

Просечни годишњи садржаји биогорива у свим горивима за моторна возила која се прометују на тржишту Републике Српске као горива за моторна возила, по годинама, износи 2% у 2008. години, 3% у 2009. години и 5,75% у 2010. години.

Садржај биогорива изражен је као проценат енергетске вредности горива које се прометује као гориво за моторна возила, узимајући у обзир енергетске вредности биогорива и фосилних горива. У сврху остварења задатог циља удела биогорива на тржишту, Влада Републике Српске по прибављеном мишљењу министарства надлежног за област екологије доноси план којим утврђује годишњи постотак биогорива у укупном уделу горива на домаћем тржишту, као и годишњу количину биогорива која се мора ставити у промет на домаће тржиште.

Министарство привреде, енергетике и развоја је припремило информације за Владу, као и закључак којим се оснива радна група чији су задаци дефинисање приоритета развоја, израда акционог плана за биогорива, као и промоција производње и кориштења биогорива на територији Републике Српске. Све то има за циљ обезбеђивање одрживог руралног развоја и испуњавање међународних обавеза у подручју смањења емисије стакленичких гасова.

У току је израда стратегије развоја енергетског сектора Републике Српске, па са тим у вези постоје повољни услови за производњу биогорива у будућности у Републици Српској, с обзиром да Министарство привреде, енергетике и развоја нуди помоћ предузећима и залаже се за обезбеђивање средстава за израду пројекта *Студије економске исплативости производње биогорива*.

Закључак

У Републици Српској постоји велики потенцијал за искориштавање биомасе у енергетске сврхе, због преовлађивања руралних области и шумског богатства. Кориштење обновљивих извора енергије у Републици Српској је у зачетку, али се може рећи да за неке од њих постоје доста добри услови експлоатације (хидроенергија и енергија биомасе).

Управљање отпадом у енергетском сектору могло би значајно допринети запошљавању у областима руралне економије. С обзиром да не постоји енергетска независност у Републици Српској ни у Босни и Херце-

говини, за сада се чини оправданим размотрити могућности ослањања на овај обновљиви вид енергије.

Сви производи добијени конверзијом биомасе имају веома високе трошкове производње. Са економске тачке гледишта, производња биогорива за сада има малу економску оправданост, али све већом ограниченошћу фосилних горива и све већим загађењем, временом добија на значају. Висока цена производње енергије из биомасе је највише последица велике вредности инвестиција за изградњу одговарајућих постројења намењених експлоатацији биомасе у енергетске сврхе.

Главна препрека недовољног искориштавања потенцијала биомасе лежи, како у недостатку средстава, тако и у вођењу енергетске политике Владе Републике Српске, која би требало да субвенционире произвођаче енергије из обновљивих извора, уз многе пореске олакшице (Директива 2003/96/ЕС).

Разматрање производње биогорива се врши и са аспекта мањег загађења животне средине. Овај поступак решава проблем елиминације органског отпада и његове даље употребе у енергетске сврхе.

Повољни еколошки ефекти кориштења биомасе се постижу и кроз смањену емисију CO_2 , SO_2 , чађи и пепела. Тачније речено, уопште не долази до емисије SO_2 , а емисија чађи се смањује и за око 10 пута у односу на угаљ као енергетски носач, док се концентрација CO_2 не мења у атмосфери.

У циљу ефикасније реализације плана повећања удела кориштења биогорива, Европска унија препоручује да се омогући финансијска помоћ процесној индустрији, да се развијају пројекти, развија одговарајућа административна подршка, као и деловање на регионалном и локалном нивоу. Реализацијом пројекта коришћења биогорива постижу се и други значајни ефекти, као што су развој пољопривредног сектора, развој и боље пословање других грана индустрије кроз производњу и примену нуспроизвода и смањење увозне зависности.

Литература

- Европска комисија 2001: *Зелена књига – Пут ка заједничкој европској еколошкој енергетској стратегији*; *Бела књига – Европска политика саобраћаја до 2010: Скретнице за будућност*.
- Стратегија развоја енергетике Републике Српске 2009: *Обновљиви извори енергије*, Јелавић, Б., Бачан, А., Економски институт Бања Лука, Бања Лука.

- Илић 2003: Илић, М., Студија – *Енергетски потенцијал и карактеристике остатака биомасе и технологије за њену припрему и енергетско искоришћење у Србији*, Министарство за науку, технологију и развој Републике Србије, Београд
- Пецељ 2010: Пецељ, Ј., *Могућности производње биогаса у Републици Српској као фактор концепта одрживог развоја*, Интердисциплинарност и јединство савремене науке, радови Филозофског факултета, Источно Сарајево, књига 4 (557–564).
- Lettinga, Hulshoff 1994: Lettinga, G., Hulshoff, Pol, L., W., Comparison of anaerobic systems (UASB, IC, FB). In: Kursunterlagen zu Environmental Biotechnology. TU Delft, Niederlande.
- Пецељ, Пецељ 2009: Пецељ, Ј., Пецељ, М., *Течна биогорива као фактор одрживог развоја у Србији*, Међународни научни скуп – Територијални аспекти развоја Србије и суседних земаља, Географски факултет, Дивчибаре, 497–502.
- Љешевић 2005: Љешевић, А. М., *Животна средина села и ненастањених подручја*. Географски факултет, Институт за животну средину и ГИС, Београд.
- Стратегија развоја енергетике Републике Србије до 2015. године* 2004: Министарство рударства и енергетике Републике Србије, Београд.
- Пецељ и сар. 2010: Пецељ, Ј., Пецељ, М., Мандић, Д., Филиповић, Д., Стојковић, С., Пецељ, Р. М., Милић, В., Пецељ, Д., *The Possibilities of Biofuel Production in Terms of Sustainable Development in Serbia*, Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Environment, Ecosystems and Development, Included in ISI/SCI Web of Science and Web of Knowledge, ISBN: 978-960-474-261-5, ISSN:1792-7374, Athens, Greece, pp. 206–210.

УПРАВЉАЊЕ ВОДНИМ РЕСУРСИМА КАО КОМПОНЕНТА СТРАТЕГИЈЕ РАЗВОЈА ГРАДА ИСТОЧНОГ САРАЈЕВА

Увод

Сарајево је током XX вијека, посебно у бившој СФРЈ, словило као град са квалитетном водом и добрим водоводним системом, као и системом одводње и прераде отпадних вода. У почетној фази развоја водоснабдијевања града (од оснивања водоводног предузећа 1899. године до шездесетих година прошлог вијека), углавном се користила вода са планинских врела (Бистрица, Тилава, Мошћаница и др.) а како су потребе за водом стално расле, приступило се експлоатацији подземних вода са подручја Сарајевског поља.

Након рата 1992–1995. град Сарајево је подијељен. Већи (урбани) дио је припао Федерацији БиХ, а мањи Републици Српској. На подручју претежно руралних дијелова некадашњих јужних и источних сарајевских општина формиран је нови град – Источно Сарајево, а територијално су му припала и врела која су некада снабдијевала водом градске општине: Бистрица, Тилава, Миљацка и др. Некадашњи јединствени систем водовода и канализације подијељен је у два независна система, са мало додирних тачака и спорадичном сарадњом о питањима рјешавања оперативних проблема. Унутар територије Кантона Сарајево остао је један од највећих колектора подземних вода у БиХ, издан интергрануларне порозности лоциран на подручју Сарајевског поља (одакле се град водом снабдијевао и прије рата), док се Источно Сарајево снабдијева питком водом из колектора пукотинске порозности, који се дренирају у подножју планина, преко крашких врела. Таква структура хидрогеолошких колектора и њихов географски положај условљавају два потпуно различита водоводна система. У Источном Сарајеву доминира гравитациони систем водоснабдијевања, јер се изворишта углавном налазе изнад централних насеља, док се у Сарајеву вода мора пумпним системом транспортовати до резервоара на вишим надморским висинама (колектор подземних вода на нижој висини у односу на насеља), да би се одатле дистрибуисала према потрошачима у градским зонама.

* draskovic.branislav@gmail.com

Свакако да је гравитациони систем много јефтинији, јер је потрошња електричне енергије у пумпним станицама велика¹.

Издашност врела територије Источног Сарајева била је довољна за подмиривање потреба водоснабдијевања становништва, па је вишак воде усмјераван према Кантону Сарајево (дио воде са врела Тилаве и Бистрице). Ипак, са ширењем града, повратком дијела избјеглог становништва, изградњом нових насеља (посебно у општинама Источно Ново Сарајево и Источна Илиџа), развојем водоводне мреже и проширивањем на нове дијелове града, потребе за водом постају све веће, док количина водних ресурса у употреби остаје иста, па почиње да се осјећа дефицит у вријеме када је вода најпотребнија, а када је има најмање – у лјетном периоду. Сушни периоди често трају врло дуго (просјечно најчешће обухватају период од средине јуна до краја октобра), и тада се значајно погоршају сви наизглед повољни просјечни специфични односи и показатељи расположивих вода (за 7 до 10 пута се смање просјечне расположиве воде по глави становника на већим сливовима).

У Сарајеву је ситуација знатно сложенија. Разграната водоводна мрежа у рату је прилично оштећена, губици од цурења воде из цијеви крећу се око 70%, дио некадашњих извора водоснабдијевања припао је другом ентитету, ниво подземних вода у Сарајевском пољу је у константном опадању због преексплоатације, број домаћинстава прикључених на градски водовод у сталном је порасту, итд. Количина воде која је на располагању, у односу на растуће потребе (са одрживим системом, без преексплоатације подземних вода), износи само 41%. Дефицит воде у систему могуће је избјећи на два начина: смањењем огромних губитака у мрежи и новим изворима водоснабдијевања. Смањити губитке у застарјелој и оштећеној мрежи (у градским условима), није лако, јер је то процес који захтијева доста времена и значајна материјална средства.² Стога се упоредо са пројектима редукције губитака почело размишљати о дугорочном рјешавању водоснабдијевања Кантона Сарајево, кроз проналажење нових извора водоснабдијевања.

Као рјешење за евентуалне дефиците питке воде у будућности, најчешће се помињу нови извори водоснабдијевања, што се прије свега односи на водне акумулације и нова изворишта питке воде. С обзиром да управљање водним ресурсима представља примарну компоненту развојних планова оба града, њихова усклађеност је веома пожељна, поготово јер сливно подручје обухвата територију и једног и другог града. Међутим, различити политички (локални, ентитетски, па и национални) интереси, доводе до не-

¹ Поред 39 бунарских пумпи, инсталирано је и 70 пумпи у 20 пумпних станица које су у саставу дистрибутивног система. Укупни годишњи трошкови електричне енергије износе око 6 милиона КМ (Ковачина 2003: 4–5).

² Ипак, кроз неколико пројеката реконструкције мреже, ниво губитака од цурења се током 2000. године смањује на 56%, да би 2008. износио око 50%. План је да се до 2020. губици смање на 40% (Ковачина 2003: 4–6).

усаглашености стратешких планова, иако је вода као ресурс толико битна да напросто нема мјеста за неспоразуме. Као примјер различитих погледа на стратешке правце развоја водоснабдијевања сусједних градова могу послужити два важна документа: *Просторни план града Источно Сарајево до 2015. године* и *Мастер план дугорочног рјешавања водоснабдијевања, одводње и третмана отпадних вода у Кантону Сарајево*. Анализа се односи прије свега на одабир локације будућих водних акумулација, које су један од основних инструмената интегралног управљања водним ресурсима.

У свијету је присутна тенденција изградње малих и микроаккумуляција које треба да постану доминантна изворишта воде за пиће. У САД их има преко 1,5 милиона, у Јапану 250.000, у Бугарској 5.000. На територији Србије их има више од 100, а само у сливу Велике Мораве је планирано 350 (Дукић 2007: 329). Предности оваквих акумулација су вишеструке: осим за пиће, вода се може користити и за остале намјене (туризам, хидроенергија, пољопривреда и др.), а с обзиром да је најчешће у питању рурално подручје, нису потребне велике инвестиције за иселјавање становништва, вода се *складишти* у периодима када је има довољно и чува за периоде када је несташица.

Водни ресурси Источног Сарајева

Све воде у сливу нису водни ресурси, а водним ресурсима се сматрају само воде које имају употребну вриједност. Просторна и временска неравномјерност присутности воде смањује обим искористивости, а бројна су ограничења услова за коришћења воде (геотехнички, хидрографевински, економски, социјални, еколошки и др.).

Због разуђености територије у Источном Сарајеву послују три независна водоводна предузећа која снабдијевају преко 50.000 становника: КП „Водовод и канализација“ а.д. Источно Сарајево (покрива општине Источно Ново Сарајево, Источна Илица и Трново), ЈП „Водовод и канализација“ а.д. Пале и ЈП „Водовод и канализација – Врело Биоштице“ а.д. Соколац.

Укупна површина града (кога чини 6 општина: Соколац, Пале, Источни Стари Град, Источно Ново Сарајево, Источна Илица и Трново) износи 1.425,77 км². Надморске висине се крећу између 450–1910 м. 2/3 подручја града смјештено је на висинској зони између 800–1200 м.н.в³ (Просторни план Источног Сарајева 2008: 67).

Територија града представља типично мерокарстно подручје⁴ са нешто већом заступљеношћу крупнијих површинских крашких форми рељефа само на подручју Романије (Гласиначко поље).

³ 897,5 km² од 800 до 1.000 м.н.в. и 476,7 km² од 1.000 до 1.200 м.н.в.

⁴ Покривени карст са степеном пошумљености преко 50% (нпр: Пале 75%, И. Н. Сарајево 60%).

Релативно мала моћност кречњачких слојева (до 400 м) условљава појаву већег броја врела мање издашности и развијену хидрографску мрежу (посебно у општинама Пале и Трново). Порозност стијена је углавном пукотинска, осим у алувијалним равнинама ријека и подручјима са развијеним процесом акумулације (Сарајевско поље).

Средња количина падавина износи 950–1.000 mm/god (Сарајевско поље 944, Пале 1.031), што је за око 25% мање од босанскохерцеговачког просјека (1.250 mm/god). Међутим, због орографских одлика терена постоје знатне варијације у количини падавина између котлинских и планинских предјела, јер се на планинама количина падавина пење и до 1.300 mm/god. Интензитет испаравања износи 390–600 mm/god.

Значајна количина воде понире системом пукотина формираних у кречњацима, да би се појавила у виду крашких врела на котлинским ободима (сарајевске, паљанске и трновске). Површинско отицање одвија се путем ријечних система који са југа теку према Сарајевском пољу, гдје се улијевају у Босну. То су: Миљацка, Жељезница, Тилава (Добриња), Касиндолски поток и њихове притоке.

Табела 1. Основне хидрометријске карактеристике водотока Источног Сарајева

Ријека	Слив	Површина слива (F) [km ²]	Дужина ријеке (l) [km]	Кота извора [m]	Кота ушћа [m]	Ук. пад (h) [m]	Ср. пад (J) [m/km]	Протикај ⁵ [m ³ /s]
Жељезница	Босне	481,75	41,82	1020	491	529	12.6	9,29
Касиндолка	Жељезнице	61,031	27,71	1515	497	1018	36.7	0,7
Црна ријека	Жељезнице	91,091	20,63	1400	780	620	30.0	2,15
Бијела ријека	Жељезнице	108	15,33	1158	600	558	36.4	2,56
Тилава	Добриње	43,669	3,74	577	534	43	11.5	1,31
Миљацка ⁶	Босне	368,010	21,97	595	487	108	5	5,7
Мокрањска Миљацка	Миљацке	114,675	25,96	1060	595	465	18	1,5 ⁷
Паљанска Миљацка	Миљацке	117,187	14,78	1020	595	425	29	1,3

За водоснабдијевање Источног Сарајева углавном се користе контактна крашка врела на додиру карбонатних стијена у повлати и тзв. сарајевских пјешчара у подини. Карактеристика већине врела су: средња издашност⁸ (углавном 10–100 l/s), релативно велика тврдоћа због контакта са кречњаком, значајне варијације у издашности и др.

Поред наведених изворишта, бројна су мања врела која су укључена у главне системе водоснабдијевања, али постоји и знатан број мањих каптажа (углавном у руралним дијеловима територије града) које не одржавају водоводна предузећа него локално становништво.

⁵ Подаци за протикај углавном из *Мастер плана дугорочног водоснабдијевања Кантона Сарајево и ФХМЗ*.

⁶ Подаци за Миљацку дати у табели односе се на ријеку од саставака до ушћа (осим укупне површине слива која је дата као интегрална).

⁷ Према процјени аутора.

⁸ Према Мајнцеру спадају у IV групу (од укупно седам) по издашности, осим врела Тилаве и Биоштите који су у III групи (0,1–1 m³/s).

Табела 2. Најважнија изворишта водоснабдијевања града Источног Сарајева

Водоводни систем	Извориште воде	Изда- шност ⁹ (l/s)	Општина	Надм. висина (m)
Пале	Станско врело	18	Пале	1.499
	Врело Праче	81		1.456
	Врело Бистрице	33		1.293
	Врело Влахови- ћи	13		1.240
	Врело Миљацке	45		985
	Сјетлинска вре- ла	12		1.125–1.150
	Мокрањска вре- ла	18		1.100–1.278
Источно Сарајево (доњи дио)	Тилава	200	И. Н. Сара- јево И. Илица	585
	Љуштра	40	Трново	906
	Габски млини	80	Трново	732
Соколац	Врело Биошти- це	300	Соколац	736
	Кржуљ	12		1.074
	Геруша	5		950

Пукотинска вода крашких терена нема тако велики капацитет само-пречишћавања као класична, нормална, издан-вода, па је повремено потребан додатни третман због мутноће. Типичан примјер је врело Тилаве¹⁰ каптирано 1953. за потребе водоснабдијевања града Сарајева, али је због великих мутноћа након падавина често искључивано из система водоснабдијевања. Због тога је 1968. године изграђен (тада модеран и скуп) објект за третман воде¹¹ (таложење са коагулацијом, филтрирање и хлорисање). С друге стране, врело Паљанске Миљацке, које се користи за водоснабдијевање Пала, нема постројење за филтрирање воде, па вода у систему након већих падавина није за пиће.

⁹ Подаци добијени из градских водоводних предузећа.

¹⁰ Врело у подножју Требевића, на територији општине Источно Ново Сарајево.

¹¹ Филтер Тилаве на 2 км од врела, са резервоаром на коти 576 м (9 м нижој од изворишта).

Просторни план града Источног Сарајева предвиђа примјену принципа интегралног управљања водним ресурсима, јединствено дјелујући на сва три водопривредна сектора: кориштењу вода, заштити вода и заштити од вода. Према поменутом плану вишенамјенске акумулације представљају најважнији инструмент интегралног управљања водним ресурсима, а на територији града се планирају четири веће акумулације:

1. Бијела ријека на Бијелој ријеци и Пресјеници са котом успора 680,5 м.н.в. (првенствено намијењена за потребе водоснабдијевања Сарајева и доњег дијела Источног Сарајева, секундарно изравнавање протицаја и енергетика);
2. Компензациони базен Кијево на Жељезници са котом успора 600,0 м.н.в. (првенствено изравнавање протицаја);
3. Чељиговићи на Миљацки са котом успора 708,5 м.н.в. (првенствено изравнавање протицаја и одбрана од поплава, секундарно енергетика);
4. Кнежина на Биоштици са котом успора 735 м.н.в. (првенствено изравнавање протицаја и одбрана од поплава, секундарно енергетика).

Анализом локација, намјене, политичких односа међу ентитетима, и прије свега економске ситуације у земљи, намеће се закључак да је извјесност изградње поменутих акумулација врло упитна. Три од четири акумулације су планиране првенствено ради изравнавања протицаја, што ипак нема тај ниво ургентности као питање водоснабдијевања. Друго, имајући у виду да ентитетска граница пресијеца на неколико мјеста сливно подручје, поставља се питање могућности политичког договора који је неопходан код оваквих пројеката. На примјер, акумулација Чељиговићи на Миљацки, чија је првенствена намјена изравнавање протицаја и одбрана од поплава, налази се у близини ентитетске границе, у Републици Српској, а низводно подручје припада Федерацији БиХ. Осим тога, корито Миљакце је кроз Сарајево димензионирано тако да може да прими велике воде, па се не види јасан интерес за изградњу овакве акумулације. Исти је случај са компензационим базеном на Жељезници (у Кијеву), који припада територији РС а евентуални интерес за изградњу у већем обиму имала би Федерација БиХ.

Коначно, акумулација Бијела ријека на истоименој ријеци и њеној притоци Пресјеници која је, како је наведено, планирана првенствено ради потреба водоснабдијевања Сарајева и Источног Сарајева, има највеће шансе да као пројекат заживи, али и ту су бројна неријешена питања. Да би се о њима дискутовало на бази конкретних чињеница, потребно је прије тога рећи нешто више о водним ресурсима града (и Кантона) Сарајево и његовим потребама за водоснабдијевањем.

Водни ресурси Кантона Сарајево

Градско језгро Сарајева је смјештено унутар сарајевске котлине коју чине долина Миљацке на истоку и Сарајевско поље на западу. Дефицит масе узрокован тоњењем терена на југозападу поља, дуж бусовачког расједа¹², компензован је снажним седиментационим процесима захваљујући ријекама које су таложиле материјал еродирани у горњем и средњем току. На тај начин створен је слој алувијалних седимената интергрануларне порозности (шљунка и пијеска), дебљине до 100 м, који представља један од најважнијих колектора (аквифера) подземне воде у БиХ. У том правцу су се слијевале површинске и подземне воде са три стране: запада, југа и истока. Са југа су то (већ поменуте) ријеке које теку са планинског обода (Миљацка, Жељезница, Добриња, Касиндолка) са територије града Источног Сарајева.

У кречњачким масама обода сарајевске котлине формиране су обимне акумулације подземних вода изразито карстног типа, чија је ретензиона способност веома велика. Највећи дио акумулиран је у зонама јаче тектонске изломљености. Прихрањивање пукотинске издани у кречњачким теренима врши се директно преко падавина, док се пражњење јавља као подземни ток према врелима планинског обода. Варијације у издашности сталних извора су ($Q_{\max}/Q_{\min}$) од 1:5 до 1:12.

Од врела, најзначајнија су она на западу сарајевске котлине, на контакту са масивом Игмана и Бјелашнице, који се највећим дијелом дренирају ка Сарајевском пољу. Укупна површина овог хидрогеолошког колектора износи око 100 км². Дренирање се врши са преко пет група извора од којих 30 има сталну водоиздашност и више периодичних извора. Укупна водоиздашност врела износи 65 м³/с, а свакако највеће је врело Босне, једно од најиздашнијих врела шире регије, са средњом издашношћу од око 5 м³/с (Ђуг и др. 2008: 69), и распоном издашности од 1,27–25 м³/с. Остала већа врела су: Крупачко ($Q=30\text{--}200$ л/с), Храсничко ($Q_{\min}=60$ л/с), Семизов бунар (врело) ($Q_{\min}=50\text{--}60$ л/с), врело Стојчевац ($Q_{\min}=20$ л/с), Тулек ($Q=15\text{--}20$ л/с) и др. (Скопљак 2006: 12–13). Од повремених, чија издашност може достићи и $Q=1,0$ м³/с, највећа врела су: Мегаре, Страгаче, Буница, Грабoљек, Вреоца и др. Претпоставља се да се код ових врела кречњачко-доломитска маса налази на мањој дубини, односно ближе површини терена, па воде из ње, под већим притиском, избијају на површину, разлијевајући при том дио воде у пијесак и шљунак. Према сјеверу ријека Босна је пробила клисуру одводњавајући воде шире околине сарајевске регије.

¹² Једна од најзначајнијих расједних линија шире регије, дуга око 100 км, а дубока више од 1.000 м. Дуж овог расједа дио карбонатне масе Игмана спуштен је за неколико стотина метара, па је врело Босне дошло у зону расједне површине, изнад кварталног покривача.

Ријека Жељезница има велики значај у прихрањивању лежишта подземних вода „Соколовићи“, оформљеног у алувијуму југозападног дијела Сарајевског поља. Просјечна годишња инфилтрација воде из Жељезнице у акумулацију Сарајевског поља, на потезу Крупац – Илица износила је око 700 l/s¹³ (Скопљак 2006: 20–21).

Водоводни систем Сарајева данас покрива око 358.000 становника (Развојни пројекти, 2008: 5), а потребе града за водом крећу се око 3000 l/s. Као главни ресурс користи се подземна акумулација Сарајевско поље (Бачево, Соколовићи, Ступ), одакле се обезбјеђује око 87% укупних количина воде.¹⁴ Одржива издашност бунара износи 700 l/s, остала врела обезбјеђују систему 410 l/s, а водозхвати на ријекама Мошћаници и Вогошћи још 200 l/s тако да укупна одржива издашност износи око 1.300 l/s. Тренутно се из бунара Сарајевског поља црпи око 2.600 l/s, што скоро четири пута премашује капацитет подземних вода. Један дио се надокнађује вјештачким прихрањивањем подземне акумулације али то свакако није дугорочно одрживо рјешење па се приступило трагању нових извора водоснабдијевања. Према Мастер плану дугорочног водоснабдијевања Кантона Сарајево додатне количине се планирају обезбиједити захватањем нових 200 l/s из ријеке Босне¹⁵ (2 км низводно од врела) као прелазно рјешење, и изградњом акумулације Црна ријека у сливу Жељезнице (јужно до града), која би давала 1500 l/s, што би било довољно за подмиривање свих потреба.

Осим пројекта Црна ријека, анализирана су још два рјешења за евентуалне акумулације: на Бијелој ријеци (такође слив Жељезнице) и Мисочи, али је процијењено да су мање конкурентни у односу на Црну ријеку.

Развојни планови водоснабдијевања: акумулације Бијела и Црна ријека

Према просторном плану Источног Сарајева до 2015. године на подручју града планиране су четири акумулације, док су у *Мастер плану водоснабдијевања Кантона Сарајево* разматране три. Од седам акумулација, четири се налазе у сливу Жељезнице, па се с правом водни ресурси овог слива сматрају као посебно значајни. Полазећи од фактора који чине водни ресурс употребљивим (локација, количина, квалитет и постојање услова за коришћење), воде слива ријеке Жељезнице имају најоптималније услове за експлоатацију. Локација евентуалних акумулација је повољна, имајући у виду близину оба града, подручје је слабо насељено, а количина и квалитет воде задовољавајући. Узимајући у обзир све наведене факторе и природне

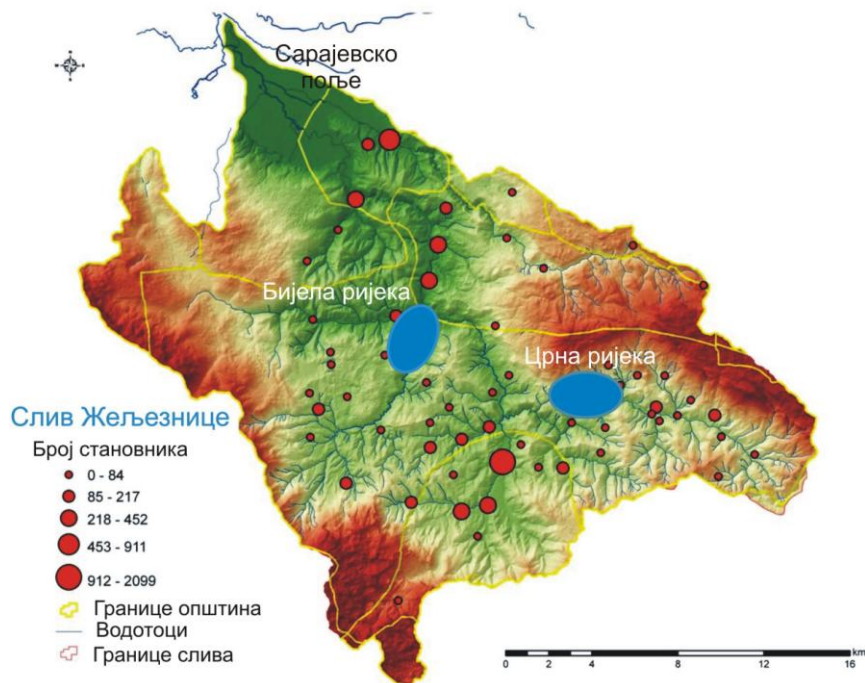
¹³ Истраживања обављена у периоду 1984–87. год.

¹⁴ Остали дио отпада на планинска врела (9–13%) и површинске токове (до 4%).

¹⁵ Уз већ постојећи водозахват од 400 l/s, то би укупно износило 600 l/s, што је горњи лимит ради осигурања биолошког минимума у водотоку и одржања еколошких услова средине.

предиспозиције терена, намећу се два локалитета за изградњу акумулација: подручје око ушћа Бијеле ријеке у Жељезницу и слив Црне ријеке, десне притоке Жељезнице.

Карта 1: Слив ријеке Жељезнице са локацијама евентуалних акумулација



Планиране водне акумулације Бијела и Црна ријека спадају у ред акумулација средње величине, са запреминама од 58,8 милиона m^3 (или 1,3 m^3/s , Бијела ријека) и 65,5 милиона m^3 (или 1,5 m^3/s , Црна ријека) (*Мастер план* 2000: 23–24).

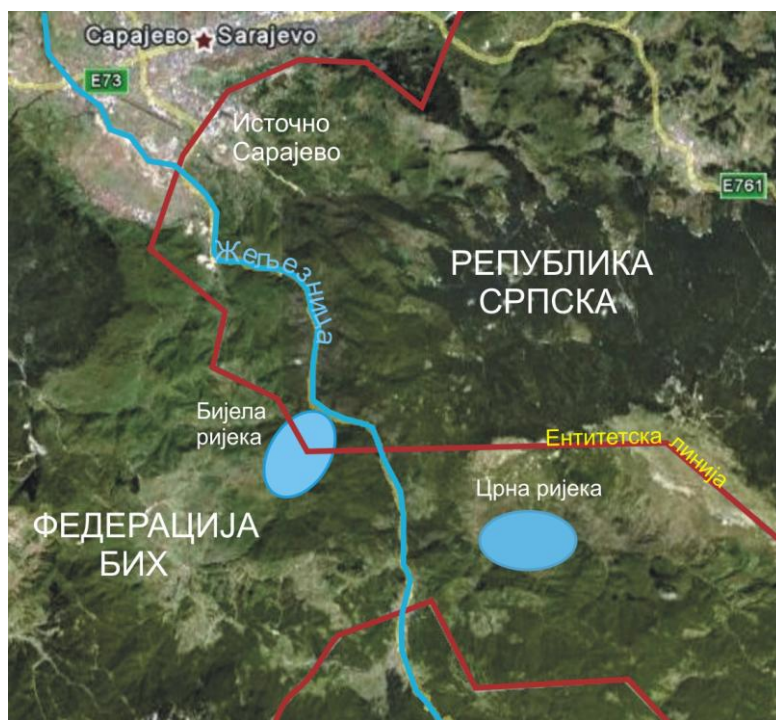
Бијела ријека (са Пресјеницом) сакупља воде мањих водотока са подручја општине Трново. Највећа је лијева притока Жељезнице, са површином слива од око 110 km^2 а улијева се у њу код села Доња Пресјеница на коти 600 m надморске висине. Она представља ободни колектор за воде са огранака Трескавице, Бјелашнице и Игмана. Средњи протицај (према подацима ФХМЗ, за период 1960–1991) на водомјерној станици Богатићи износи $Q_{sr}=2,56 \text{ m}^3/\text{s}$ а средњи минимални $srQ_{min}=0,541 \text{ m}^3/\text{s}$.

Црна ријека сакупља воде неколико потока који се слијевају низ јужне падине Јахорине. Површином слива износи око 90 km^2 и највећа је десна притока Жељезнице (са Касиндолком). У горњем дијелу тока пролази кроз села Црну ријеку и Делијаше, а у Жељезницу се улијева код Лелетин Хана, на коти 800 m надморске висине. Средњи протицај на ВС Подтељиг (такође за период 1960–1991) износи $Q_{sr}=2,15 \text{ m}^3/\text{s}$, а средњи минимални

$srQ_{min}=0,362 \text{ m}^3/\text{s}$. Још 1963. године разматрана је градња акумулације на Црној ријеци, а у периоду између 1965–1968. вршена су и прва истраживања, бушења, геосеизмичко профилисање, геолошко картирање и др.

Према просторном плану Источног Сарајева, водна акумулација Бијела ријека ће представљати, заједно са акумулацијом Црна ријека, нови извор водоснабдијевања града Сарајева, а дио воде из овог водоводног система може се искористити за потребе водоснабдијевања Источног Сарајева (Источна Илиџа, Источно Ново Сарајево). С друге стране, *Мастер план Кантона Сарајево* одбацује пројекат Бијела ријека из политичких разлога: „Локација бране у Републици Српској чини овај пројекат неприхватљивим, због чега ова опција није даље разматрана“.

Слика 1: Положај акумулација у односу на ентитетску границу и градове Сарајево и Источно Сарајево (Снимак у подлози: <http://maps.google.com>)



С обзиром да су потребе Кантона Сарајево за водоснабдијевањем много ургентније, то је пројекат Црна ријека ближи реализацији. Предложене су три евентуалне опције кориштења акумулације:

- Транспорт воде гравитационим системом до градске мреже, са локацијом објекта за третман воде испод бране Црна Ријека;

- Вода се испушта из акумулације и транспортује природним коритом ријеке Жељезнице до Сарајевског поља, гдје се захвата, кондиционира и пумпа у систем;
- Вода се испушта из акумулације и транспортује природним коритом до Сарајевског поља, а затим инфилтрира у подземље помоћу инфилтрационих базена, те преко постојећих бунара пумпа у систем.

Трећа опција је према *Мастер плану* најприхватљивија (и најјефтинија), али је ипак прије реализације неопходно урадити одређена истраживања кроз пилот пројекат да би потврдила одрживост рјешења. Прва два приједлога се ослањају на провјерену технологију у пракси, док је за трећи приједлог упитан капацитет подземних водозахвата и квалитет инфилтриране воде.

Закључак

Један од основних циљева израде стратешких докумената развоја јесте утврђивање смјерница за управљање природним ресурсима, међу којима најважније мјесто заузимају водни ресурси. Територија града Источног Сарајева прима знатне количине падавина (око 1000 mm/god), које дијелом отичу површински (Паљанска и Мокрањска Миљацка, Жељезница, Тилава, Касиндолка и др.), дијелом пониру у кречњачку масу. Вертикална подземна циркулација условљава формирање пукотинске воде која се дренажира на нижим надморским висинама, преко бројних крашких врела. Најиздашнија врела су каптирана и представљају основу водоводног система града. Ријечни токови са територије Источног Сарајева одводњавају се углавном према Сарајевском пољу, улијевајући се у ријеку Босну.

Један од основних постулата кориштења вода је управљање по сливовима, без обзира на административне границе. Међутим, чест је случај да различити политички интереси промовишу другачије принципе, те се бирају рјешења која су „подобна“ иако су понекад мање квалитетна. Примјер таквог приступа је тражење локације за изградњу водне акумулације која ће елиминисати дефицит воде у систему водоснабдијевања Кантона Сарајево. Планирана је акумулација Црна ријека (десна притока Жељезнице) 20-ак км јужно од сарајевске котлине, док је локација Бијела ријека одбачена, јер припада Републици Српској. Међутим, Просторни план града Источног Сарајева до 2015. предвиђа изградњу акумулације Бијела ријека (лијева притока Жељезнице, 10-ак км удаљена од сарајевске котлине) и још једне, низводно од поменуте двије, Кијево на Жељезници. Намеће се питање како је могуће избјећи сарадњу на подручју гдје ентитетска линија на више мјеста пресијеца сливно подручје. Поред тога, нема економске оправданости изградње двије или три акумулације на малом растојању, па су планови о развоју два сусједна града у овом сегменту потпуно неусклађени.

Литература

- Драшковић, Марковић 2008: Б. Драшковић, С. Марковић, *Специфичности крашких врела Источног Сарајева*, Пале: Радови Филозофског факултета бр. 10/2, 285–302.
- Дукић 2006: Д. Дукић и Љ Гавриловић, *Хидрологија*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Ђуг и други 2008: S. Đug i dr., *Prirodna baština Kantona Sarajevo*, Sarajevo: Kantonalni zavod za zaštitu kulturno-historijskog naslijeđa.
- ГИББ/КЦИЦ ЕЕ КОНЗОРЦИЈУМ 2000: GIBB/KCIC CONSORTIUM, *Dugoročno rješavanje vodosnabdjevanja, odvodnje i tretmana otpadnih voda u Kantonu Sarajevo – Master plan*, Sarajevo, Vodovod i kanalizacija Kantona Sarajevo.
- Јовановић 1972: R. Jovanović, *Neke geološke, hidrogeološke i inženjerskogeološke odlike terena uže okoline Sarajeva*, II Jugoslovenski simpozijum o hidrologiji, hidrogeologiji i inženjerskoj geologiji.
- Ковачина, Лончаревић 2003: S. Kovačina, M. Lončarević, *Dugoročni plan vodosnabdjevanja Kantona Sarajevo – vrijeme za odluke*, VODA I MI, br. 35, Sarajevo: Javno preduzeće za „Vodno područje slivova rijeke Save“.
- Подаци Федералног хидрометеоролошког завода за протицај ријека за период 1960–1991.
- Републичка дирекција за воде 2006: *Оквирни план развоја водопривреде Републике Српске*, Бијељина: Министарство шумарства, пољопривреде и водопривреде.
- Сателитски снимак сарајевске регије: <<http://maps.google.com/>> 01. 05. 2010.
- Скопљак 2006: F. Skopljak, *Odnosi podzemnih voda područja Ilidže kod Sarajeva*, Sarajevo: geološki glasnik.
- Урбанистички завод Републике Српске 2008: *Просторни план града Источно Сарајево до 2015. године*, Бања Лука.
- Водовод и канализација Сарајево 2008: *Vodovod i kanalizacija Sarajevo, Razvojni projekti u oblasti vodosnabdjevanja, odvođenja i tretmana otpadnih voda u Kantonu Sarajevo*. <http://www.viksa.ba/Document/Razvojni_projekti_2008.pdf>01.04. 2010.

ВАСПИТНИ ЗАДАЦИ НАСТАВЕ ГЕОГРАФИЈЕ У КОНТЕКСТУ ДРУШТВЕНО-ПОЛИТИЧКИХ ПРОМЈЕНА У РС/БИХ

Настава уопште, па тако и настава географије је одувијек била одређена карактером друштвеног система у коме се одвијала. Образовни и васпитни циљеви и задаци који су били остваривани кроз наставу географије увијек су одговарали потребама друштва и били су у складу са његовим идејним концепцијама. Т. Продановић и Р. Ничковић (1980: 65) наводе да: „настава, као симултани васпитнообразовни процес, стално припада конкретної друштвеној средини и то као један од елемената неопходности друштвене егзистенције и еволуције. Настава је увек била и остаје првенствено друштвена категорија. Сви покушаји њене еманципације и изолације од друштва били су у својој суштини израз негације њених основних обележја“. Када говори о идејноваспитном утицају наставе географије Н. Мاستило (1984 :29) каже: „Васпитање и образовање и настава као њихова институционализована форма – одувијек су друштвено-историјски условљени. Друштвено-историјска условљеност и одређеност васпитно-образовног процеса долази до изражаја и у конципирању и у задацима свакога наставног предмета, посебно оних наставних предмета чија природа садржаја пружа веће могућности идејноваспитног утицаја и усмјеревања младих људи, а тиме, посредно, афирмације друштвене идеологије и праксе. Такав третман је имала, и данас га има, и географија, као научно-наставна дисциплина“.

Ратна дешавања на простору Босне и Херцеговине у периоду од 1992. до 1995. године довела су до великих друштвених, прије свега политичких промјена, што је директно утицало на васпитно-образовни систем. Период прије ових ратних дешавања је период социјалистичког самоуправљања којег карактерише васпитавање у духу социјалистичког морала. Основну школу у овом периоду карактерише занемаривање васпитне функције. Љ. Крнега (1981: 148) за овај период наводи: „Занемаривање васпитне функције основне школе довело је у пракси до осиромашења и сужавања усвојене васпитно-образовне концепције ове школе, до запостављања задатака социјализације и хуманизације у оквирима васпитног процеса и до фаворизовања интелектуализма и позитивизма који је завршио у комплетној преоптерећености ученика и наставника“. Послије ратних дешавања Босна и Херцеговина улази у процес транзиције који је довео до различи-

* grmusa@bih.net.ba

тих утицаја на васпитно-образовни процес. Данашњи услови тржишне привреде и европских интеграција, утицај научних достигнућа и информацијских технологија и други процеси, као што је процес глобализације, имају велики утицај на наш васпитно-образовни систем.

Идејноваспитни утицај на младе људе је присутан у цјелокупном образовно-васпитном систему, али је од највећег значаја на нивоу основне школе. Н. Поткоњак наводи колико је значајан узраст ученика од 7 до 15 година, односно узраст у коме се налазе ученици основне школе, са аспекта васпитног дјеловања. Он наводи да је тај узраст динамичан, буран и у много чему пресудан (заједно са предшколским узрастом) на развитак личности ученика. То је период у коме се испољавају и развијају и опште и многе посебне диспозиције, интересовања, мотиви, навике и умјећа, када се личност оспособљава за рад и живот у заједници (Поткоњак 1977: 71).

Због специфичности одређених наставних садржаја, као што су садржаји из друштвене и националне географије, у смислу огромног васпитног значаја, географија као наставно-научна дисциплина је увијек имала посебан статус у васпитно-образовном систему заједно са матерњим језиком и историјом.

Задатке наставе географије можемо подијелити на образовне (материјалне, информативне), васпитне и функционалне (формалне) мада су они сви међусобно повезани и веома тешко се могу разлучити једни од других. Васпитни задаци су често запостављени у односу на образовне и функционалне, али њихов значај није нимало мањи.

Географски наставни садржаји имају велики васпитни значај и могу да утичу на различите видове васпитања, као што су интелектуално, морално, естетско, политехничко, физичко, здравствено, радно васпитање и сл. У новије вријеме од великог значаја су географски садржаји који утичу на еколошко васпитање и заштиту човјекове средине.

Морално васпитање и настава географије

Када говоримо о моралном васпитању, географија као наставни предмет је вишеструко значајна. Код развоја неких особина код личности као што је патриотизам, хуманизам, солидарност и интернационализам, не може се поредити ни са једним другим школским предметом.

Т. Продановић и Р. Ничковић (1980: 66) наводе: „Настава је утолико друштвено вреднија уколико више развија друштвене вредности, а то се постиже, пре свега, њеном систематском оријентацијом према друштвеним вредностима истакнутим у циљу и задацима васпитања и образовања и њиховој трансформацији у наставни процес“. У новије вријеме у школама се све више занемарује морално васпитање. Према М. Недељковићу слабости у васпитном раду школе, посебно у домену моралног васпитања, дјелимично су и посљедица неповољних утицаја из социјалног окружења. Он каже: „Под видом ‘новог’ и ‘реформног’ оформљују се гледишта да је сфера мо-

ралног васпитања, тј. изграђивања ставова, мишљења, убеђења, личних моралних квалитета човека, приватна ствар појединца. Оспорава се право моралног утицаја на ученике, право указивања на моралне заблуде и недоумице, право на васпитање. Губи се из вида да је развој личности резултат многобројних друштвених и личних утицаја на личност као стетиште свих тих утицаја, али и исходиште властите личне активности“ (Недељковић 1997: 187).

Настава географије још утиче на морално васпитање тако што добро географско познавање земље у којој се живи води ка развијању осјећаја патриотизма, док боље познавање завичаја развија љубав према њему. Ж. Јовичић наводи да је љубав према домовини не само гаранција њеног слободног развоја већ и стално присутан елемент тог развоја. Он сматра да је географија најпозванија да дефинише појам домовине у просторним, економским и политичким размјерама. Развијајући осјећање патриотизма и интернационализма, настава географије је позвана да сузбија национализам, шовинизам, расизам и сличне дефекте у моралном васпитању. По правилу, национализам и шовинизам нису карактеристични за школски узраст, али се касније лакше јављају тамо гдје у довољној мјери нису била развијена осјећања хуманизма, солидарности и интернационализма (Јовичић 1971: 24).

Изучавање других држава и народа у Европи и у свијету, упознавање са њиховим проблемима доводи до развоја хуманизма (саосјећање са гладним у свијету, настрадалим у рату и природним катастрофама и сл.) и солидарности према тим народима.

Еколошко васпитање и настава географије

Настава географије битно утиче на еколошки морал код ученика, на подизање еколошке свијести и заштиту животне средине. Можемо рећи да је школа као васпитно-образовна институција незамјењива у изграђивању еколошке свијести код ученика. Према М. Кундачини (1998: 59–60) задаци еколошког васпитања и образовања су:

1. развијање способности перцепције животне средине,
2. усвајање система еколошких знања,
3. изграђивање вриједносног еколошког система,
4. формирање еколошких навика,
5. овладавање еколошком културом.

Еколошко васпитање и заштита човјекове средине спадају у један од значајнијих васпитних задатака наставе географије. У складу са наведеним задацима, велики дио географских наставних садржаја у основној и средњој школи утиче на усвајање еколошких знања, а нарочито на развијање способности перцепције животне средине, изграђивање еколошке свијести, еколошких навика и културе. Захваљујући способностима које ученици стичу у процесу наставе географије, као што су географски начин ми-

шљења, способност уочавања веза и законитости између природних и друштвених чинилаца и способност непосредног посматрања животне средине, ученици могу да критички посматрају животну средину, оцјењују њен степен загађености у односу на друге области, уочавају основне природне процесе у географском омотачу, противрјечности између природе и друштва и друге проблеме везане за загађеност животне средине.

Интелектуално васпитање и настава географије

Сваки наставни предмет различито утиче на интелектуално васпитање личности. Оно што је специфичност у настави географије, а што битно утиче на интелектуални развој код ученика, јесте могућност запажања и географског посматрања, које је карактеристично по томе што се одвија непосредно и у отвореном простору.

Помоћу географског опажања се развија специфично географско мишљење а све то води ка формирању једног посебног начина размишљања – географског размишљања. Географско мишљење се одликује способношћу уочавања веза и законитости између објеката и појава које се посматрају и проучавају. Треба споменути да као посљедица читавог овог мисаоног процеса долази и до развоја памћења и маште, као двије веома важне психичке функције.

Естетско, физичко и политехничко васпитање и настава географије

Географија као наставни предмет има своју улогу у естетском и физичком васпитању ученика. Она далеко више него природне науке (нпр. физика и хемија) утиче на естетско формирање личности.

Ж. Јовичић наводи да се природа сматра као једно од најзначајнијих средстава естетског васпитања, а захваљујући настави географије може да се развије способност уочавања, процјењивања и доживљавања естетских вриједности. То се најбоље постиже путем екскурзија и излета у природу, а може и путем наставних средстава као што су фотографије, филмови и сл. Поред природних објеката, естетске садржаје могу да чине и разни архитектонско-грађевински објекти. Јовичић наводи као естетске садржаје: хидроцентралне, мостове, булеваре и тргове, аеродроме, паркове уређене ријечне обале и сл. (Јовичић 1971:25).

Настава географије утиче и на физичко васпитање јер се код ученика путем екскурзија и излета стварају навике кретања у природи као што су нпр. планинарење, спелеотуризам и сл. Такође, настава географије утиче и на политехничко васпитање ученика, али у знатно мањој мјери него неки други предмети као нпр. физика или хемија. Значај наставе географије, у овом погледу, је у стицању способности оријентације у простору, способности читања топографских карата, овладавање руковањем неким инстру-

ментима и сл. Путем екскурзија и излета посјећују се фабрике, електране, рудници и други објекти тако да се ученици и на тај начин упознају са процесима производње у њима.

Настава географије и формирање ставова, увјерења и погледа на свијет

Географија као наставни предмет је специфична по томе што има свестрану улогу у формирању научног погледа на свијет. Географски наставни садржаји омогућавају васпитно дјеловање на стварању ставова, увјерења и погледа на свијет код ученика као што су: филозофски, етички и естетски. Неки географски наставни садржаји омогућавају да ученици стекну политички став и активан однос према политичким догађајима, па тако можемо говорити и о политичком васпитању у настави географије. Политичко васпитање у настави географије је углавном заступљено у оквиру средње школе, нарочито путем садржаја из опште економске географије и регионалне економске географије. Тако нпр. кроз неке географске садржаје ученици могу да стекну одређена знања о Европској унији и европским интеграцијама и да формирају одређене политичке ставове у односу на њих.

Успјешан васпитни рад у настави географије у великој мјери зависи од наставника и од његових способности. Поред моралних квалитета савременог наставника мора бити и педагошки оспособљен и имати висок степен педагошке културе¹.

Географија као наука свијет тумачи материјалистички. Географија као научно-наставна дисциплина је по својој природи таква да омогућава да ученици стекну научни, материјалистички и рационални поглед на свијет.

Материјалистички поглед на свијет:

- да је свијет материјалне природе,
- да свијет објективно постоји,
- да се развија према законима кретања материје,
- да свијет представља јединствену цјелину.

Као примјер можемо навести неке географске садржаје који поткрепљују ову филозофију: садржаји из опште физичке географије, многе физичко-географске појаве и процеси на Земљи (постанак рељефа, процеси ерозије и акумулације, кружање воде у природи, кретање ваздушних маса и сл.). Када говоримо о друштвеној географији такође можемо говорити о за-

¹ М. Недељковић о педагошкој култури каже: „Педагошка култура је својеврстан образац учешћа наставника и ученика у процесу васпитања и образовања, али на начин који максимално омогућава испољавање способности, даровитости, свеколиког стваралаштва ученика и наставника, а има за циљ пун развој ученика у свему у складу са њиховим потенцијалним могућностима“ (Недељковић, 1997: 178).

конима а то су друштвени закони кретања материје који су сложенији од природних.

Географија полази од дијалектичког метода чији су принципи:

- принцип каузалности (повезаност физичко-географских и друштвено- географских елемената);
- јединство материје и кретања;
- развојност (све се мијења и креће, настаје и нестаје нпр. рељеф);
- прелаз квантитета у квалитет (нпр. настајање ледничких језера);
- принцип тоталитета (дијелови неке цјелине се могу разумјети само у склопу те цјелине);
- принцип нужности и случајности (законитост се јавља као тенденција);
- јединство супротности као покретач развоја (нпр. дјеловање ендеогених и егзогених сила);
- садржај и форма (сваки предмет и појава морају да имају садржај и форму);
- негација негације (у борби супротности настају нови облици, нови садржаји).

Закључак

Поред тога што имају велики образовни, географски наставни садржаји имају и велики васпитни значај. Нажалост, честа је појава да се васпитним задацима у нашем васпитно-образовном систему поклања мање пажње него образовним, иако њихов значај није мањи. Географија као наставно-научна дисциплина је специфична по томе што њени наставни садржаји имају вишеструк васпитни утицај. Наиме, они утичу на морално, интелектуално, естетско, политехничко, физичко и здравствено васпитање. Посебно можемо издвојити данас веома актуелно и важно еколошко васпитање, гдје се утиче на подизање еколошке свијести код ученика. Географија, као ријетко који наставни предмет, утиче на развијање осјећања хуманости, солидарности са другим народима, интернационализма и патриотизма. Она развија љубав према природи и природним љепотама и подстиче физичке активности као што су планинарење, шетње у природи и сл. Настава географије, својим појединим наставним садржајима, утиче и на политичко васпитање, односно на формирање политичких ставова и активног односа према политичким догађајима код ученика. И на крају, поред стицања филозофских, етичких и естетских ставова и увјерења, кроз наставу географије се стиче један јединствен научни поглед на свијет. Тренутна позиција географије као наставно-научне дисциплине у Републици Српској и Босни и Херцеговини није задовољавајућа. Међутим, због свега наведеног и због велике васпитне улоге, географија као наставно-научна дисциплина требало би да има посебан статус у нашем васпитно-образовном систему.

Литература

- Јовичић 1971: *Ž. Jovičić, Metodika nastave geografije*, Београд: Научна књига.
- Крнета 1981: *LJ. Krneta, Škola na putevima progressa*, Сарајево: Svjetlost, Zавод за udžbenike i nastavna sredstva.
- Кундачина 1998: *М. Кундачина, Чиниоци еколошког васпитања и образовања ученика*, Ужице: Учитељски факултет.
- Мастило 1984: *N. Mastilo, Prilozi didaktici i metodici nastave geografije*, Сарајево: *Nastavna biblioteka*, 106, Svjetlost, 29.
- Недељковић 1997: *М. Недељковић, Време промена и образовање*, Јагодина: Учитељски факултет.
- Поткоњак, 1977: *Н. Поткоњак, Од етатистичке ка самоуправној социјалистичкој основној школи*, Београд: Институт за педагошка истраживања и Просвета.
- Продановић, Ничковић 1980: *Т. Продановић, Р. Ничковић, Дидактика*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Секција за математику и рачунарство

Видан Говедарица*
Универзитет у Источном Сарајеву
Електротехнички факултет
Валентина Коњокрад
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за математику и рачунарство

Оригинални научни рад

НИЗ ЦИКЛИЧНИХ ПОЛИНОМА И ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

1. Нека је n фиксиран природан број. Функција f_n дефинисана за позитивне a, b, c формулом

$$f_n(a, b, c) = \frac{a^n}{b} + \frac{b^n}{c} + \frac{c^n}{a},$$

инваријантна је у односу на цикличне пермутације аргумената a, b, c . Због тога се пермутацијама аргумената a, b, c може добити само још једна различита вриједност

Посматраћемо разлику $f_n(a, b, c) - f_n(a, c, b)$. За $n=1$ лако добијамо да је

$$(1) \quad f_1(a, b, c) - f_1(a, c, b) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc},$$

одакле слиједи да је разлика $f_1(a, b, c) - f_1(a, c, b)$ неограничена (и са доње и са горње стране), чак и у случају да су a, b, c ограничени. То добијамо једноставно ако у (1) ставимо $a = \varepsilon$, $b = 1$, $c = 2$ и пустимо да $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Аналогно добијамо да је разлика $f_n(a, b, c) - f_n(a, c, b)$ неограничена и за $n > 1$.

Међутим, ако су a, b, c дужине страница троугла у [1] је показано да је

$$(2) \quad |f_1(a, b, c) - f_1(a, c, b)| < 1.$$

То слиједи из (1) на основу неједнакости $|a-b| < c$, $|b-c| < a$ и $|c-a| < b$. При томе је константа 1 најбоља могућа, јер за $a=1$, $b=1-\varepsilon$, $c=2\varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{2}{3}\right)$ добијамо да десна страна у (1) тежи 1 кад $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

* vidangov@yahoo.com

У даљем тексту ћемо подразумевати да су a, b, c дужине страница неког троугла.

За $n = 2$ је

$$(3) \quad f_2(a, b, c) - f_2(a, c, b) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} (a+b+c),$$

одакле слиједи да је

$$(4) \quad |f_2(a, b, c) - f_2(a, c, b)| < a + b + c.$$

Случај $n = 3$ је у блиској вези са сљедећим задатком са Математичке олимпијаде Босне и Херцеговине 2010. године.

Задатак. Нека су a, b, c дужине страница троугла чији обим није већи од 2. Доказати да је

$$\left| \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - \frac{a^3}{c} - \frac{c^3}{b} - \frac{b^3}{a} \right| < 3.$$

Рјешење. Растављањем на чиниоце добијамо да је

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - \frac{a^3}{c} - \frac{c^3}{b} - \frac{b^3}{a} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca).$$

Како је $|a-b| < c, |b-c| < a$ и $|c-a| < b$, слиједи да је

$$\left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \right| < 1$$

па је довољно доказати неједнакост

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca < \frac{3}{4} (a+b+c)^2.$$

Посљедња неједнакост је еквивалентна са $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$ и важи, јер се добија сабирањем неједнакости $(a-b)^2 < c^2, (b-c)^2 < a^2, (c-a)^2 < b^2$. $\square$

Разматрајмо сада општи случај. Нека је

$$R_n(a, b, c) = f_n(a, b, c) - f_n(a, c, b) = \frac{a^n}{b} + \frac{b^n}{c} + \frac{c^n}{a} - \frac{a^n}{c} - \frac{c^n}{b} - \frac{b^n}{a}.$$

Имамо да је

$$R_n(a, b, c) = -\frac{P_{n+2}(a, b, c)}{abc},$$

гдје је $P_{n+2}(a, b, c) = ab(a^n - b^n) + bc(b^n - c^n) + ca(c^n - a^n)$.

Овај низ полинома је цикличан, пошто очито важе једнакости

$$P_n(a, b, c) = P_n(b, c, a) = P_n(c, a, b), \text{ док је } P_n(a, c, b) = -P_n(a, b, c).$$

Како се полином P_{n+2} може представити у облику

$$(5) \quad P_{n+2}(a, b, c) = (b-c)a^{n+1} + (c-a)b^{n+1} + (a-b)c^{n+1},$$

одавде слиједи да низ полинома (P_n) задовољава хомогену линеарну рекурентну формулу трећег реда чија је карактеристична једначина $(t-a)(t-b)(t-c)=0$, тј.

$$t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc = 0.$$

Дакле, за $n \geq 2$ важи

$$(6) \quad P_{n+3}(a, b, c) = (a+b+c)P_{n+2} - (ab+bc+ca)P_{n+1} + abcP_n$$

што значи да је низ $(P_n(a, b, c))$ једнозначно одређен рекурентном формулом (6) и почетним вриједностима P_2, P_3 и P_4 , за које лако добијамо да су

$$P_2(a, b, c) = 0, \quad P_3(a, b, c) = (a-b)(a-c)(b-c),$$

$$P_4(a, b, c) = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

Како је полином $P_{n+2}(a, b, c)$ једнак нули ако су било које двије од промјенљивих a, b, c међусобно једнаке, слиједи да је

$$(7) \quad P_{n+2}(a, b, c) = (a-b)(a-c)(b-c)Q_{n-1}(a, b, c), \text{ тј.}$$

$$(8) \quad R_n(a, b, c) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} Q_{n-1}(a, b, c),$$

гдје је Q_{n-1} полином степена $n-1$. Замјењујући (7) у (6) добијамо да низ Q_n задовољава исту рекурентну формулу, тј. важи

$$(9) \quad Q_{n+3}(a, b, c) = (a+b+c)Q_{n+2} - (ab+bc+ca)Q_{n+1} + abcQ_n.$$

Неколико првих чланова овог низа је

$$Q_0(a, b, c) = 1, \quad Q_1(a, b, c) = a+b+c,$$

$$Q_2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc,$$

$$Q_3(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

На основу (9) се индукцијом једноставно доказује слједеће тврђење.

Теорема 1. За свако $n \in N_0$ важи

$$(10) \quad Q_n(a, b, c) = \sum_{i+j+k=n} a^i b^j c^k$$

гдје се сумирање врши по свим ненегативним цјелобројним рјешењима једначине $i+j+k=n$.

Имајући у виду неједнакости (2) и (4) ограничимо полином $Q_n(a, b, c)$ полиномом облика $c_n s^n$, гдје је $s = (a+b+c)/2$ полуобим тро-

угла и c_n најмањи такав број (који зависи само од n). У том циљу ћемо допустити и да троугао буде дегенерисан, тј. да уз услов $a \geq b \geq c$ може бити $a = b + c$ и $c = 0$. На основу Мјурхедове неједнакости је

$$Q_n(a, b, c) \leq Q_n(s, s, 0) = (n+1)s^n,$$

одакле слиједи да је $c_n \leq n+1$. Одавде, на основу (8) и (2), добијамо да је

$$(11) \quad |R_n(a, b, c)| < ns^{n-1}.$$

Посматрајући поново троугао са страницама $a=1$, $b=1-\varepsilon$, $c=2\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$) и пуштајући да $\varepsilon \rightarrow 0^+$ добијамо да лијева и десна страна у (11) теже ка n . Дакле најмањи такав број је $c_n = n+1$. Овим смо доказали следеће тврђење:

Теорема 2. Нека је n фиксиран природан број. Најмањи број c_{n-1} такав да неједнакост

$$|R_n(a, b, c)| < c_{n-1}s^{n-1},$$

важи за произвољан троугао чије су дужине страница a , b и c , а s полуобим, је $c_{n-1} = n$.

Могу се тражити и друге неједнакости међу изразима $f_n(a, b, c)$ и $f_n(a, c, b)$, ако су a , b , c дужине страница неког троугла. Позната је неједнакост из [2]

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + 3, \text{ тј.}$$

$$2f_1(a, b, c) \geq f_1(a, c, b) + 3$$

Да ли се и ова неједнакост може уопштити тако да важи и за $n > 1$?

2. Посматрајмо сада полиноме P и Q над прстеном цијелих бројева Z . Нека је p прост број већи од 3 и a , b , c цијели бројеви који нису дјелљиви са p . На основу мале Фермаове теореме је

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad c^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

па је

$$P_p(a, b, c) = (b-c)a^{p-1} + (c-a)b^{p-1} + (a-b)c^{p-1} \equiv (b-c) + (c-a) + (a-b) \pmod{p} = 0$$

Како је

$$P_p(a, b, c) = (a - b)(a - c)(b - c)Q_{p-3}(a, b, c),$$

одавде добијамо следеће тврђење:

Теорема 3. Нека је p прост број већи од 3 и a, b, c цијели бројеви који нису дјелјиви са p и који при дијелењу са p дају различите остатке. Тада $p \mid Q_{p-3}(a, b, c)$.

Литература

- Ермилов, Сендеров 1979: Ермилов, А. В., Сендеров, В. А., *Задача М559*, Научно-популярный физико-математический журнал Квант, 4, Москва.
- Курляндчик, Алексеев 1992: Курляндчик, Л. Д., Алексеев, Р., *Стороны треугольника*, Научно-популярный физико-математический журнал Квант, 3(9/10), 69–70.

ЈЕДНА КОНСТРУКЦИЈА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ РЕДА ШЕСНАЕСТ

1. Неке дефиниције и резултати

Структура инциденције је тројка $D = (V, B, I)$, где су V и B дис-јунктни скупови и $I \subseteq V \times B$. Елементи скупа V зову се *тачке*, елементи скупа B зову се *блокови*. Ако је A тачка скупа V онда скуп свих блокова који су инцидентни са тачком A означава се са (A) . Тако је:

$$(A) = \{b: b \in B, A I b\}.$$

Даље, за $A_1, A_2, \dots, A_n$, скуп свих блокова инцидентних са свим тачкама $A_1, A_2, \dots, A_n$ означава се са $(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Тако је

$$(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{b: b \in B, A_i I b \text{ for all } i \in N_n\},$$

где је N скуп свих позитивних целих бројева, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Дуално, за $b, b_1, b_2, \dots, b_n \in B$,

$$(b) = \{A: A \in V, A I b\},$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = \{A: A \in V, A I b \text{ for all } i \in N_n\}.$$

Ми ћемо разматрати структуре инциденције у којима су различити блокови инцидентни са различитим скуповима тачака. Сваки блок b се идентификује са скупом тачака (b) а релација инциденције идентификује се са обичном релацијом $\in$.

Дефиниција 1. Структура инциденције $P = (V, B, I)$ зове се *пројективна раван* ако и само ако испуњава следеће аксиоме:

(P. 1) Било које две различите тачке спојене су са тачно једном правом;

(P. 2) Било које две различите праве секу се тачно у једној тачки;

(P. 3) Постоји *четвороугао*, тј. 4 тачке од којих било које три нису на заједничкој правој.

Следећа теорема је доказана у [1].

Теорема 1. Нека је $P = (V, B, I)$ коначна пројективна раван. Постоји природни број n , зове се *ред равни* P , који испуњава:

$$a) |(A)| = |(g)| = n + 1 \quad \text{за све } A \in V \text{ и } g \in B;$$

$$b) |V| = |B| = n^2 + n + 1.$$

* alija.mandak@pr.ac.rs

Конечна пројективна равна реда n означава се са $S(2, n + 1, n^2 + n + 1)$.

2. Конструкција пројективне равни реда шеснаест

Теорема 2. Група Фробениуса G реда 36 делује на пројективну равна P реда шеснаест као група колинеација. Користећи ово деловање, равна P се може конструисати.

Доказ. Нека је:

$$G = \langle \rho, \alpha \mid \rho^{17} = \alpha^2 = 1, \rho^\alpha = \rho^{-1} \rangle.$$

Група Фробениуса реда 34 која делује на пројективну равна P реда 16 као група колинеација. Равна P има $16^2 + 16 + 1 = 273$ тачака и исто толико правих. Из $273 = 17 \cdot 16 + 1$ и из тврђења да колинеација $\langle \rho \rangle$ делује семирегуларно на нефиксним тачкама следи да $\langle \rho \rangle$ има 16 орбита тачака дужине 17 и једну орбиту дужине 1. Можемо узети да је:

$$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_{16})(2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_{16})(3_0, 3_1, 3_2, \dots, 3_{16}) \dots (16_0, 16_1, 16_2, \dots, 16_{16})$$

где су $1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_{16}, 2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_{16}, 3_0, 3_1, 3_2, \dots, 3_{16}, \dots, 16_0, 16_1, 16_2, \dots, 16_{16}$ све тачке равни P .

Из теореме о орбитама следи да $\langle \rho \rangle$ има исту структуру орбита правих. Можемо узети да је:

$$\rho = (\ell_\infty)(\ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \dots, \ell_1\rho^{16})(\ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \dots, \ell_2\rho^{16}) \\ (\ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \dots, \ell_3\rho^{16}) \dots (\ell_{16}, \ell_{16}\rho, \ell_{16}\rho^2, \dots, \ell_{16}\rho^{16})$$

где су:

$$\ell_\infty, \ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \dots, \ell_1\rho^{16}, \ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \dots, \ell_2\rho^{16}, \ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \dots, \\ \ell_3\rho^{16}, \dots, \ell_{16}, \ell_{16}\rho, \ell_{16}\rho^2, \dots, \ell_{16}\rho^{16}$$

све праве равни P .

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle \rho \rangle$. Можемо узети да је:

$$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \dots, 1_{16}\}.$$

Нека је ℓ_1 права која пролази кроз ∞ . Очигледно је да ℓ_1 садржи по једну тачку из сваке орбите тачака. Без губитка општости можемо узети да је:

$$\ell_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \dots, 16_0\}.$$

Осталих шеснаест правих орбите правих којој припада права ℓ_1 добијају се деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{16}$ на праву ℓ_1 . Праве

ℓ_1 и ℓ_∞ пролазе кроз 1_0 . Осталих петнаест правих $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{16}$ које пролазе кроз 1_0 леже у петнаест преосталих различитих $\langle \rho \rangle$ - орбита правих равни P . Ако се конструишу ове праве онда преостале све праве равни P се добијају деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{16}$ на праве $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{16}$. Из услова:

$$|\ell_i \cap \ell_1 \rho^k| = 1, i = 2, 3, \dots, 16, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 16$$

Следи да је:

$$\ell_i = \{1_0, 1'_1, 2'_2, 3'_3, \dots, 16'_{16}\},$$

где су $1', 2', 3', 4', \dots, 16'$ (необавезно различити) бројеви скупа $\{2, 3, \dots, 16\}$.

Сада испитујемо деловање колинеације α на скуп тачака и скуп правих равни P . Како је ред инволуције α паран следи да је инволуција α елација. Из $\rho^\alpha = \rho^{-1}$ следи да је 1_0 центар и права ℓ_1 оса инволуције α . Отуда, инволуција α фиксира 17 правих $\ell_\infty, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{16}$ и 17 тачака $\infty, 1_0, 2_0, 3_0, \dots, 16_0$. Из $273 = 2 \cdot 128 + 17$ следи да α има 17 орбита тачака дужине 1 (17 фиксних тачака) и 128 орбите тачака дужине 2. Ако орбитарну структуру колинеације α запишемо у скраћеном облику (записујући само индексе 0, 1, 2, 3, $\dots$, 16) можемо узети да је:

$$\alpha = (0)(1, 16)(2, 15)(3, 14)(4, 13)(5, 12)(6, 11)(7, 10)(8, 9),$$

где (1, 6) означава да је $1\alpha = 6$ из исте орбите тачака, (2, 15) означава да је $2\alpha = 15$ из исте орбите тачака, (3, 14) означава да је $3\alpha = 14$ из исте орбите тачака, $\dots$, (8, 9) означава да је $8\alpha = 9$ из исте орбите тачака. Из тврђења

$$\ell_i \alpha = \ell_i, i = 2, 3, \dots, 16$$

следи да су праве $\ell_i, i = 2, 3, \dots, 16$ типа

$$\ell_i = \{1_0, a_1, a_{16}, b_2, b_{15}, c_3, c_{14}, d_4, d_{13}, e_5, e_{12}, f_6, f_{11}, g_7, g_{10}, h_8, h_9\}$$

где су a, b, c, d, e, f, g, h према паровима различити бројеви скупа $\{2, 3, \dots, 16\}$. Можемо узети да је:

$$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 2_{16}, 3_2, 3_{15}, 4_3, 4_{14}, 5_4, 5_{13}, 6_5, 6_{12}, 7_6, 7_{11}, 9_8, 9_9\}.$$

Сада се конструишу праве $\ell_i, i = 3, 4, \dots, 16$ које су типа

$$\ell_i = \{1_0, a_1, a_{16}, b_2, b_{15}, c_3, c_{14}, d_4, d_{13}, e_5, e_{12}, f_6, f_{11}, g_7, g_{10}, h_8, h_9\}$$

Из тврђења

$$|\ell_i \cap \ell_2 \rho^k| = 1, i = 3, 4, \dots, 16, k = 0, 1, 2, \dots, 16$$

следи да су само два из бројева a, b, c, d, e, f, g, h из скупа $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а остала два су из скупа $\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Из тврђења:

$$|\ell_i \rho^s \cap \ell_j \rho^k| = 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 3, 4, \dots, 16, \quad k, s = 0, 1, 2, \dots, 16$$

Следи да праве ℓ_i и ℓ_j , $i \neq j$, имају тачно четири заједничка пара бројева a, b, c, d, e, f, g, h . Користећи ово тврђење за праве ℓ_i , $i = 3, 4, \dots, 16$ добија се следеће јединствено решење за ове праве:

$$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 3_{16}, 4_2, 4_{15}, 7_3, 7_{14}, 8_4, 8_{13}, 11_5, 11_{12}, 12_6, 12_{11}, 14_7, 14_{10}, 15_8, 15_9\}$$

$$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 4_{16}, 5_2, 5_{15}, 8_3, 8_{14}, 9_4, 9_{13}, 12_5, 12_{12}, 13_6, 13_{11}, 14_8, 14_9, 16_7, 16_{10}\}$$

$$\ell_5 = \{1_0, 3_3, 3_{14}, 5_1, 5_{16}, 7_4, 7_{13}, 9_2, 9_{15}, 11_7, 11_{10}, 13_8, 13_9, 15_6, 15_{11}, 16_5, 16_{12}\}$$

$$\ell_6 = \{1_0, 2_4, 2_{13}, 5_3, 5_{14}, 7_2, 7_{15}, 8_1, 8_{16}, 10_8, 10_9, 13_7, 13_{10}, 14_6, 14_{11}, 15_5, 15_{12}\}$$

$$\ell_7 = \{1_0, 2_5, 2_{12}, 3_6, 3_{11}, 8_8, 8_9, 9_7, 9_{10}, 10_1, 10_{16}, 11_2, 11_{15}, 14_3, 14_{14}, 16_4, 16_{13}\}$$

$$\ell_8 = \{1_0, 2_3, 2_{14}, 4_5, 4_{12}, 7_1, 7_{16}, 9_6, 9_{11}, 10_2, 10_{15}, 12_4, 12_{13}, 15_7, 15_{10}, 16_8, 16_9\}$$

.

.

$$\ell_{16} = \{1_0, 2_6, 2_{11}, 3_7, 3_{10}, 4_5, 4_{12}, 5_8, 5_9, 10_3, 10_{14}, 11_1, 11_{16}, 12_2, 12_{15}, 13_4, 13_{13}\}$$

Теорема је доказана.

Закључак

Овај рад презентује резултат добијен деловањем групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P за коју унапред знамо да постоји. Слично се може испитивати деловање групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P чије је питање егзистенције отворено.

Литература

- Бет и сар. 1985: Т., Jugnickel, et all., *Design theory*, Mannheim, Wien in Zurich.
- Димовски и Мандак 1992: D. Dimovski i A. Mandak, *Incidence structures with n -metrics*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, 6/1992. (-str. 151–155).
- Димовски, Мандак 1992: D. Dimovski i A. Mandak 1999: *Weighted block designs and Steiner systems*, Novi Sad: J. Math. Vol. 29, No.2 (str. 163–169).
- Ленз 1965: Н. Lenz, *Vorlesungen uber projective geometrije*, Leipzig: - Akademische Verlagsgesellschaft.
- Мандак 2007: А. Mandak, *Multiquasigroups and weighted projective planes*, Kragujevac: J. Math. 30/20007 (str. 211–219).
- Мандак 1994: А. Mandak, *On weighted block designs*, Priština: Proc. Math. Conf. (str. 21–25).
- Ушан 1989: J. Ušan, *$\langle Nn, E \rangle$ -seti s $(n + 1)$ -rastojaniem*, Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad: Ser. Math, 17, 2 (p. 65–87).
- Чупина и сар. 1980: G. Čupina i sar., *Multiquasigroups and some related structures*, Skopje: Prilozi MANU I/1.
- Чупина и сар. 1981: G. Čupina i sar., *On finite multiquasigroups*, Beograd: Publ. Inst. Math, 20, 43 (p. 53–59).

ЈЕДНА КЛАСА ПОЛИНОМА БЕЗ ЦЕЛОБРОЈНИХ НУЛА

У јулу 1995. године у *Математичким анализама*, публикован је Вајлсов доказ велике Фермаове теореме. Једна узбудљива математичко-животна драма је тим чином завршена. Ипак обим и методологија доказа оставили су отворена врата за коментаре о хипотетичком Фермаовом доказу или неком другом елементарнијем од Вајлсовог. Већ је Герд Фалтингс значајно скратио и упростио Вајлсов доказ, али је идеја и методологија била иста. Овде ће бити презентована примена линеарне трансформације:

$$x = \alpha + \gamma$$

$$(L) \quad y = \beta + \gamma$$

$$z = \alpha + \beta + \gamma$$

и велике Фермаове теореме, за конструкцију једне класе полинома без целобројних нула.

Применом трансформације (L) на Фермаову једначину, она се своди на једначину облика:

$$(1) \quad \gamma^n - \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a_k \gamma^{n-k} = 0, .$$

$$\text{Означимо са } P_n(\gamma) = \gamma^n - \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a_k \gamma^{n-k} \text{ полином } n\text{-тог степена}$$

по променљивој γ на левој страни једначине (1). Он има неколико занимљивих особина. Прво, то је нормиран полином са целобројним - коефицијентима код кога је коефицијент уз γ^{n-1} једнак 0. Друго, лако се проверава и једнакост $P'_n(\gamma) = nP_{n-1}(\gamma)$. И треће, ако је n прост број, тада су сви коефицијенти иза γ^n дељиви са $n\alpha\beta$.

Наведимо најпре неколико елементарних тврђења која помажу при одређивању целобројних нула полинома са коефицијентима из прстена - целих бројева.

Ајзенштајнов критеријум: Нека је дата једначина:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

* math.milanzi@gmail.com

са коефицијентима из скупа целих бројева. Ако су сви коефицијенти $a_1, \dots, a_{n-1}$ дељиви са простим бројем p и коефицијент a_n дељив са p , а није са p^2 ; тада дата једначина нема целобројних решења.

Као последицу Безуовог става имамо и тврђење да је полином P дељив са $x - a$, $a \in \mathbb{Z}$, ако је $x = a$ нула полинома P . Нека је дат полином

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$$

са коефицијентима $a_k \in \mathbb{Z}$. Знамо да ако је број $\alpha \in \mathbb{Z}$ нула полинома P_n онда $\alpha | a_n$, а такође и да $(x - \alpha) | P_n(x)$. На тај начин можемо проверити који од делилаца коефицијента a_n су нуле полинома P_n и то искористити у факторизацији полинома.

Пример 1. Раставити на просте чиниоце (факторисати) полином $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Могуће нуле датог полинома су бројеви $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Директном провером установимо да су то бројеви $1, 2, 3$. Дакле $P_3(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Описани поступак има практичног смисла у случају да a_n има мали број делилаца. У осталим случајевима потребно је користити напредније поступке. Теореме о броју позитивних или негативних нула, теореме о локализацији нула итд.

Пример 2. Доказати да је полином $x^3 - 24x - 60$ иредуцибилан.

Уочимо да $3 | 24$ и $3 | 60$, али да 9 не дели 60 . Према Ајзенштајновом критеријуму овај полином је несводљив.

Пример 3. Факторисати полином $P_3(x) = x^3 - 48x - 216$.

Најпре уочавамо да $2 | 48$ и $2^2 | 216$, а такође $3 | 48$ и $3^2 | 216$. Дакле, Ајзенштајнов критеријум је овде немоћан. Број 216 има 16 позитивних и исто толико негативних делилаца. Класична провера једне по једне нуле би дала резултат да је дати полином иредуцибилан. Ипак, признајемо, да нисмо задовољни поступком који доводи до тог закључка. У настави у математичким гимназијама се обрађују једначине трећег степена и Карданове формуле, па се њиховом применом до истог закључка може доћи и брже. Следећи пример већ излази и из тог оквира.

Пример 4. Одредити целобројне нуле полинома:

$$P_5(x) = x^5 - 80x^3 - 600x^2 - 1940x - 2100$$

Као и у претходном примеру $2|80$, $2|600$, $2|1940$, , а такође $5|80$, $5|600$, $5|1940$, . Закључујемо да ни у овом случају Ајзенштајнов критеријум не помаже. Провера да ли се полином поништава за неки од делилаца коефицијента 2100 ручно је несврсисходна. Уколико укључимо методе анализе, могуће је доказати да полином има само једну реалну и то позитивну нулу већу од $4\sqrt{5}$. На тај начин се у потрази за целобројним нулама можемо ограничити само на позитивне делиоце броја 2100 веће или једнаке 10. Ако још направимо програм за израчунавање вредности датог полинома на рачунару, може се лако утврдити да он нема целобројних нула.

Дефиниција 1: Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ низ $b_k = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} \alpha^{k-l} \beta^l$, $k \geq 2$ је

низ мешовитих чланова биномне формуле.

За $k = 2$, добијамо $b_2 = 2\alpha\beta$, за $k = 3$ имамо $b_3 = 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$. Имамо даље да је $b_4 = 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3$, -
 $b_5 = 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 \dots$

Пример 5. Доказати да полиноми из примера 2 и 3 припадају класи полинома $\mathcal{P}_n = \left\{ x^n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}, n \in \mathbb{N} \right\}$ за $n = 3$.

За $n = 3$ полиноми из класе $\mathcal{P}_n$ су облика $x^3 - 6\alpha\beta x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$. Изједначавајући одговарајуће коефицијенте са полиномима из датих примера добијамо $\alpha = 1$, за полином из другог примера, односно $\alpha = 2$, за полином из трећег примера. Дакле ти полиноми припадају уоченој класи полинома.

Слично се може доказати да и полином из примера 4 припада истој класи за $n = 5$, $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. Видели смо да ова три полинома немају целобројних нула. Интуиција нас наводи на идеју да ниједан полином из класе $\mathcal{P}_n$ нема целобројних нула. И заиста важи тврђење:

Теорема: Нека су дати $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и низ мешовитих чланова биномне

формуле $b_k = \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} \alpha^{k-l} \beta^l$, . Тада полиноми из класе

$$\mathcal{P}_n = \left\{ x^n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}, n \in N \wedge n \geq 3 \right\}$$

немају целобројних нула.

Доказ. Наведено тврђење је еквивалент велике Фермаове теореме. Посматрајмо полином (2) $P_n(x, y, z) = x^n + y^n - z^n$. Према великој Фермаовој теорему полином (2) нема целобројних тројки нула за природно $n \geq 3$, изузев тривијалних које садрже 0. Трансформацијом (L)

полином (2) се трансформише у полином

$$P_n(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta)^n + (\alpha + \gamma)^n - (\alpha + \beta + \gamma)^n.$$

После низа елементарних трансформација, добија се:

$$P_n(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma^n - \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} b_k \gamma^{n-k},$$

где је b_k низ мешовитих чланова биномне формуле из дефиниције

1. Узимајући α, β као целобројне параметре и преименовањем променљиве γ у променљиву x добијамо полином

$$(3) P_{n,\alpha,\beta}(x) = x^n - \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}, a_k = \binom{n}{k} b_k, n \in N$$

са једном променљивом.

Полином (3) нема целобројних нула за $n \geq 3$ јер би у том случају и полином (2) имао целобројних нула што је у супротности са великом Фермаовом теоремом.

Пример 6. Доказати да је полином $x^3 + 384x + 12096$ иредуцибилан.

Лако се уочава да је Азејнштајнов критеријум у овом примеру немоћан. Проверимо да ли полином припада класи $\mathcal{P}_n$. Уочимо најпре да је највећи заједнички делилац коефицијената полинома из те класе, не рачунајући најстарији коефицијент, ако је n прост број, једнак $n\alpha\beta$. У нашем случају $NZD(384, 12096) = 192$ па је $3\alpha\beta = -192$, односно $\alpha\beta = -64$. Да-

ље је $\alpha + \beta = \frac{-12096}{3\alpha\beta} = 63$. Из последња два услова добијамо $\alpha = -1$ и

$\beta = 64$ или обратно. Закључујемо да је полином припада класи $\mathcal{P}_n$, те према томе нема целобројних нула.

Литература

Перић 1991: V. Perić, *Algebra I i II*, Sarajevo: Svjetlost.

Прасолов 2003: В. В. Прасолов, *Многочлены*, Москва: МЦНМО.

Живановић 2008: М. Живановић, Примена једне линеарне трансформације код велике Фермаове теореме, Београд: *Настава математике LI-II_3-4*, ДМС, Београд, 26–28.

DEFINIRANJE PRODUKTA MALJCEVA NA PROFINITNIM STRUKTURAMA POMOĆU PSEUDOIDENTITETA

0. Uvod

Pseudovarijeteti su klase konačnih struktura koji su zatvoreni u odnosu na homomorfne slike, podstrukture i konačne direktne produkte. Kao najvažnije primjere pseudovarijeteta možemo istaknuti: pseudovarijetete svih konačnih grupa $\mathbf{G}$, pseudovarijetete svih konačnih p -grupa $\mathbf{G}_p$, pseudovarijetete svih konačnih nilpotentnih grupa $\mathbf{G}_{nil}$, pseudovarijetete svih konačnih rješivih grupa $\mathbf{G}_{sol}$, pseudovarijetete svih konačnih monoida $\mathbf{M}$. Trivijalan pseudovarijetet je onaj koji se sastoji samo od jednog elementa. Ako je V konačna struktura, tada sa (V) označavamo pseudovarijetet generiran strukturom V tj. klasu svih homomorfnih slika podstrukture oblika V^k .

Za strukturu (polugrupu, monoid, grupu i itd) kažemo da je *profininitna* ili *prokonačna* ukoliko se može prikazati kao projektivni limes konačnih struktura (polugrupa, monoida, grupa i itd). Napomenimo da konačne strukture možemo promatrati kao topološke strukture s diskretnom topologijom, te da su stoga profinitne strukture kompaktne, Hausdorffove i rezidualno konačne. Generalno možemo reći ukoliko je $\mathbf{V}$ pseudovarijetet struktura, tada za strukturu kažemo da je *pro-V* ako je projektivni limes elemenata iz $\mathbf{V}$. Odnosno, profinitna struktura je *pro-V* ako i samo ako sve njezine konačne neprekidne homomorfne slike pripadaju pseudovarijetetu $\mathbf{V}$.

Također je topološke strukture moguće prikazati kao *pro-V popunjenja* (kompletizacije) slobodnih struktura. Pri tome *profinitno popunjenje* (kompletizaciju) strukture S definiramo kao projektivni limes svih konačnih kvocijenata strukture S , a *pro-V popunjenje* strukture S kao projektivni limes njenih konačnih kvocijenta unutar pseudovarijeteta $\mathbf{V}$.

Naravno, ukoliko su svi elementi pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ *pro-V* strukture i ukoliko je $\mathbf{W}$ pseudovarijetet sadržan u $\mathbf{V}$, tada su sve *pro-W* strukture također i *pro-V* strukture. Za profinitnu strukturu S kažemo da je generirana skupom (alfabetom) A , ili kratko *A-generirana*, ako postoji preslikavanje $\sigma : A \rightarrow S$ takvo da je podstruktura generirana sa $\sigma(A)$ gusta unutar strukture S .

1. Pseudoidentiteti i Reitermanov teorem

Neka je $\mathbf{V}$ pseudovarijetet konačnih struktura i neka je A konačan skup (alfabet). Projektivni limes A -generiranih elemenata iz pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ se obično označava sa $\Omega_A \mathbf{V}$. Ukoliko $\mathbf{V}$ sadrži konačne slobodne objekte $S_A(\mathbf{V})$

* katija.lonza1@du.htnet.hr

nad alfabetom A , tada je $\Omega_A \mathbf{V} = \hat{S}_A(\mathbf{V})$. Ako je $\mathbf{W}$ podpseudovarijetet pseudovarijeteta $\mathbf{V}$, tada identično preslikavanje alfabeta A inducira neprekidni surjektivni morfizam $\pi : \Omega_A \mathbf{V} \rightarrow \Omega_A \mathbf{W}$, kojeg nazivamo *prirodnom projekcijom* od $\Omega_A \mathbf{V}$ na $\Omega_A \mathbf{W}$. Ako $x \in \Omega_A \mathbf{V}$, tada $\pi(x)$ zovemo restrikcijom elementa x na $\mathbf{W}$.

Poznato je da je $\hat{S}_A(\mathbf{V})$ kao $\text{pro-}\mathbf{V}$ popunjenje od $S(A)$, odnosno kao *slobodna pro- $\mathbf{V}$ struktura* nad skupom A , karakterizirana sljedećim univerzalnim svojstvom:

ako je S $\text{pro-}\mathbf{V}$ struktura i $\varphi : A \rightarrow S$ preslikavanje (odnosno $\varphi : S(A) \rightarrow S$ je morfizam za slučaj slobodnih struktura), tada postoji jedinstveni neprekidni morfizam $\hat{\varphi} : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ takav da je $\varphi = \hat{\varphi} \circ i$.

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{i} & \hat{S}_A(\mathbf{V}) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \hat{\varphi} \\ & & S \end{array}$$

Primijetimo da ukoliko su $\mathbf{W}$ podpseudovarijeteti pseudovarijeteta $\mathbf{V}$, tada prema navedenom univerzalnom svojstvu slijedi da identično preslikavanje na skupu A inducira neprekidni surjektivni morfizam iz $\hat{S}_A(\mathbf{V})$ na $\hat{S}_A(\mathbf{W})$ tzv. *prirodnu projekciju* koju često označavamo $\text{pr}_{\mathbf{V}}$.

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{i} & \hat{S}_A(\mathbf{V}) \\ \varphi \downarrow & \searrow \hat{\varphi} & \downarrow \text{pr}_{\mathbf{V}} \\ S & \xleftarrow{\quad} & \hat{S}_A(\mathbf{W}) \end{array}$$

Dakle, ponovno ako je $\varphi : S(A) \rightarrow S$ morfizam i $S \in \mathbf{V}$, tada φ inducira neprekidni morfizam $\hat{\varphi} : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ kojeg je moguće faktorizirati preko $\hat{S}_A(\mathbf{W})$ putem projekcije $\text{pr}_{\mathbf{V}}$.

Neka je A konačan skup i neka $x, y \in \Omega_A \mathbf{V}$. Za profinitnu strukturu S kažemo da *zadovoljava pseudoidentitet* $x = y$ ako je $\sigma(x) = \sigma(y)$ za svaki neprekidni morfizam $\sigma : \Omega_A \mathbf{V} \rightarrow S$. Također kažemo da klasa $\mathbf{V}$ profinitnih struktura zadovoljava pseudoidentitet ukoliko ga zadovoljava svaki element klase $\mathbf{V}$. Skup pseudoidentiteta pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ se obično označava sa Σ , a za klasu svih elemenata pseudovarijeteta $\mathbf{V}$, za koje vrijede svi pseudoidentiteti iz skupa Σ , koristi se oznaka $[\Sigma]_{\Pi}$. Napomenimo da se za klasu $[\Sigma]_{\Pi}$ kaže da je *definirana* pomoću skupa pseudoidentiteta Σ . Sljedeći teorem, poznat kao *Reitermanov teorem* za strukture, je pokazao da su pseudoidentiteti dovoljni za definiranje pseudovarijeteta.

Teorema 1.1. Neka je Π klasa konačnih struktura. Tada je Π pseudovarijetet ako i samo ako postoji skup Σ pseudoidentiteta takav da je $\Pi = [\Sigma]_{\Pi}$.

Dakle, pod *pseudoidentitom nad $\mathbf{V}$* podrazumijevamo jednakost $\pi = \rho$, za $\pi, \rho \in \Omega_A \mathbf{V}$ i neki konačan skup A . Budući da klasu svih struktura $S \in \mathbf{V}$ za koje vrijedi $\pi = \rho$ ako je $\pi_S = \rho_S$ označavamo sa $[[\Sigma]]_{\mathbf{V}}$, a skup Σ nazivamo *bazom* klase $[[\Sigma]]_{\mathbf{V}}$, ovaj se teorem ponekad iskazuje kao:

Teorema 1.2. (Reiterman). Pseudovarijeteti sadržani u zadanom pseudovarijetetu $\mathbf{V}$ su klase oblika $[[\Sigma]]_{\mathbf{V}}$.

Reitermanov teorem također vrijedi za profinitne strukture s tim da se pseudovarijetet profinitnih struktura uobičajno označava sa $\hat{\mathbf{V}}$.

Teorema 1.3. (Lonza 2009) Neka je $\mathbf{V}$ pseudovarijetet konačnih struktura, a Σ skup pseudoidentičnih elemenata. Tada je $\mathbf{V} = [[\Sigma]]_{\mathbf{V}}$ ako i samo ako je pseudovarijetet profinitnih struktura $\hat{\mathbf{V}} = [[\Sigma]]_{\hat{\mathbf{V}}}$.

Primjer 1.4. Navesti ćemo definicije pseudoidentiteta za neke značajnije pseudovarijetete:

- $\mathbf{J}_1(\mathbf{SI}) = [[xy = yx, x^2 = x]]$ (idempotentni komutativni monoidi tj. semilattices);
- $\mathbf{G} = [[x^0 = 1]] = [[e = 1]]$ (grupe);
- $\mathbf{G}_p = [[x^{p^0} = 1]]$ (p -grupe);
- $\mathbf{K} = [[x^0 y = x^0]] = [[ex = e]]$ (nilpotentna proširenja polugrupa s lijevom nulom);
- $\mathbf{D} = [[yx^0 = x^0]] = [[xe = e]]$ (nilpotentna proširenja polugrupa s desnom nulom);
- $\mathbf{B} = [[x^2 = x]]$ (polugrupe u kojoj je svaki element idempotentan tzv. band);
- $\mathbf{N} = [[e = 0]]$ (nilpotentne grupe);
- $\mathbf{DS} = [[((xy)^0(yx)^0(xy)^0)^0 = (xy)^0]]$ (monoidi čiji se regularni elementi nalaze u grupama).

Vrlo često se pseudovarijeteti definiraju pomoću generatora (recimo pomoću klase koja sadrži sve divizore promatranih klasa konačnih struktura i zatvorena je u odnosu na konačne direktne produkte). Pri tome, uz pronalaženje efikasnih procedura i algoritama za testiranje pripadnosti određenim pseudovarijetetima, sljedeća četiri bitna algebarska operatora na pseudovarijetetima ostaju i dalje intenzivan predmet istraživanja.

Neka su $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ pseudovarijeteti struktura.

- *Spajanje* $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ predstavlja klasu svih divizora produkta $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ za $V \in \mathbf{V}$ i $W \in \mathbf{W}$, odnosno $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ predstavlja najmanji pseudovarijetet koji sadrži oba pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$. Struktura (monoid, group, etc) V pripada $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ ako i samo ako dijeli direktni produkt $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ tako da $V \in \mathbf{V}$ i $W \in \mathbf{W}$.

- *Semidirektni produkt* $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ je klasa svih divizora semidirektnog produkta $V * W$ za $V \in \mathbf{V}$ i $W \in \mathbf{W}$, odnosno predstavlja pseudovarijetet generiran pomoću svih semidirektnih produkata oblika $V * W$, za $V \in \mathbf{V}$ i $W \in \mathbf{W}$.
- Za pseudovarijetet $\mathbf{V}$, sa $\mathbf{V}^n$ označavamo n -ti semidirektni produkt u kojem su svi faktori $\mathbf{V}$. Također je moguće konstruirati strukturu $P(S)$ koja sadrži podskupove strukture S u kojoj je produkt dva podskupa X i Y definiran kao $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$, a odgovarajući operator na pseudovarijetetima poznat kao operator potencije. Dakle, *potencija* $\mathbf{PV}$ pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ je klasa svih divizora potencija struktura $P(V)$ za $V \in \mathbf{V}$, odnosno predstavlja pseudovarijetet generiran pomoću svih struktura oblika $P(V)$ za $V \in \mathbf{V}$.
- *Produkt Maljceva* $\mathbf{V} (\mathfrak{m}) \mathbf{W}$ se definira kao pseudovarijetet generiran pomoću svih konačnih struktura V za koje postoji homomorfizam $\varphi : V \rightarrow W$ u neku strukturu $W \in \mathbf{W}$ takav da $\varphi^{-1}(e) \in V$ za svaki idempotentni element $e \in W$.

Produkt Maljceva se prirodno najviše proučava u teoriji grupa. Tako, ako su $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ pseudovarijeteti grupa, konačna grupa G pripada $\mathbf{V} (\mathfrak{m}) \mathbf{W}$ ukoliko predstavlja proširenje grupe pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ sa grupom iz $\mathbf{W}$. Također se navedene operacije intenzivno proučavaju na pseudovarijetetima polugrupa i monoida jer dobiveni rezultati na tim strukturama imaju vrlo zanimljivu i široku primjenu. U svakom slučaju, dobro poznavanje pseudovarijeteta $\mathbf{V}$ obično uključuje poznavanje:

- a) „proste“ baze pseudoidentiteta;
- b) zadanog pseudoidentiteta $\pi = \rho$ koji vrijedi na nivou čitavog pseudovarijeteta $\mathbf{V}$.

Pri tome (a) možemo postići dobrim poznavanjem struktura koje pripadaju promatranom pseudovarijetetu $\mathbf{V}$ ili kroz strukturalno poznavanje $\Omega_A \mathbf{W}$ za odgovarajući pseudovarijetet $\mathbf{W}$ koji sadrži $\mathbf{V}$. (b) je jedna vrsta problema koja se odnosi na relativno slobodne profinitne strukture $\Omega_A \mathbf{V}$ i uključuje poznavanje kako algebarskih tako i topoloških svojstava $\Omega_A \mathbf{V}$.

Napomenimo da se sa $\mathbf{EV}$ označava pseudovarijetet struktura u kojem su podstrukture generirane pomoću idempotentnih elemenata promatranog pseudovarijeteta $\mathbf{V}$. Tako se npr. skup idempotentnih elemenata monoida M , odnosno grupe G označava s $E(M)$, odnosno s $E(G)$.

2. Produkt Maljceva na profinitnim strukturama

Neka su S i T strukture koje pripadaju pseudovarijetetu $\mathbf{V}$. Za preslikavanje $\varphi : S \rightarrow T$ tj. za preslikavanje iz S u neprazan skup podskupova strukture T kažemo da je *relacijski morfizam* ako je:

- $\varphi(s) \neq \emptyset$ za svako $s \in S$;
- $\varphi(s_1) \varphi(s_2) \subseteq \varphi(s_1 s_2)$.

Morfizmi i njihova inverzna preslikavanja su primjeri relacijskih morfizama. Također se kompozicijom dva relacijska morfizma dobiva ponovno relacijski morfizam. Svaki relacijski morfizam je moguće faktorizirati u obliku $\varphi = \alpha\beta^{-1}$ pri čemu je α surjektivni morfizam, a β njegov inverz. Za relacijski morfizam $\varphi : S \rightarrow T$ kažemo da je **V-relacijski morfizam** ako, za svaki idempotentan element $e \in T$, podstruktura $\varphi^{-1}(e) = \{ s \in S \mid e \in \varphi(s) \}$ strukture S pripada pseudovarijetetu $\mathbf{V}$.

Neka je $\varphi : S \rightarrow T$ relacija i neka je $R = \{(s, t) \in S \times T \mid t \in \varphi(s)\}$ pripadajući graf. Uzmemo li za preslikavanja $\alpha : R \rightarrow S$ i $\beta : R \rightarrow T$ projekcije na prvu, odnosno drugu koordinatnu osu, tada možemo primijetiti da je φ relacijski morfizam ako i samo ako je R podstruktura od $S \times T$ i α surjekcija. Pri tome faktorizaciju $\varphi = \alpha^{-1}\beta$ nazivamo *kanonskom faktorizacijom* od φ . Kao primjer, uzmemo li za strukture monoide, tada jednostavno definiciju relacijskog morfizma možemo iskazati kao $1 \in \varphi(1)$, odnosno relacijski morfizam iz S u T predstavlja relaciju čiji je graf podmonoid od $S \times T$ s prvom koordinatnom projekcijom na S .

Za slučaj kada su S i T topološke strukture, govorimo o *zatvorenom* relacijskom morfizmu iz S u T , tj. o relacijskom morfizmu čiji je graf R zatvorena postruktura od $S \times T$. Stoga su najzanimljiviji slučajevi kada su S i T konačne strukture na kojima je definirana diskretna topologija ili kada je riječ o kompaktnim strukturama. Budući da je neprekidna slika kompaktnog skupa opet kompaktan skup, vrijedi:

Lema 2.1. Neka je S konačna, a R kompaktna struktura. Ako su $\sigma : R \rightarrow S$ i $\pi : R \rightarrow T$ neprekidni morfizmi s tim da je σ surjekcija, tada je relacijski morfizam $\varphi = \sigma^{-1}\pi : S \rightarrow T$ zatvoren.

Ako je $\varphi : S \rightarrow T$ zatvoreni relacijski morfizam između kompaktnih struktura S i T , tada je slika $\varphi(X)$ svakog zatvorenog podskupa X strukture S također zatvorena.

Vidjeli smo da, za pseudovarijetete $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, identično preslikavanje na skupu A inducira prirodnu projekciju iz $\hat{S}_A(\mathbf{V})$ na $\hat{S}_A(\mathbf{W})$, te ukoliko je $\varphi : S(A) \rightarrow S$ surjektivan morfizam na pro- $\mathbf{V}$ strukturu S , tada φ inducira neprekidni morfizam $\hat{\varphi} : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ kojeg je moguće faktorizirati preko $\hat{S}_A(\mathbf{W})$ putem projekcije $\text{pr}_{\mathbf{V}}$.

$$\begin{array}{ccc}
 S(A) & \xrightarrow{i} & \hat{S}_A(\mathbf{V}) \\
 \varphi \downarrow & \hat{\varphi} \nearrow & \downarrow \text{pr}_{\mathbf{V}} \\
 S & \xleftarrow{\varphi_{\mathbf{V}}} & \hat{S}_A(\mathbf{W})
 \end{array}$$

Označimo li sa φ_V kompoziciju $\varphi_V = \text{pr}_V \circ \hat{\varphi}^{-1}$, lako je primijetiti da je φ_V relacijski morfizam, kojeg nazivamo *prirodni relacijski morfizam* iz strukture S u $\hat{S}_A(\mathbf{W})$.

Dakle, ako su $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ pseudovarijeteti struktura, tada produkt Maljceva $\mathbf{V} (\mathfrak{m}) \mathbf{W}$ možemo definirati kao klasu svih konačnih struktura S za koje postoji $\mathbf{V}$ -relacijski morfizam iz S u neku strukturu pseudovarijeteta $\mathbf{W}$.

Cilj nam je pokazati da je, na profinitnim strukturama, također moguće definirati produkt Maljceva $\hat{\mathbf{V}} (\mathfrak{m}) \hat{\mathbf{W}}$ kao klasu svih profinitnih struktura S za koje postoji zatvoreni $\hat{\mathbf{V}}$ -relacijski morfizam $\varphi : S \rightarrow T$, $T \in \hat{\mathbf{W}}$.

U tu svrhu najprije ćemo promatrati ponašanje pseudoidentiteta u odnosu na spomenute algebarske operatore.

Propozicija 2.2. (Pin, Weil 1996: Propozicija 3.2) Neka je $\mathbf{V}$ pseudovarijetet i neka je A profinitni skup. Ako je $\pi : S(A) \rightarrow \hat{S}_A(\mathbf{V})$ prirodna projekcija, tada pseudovarijetet $\mathbf{V}$ zadovoljava pseudoidentitet $x = y$ za $x, y \in F(A)$ ako i samo ako je $\pi(x) = \pi(y)$.

Propozicija 2.3. Neka je $\mathbf{W}$ pseudovarijetet struktura i neka je A profinitni skup. Ako je S A -generirana profinitna struktura, T pro- $\mathbf{W}$ profinitna struktura, a $\varphi : S \rightarrow T$ zatvoreni relacijski morfizam, tada je morfizam φ moguće faktorizirati preko $\hat{S}_A(\mathbf{W})$. Odnosno, ako je $\sigma : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ surjektivan neprekidni morfizam i $\pi : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow \hat{S}_A(\mathbf{W})$ prirodna projekcija, tada postoji neprekidni morfizam $\tau : \hat{S}_A(\mathbf{W}) \rightarrow T$ takav da je $\varphi = \sigma^{-1} \pi \tau$.

Dokaz. Neka je R pripadajući graf zatvorenog relacijskog morfizma φ i neka je $\varphi = \alpha^{-1}\beta$ kanonska faktorizacija morfizma φ . Tada postoji neprekidni morfizam $\rho : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow R$ takav da je $\rho \alpha = \sigma$. Budući da je T pro- $\mathbf{W}$ profinitna struktura, neprekidni morfizam $\rho\beta$ je moguće faktorizirati preko $\hat{S}_A(\mathbf{W})$. Dakle, postoji neprekidni morfizam $\tau : \hat{S}_A(\mathbf{W}) \rightarrow T$ za koji je $\pi \tau = \rho\beta$, što slikovito prikazujemo na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{S}_A(\mathbf{V}) & \xrightarrow{\pi} & \hat{S}_A(\mathbf{W}) \\
 \sigma \swarrow & \rho \downarrow & \downarrow \tau \\
 S & \xleftarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} T & \\
 & \varphi &
 \end{array}$$

No, tada je $\sigma^{-1} \pi \tau = (\alpha^{-1}\rho^{-1})(\rho\beta) = \alpha^{-1}\beta = \varphi$. $\square$

Dakle, vidimo da postoji veza između struktura produkta Maljceva $\mathbf{V} (\mathfrak{m}) \mathbf{W}$ i relacijskih morfizama na strukturama pseudovarijeteta $\mathbf{W}$. Sljedeći teorem karakterizira produkt $\mathbf{V} (\mathfrak{m}) \mathbf{W}$ pomoću svojstava relacijskih morfizama definiranih na slobodnim pro- $\mathbf{W}$ objektima.

Teorema 2.4. Neka su $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ pseudovarijeteti struktura i neka je A profinitni skup. Ako je S konačna struktura, $\sigma : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ surjektivna neprekidna morfizam, a $\pi : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow \hat{S}_A(\mathbf{W})$ prirodna projekcija, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- (1) $S \in \mathbf{V}(\mathbf{m})\mathbf{W}$.
- (2) Relacijski morfizam $\sigma^{-1}\pi$ je $\mathbf{V}$ -relacijski morfizam.
- (3) Postoji zatvoreni $\mathbf{V}$ -relacijski morfizam iz S u pro- $\mathbf{W}$ strukturu.

Dokaz. Najprije ćemo pokazati da (1) implicira (2). Ako struktura $S \in \mathbf{V}(\mathbf{m})\mathbf{W}$, tada postoji $\mathbf{V}$ -relacijski morfizam $\varphi : S \rightarrow T$, pri čemu $T \in \mathbf{W}$. No, prema prethodnoj propoziciji, znači da postoji neprekidni morfizam $\tau : \hat{S}_A(\mathbf{W}) \rightarrow T$ takav da je $\varphi = \sigma^{-1}\pi\tau$. Pretpostavimo li da je e idempotentan element slobodne pro- $\mathbf{W}$ strukture $\hat{S}_A(\mathbf{W})$, tada je $\sigma(\pi^{-1}(e)) \subseteq \sigma(\pi^{-1}(\tau^{-1}(\tau(e)))) = \varphi^{-1}(\tau(e))$. Budući da je $\tau(e)$ idempotentan element strukture T , $\varphi^{-1}(\tau(e)) \in \mathbf{V}$, pa stoga također $\sigma(\pi^{-1}(e)) \in \mathbf{V}$. Dakle, $\sigma^{-1}\pi$ je $\mathbf{V}$ -relacijski morfizam tj. vrijedi (2).

Prema lemi 2.1, možemo zaključiti da je $\sigma^{-1}\pi$ zatvoreni relacijski morfizam što pokazuje da tvrdnja (2) implicira (3).

I na kraju ostaje nam pokazati da iz (3) slijedi (1). U tu svrhu, pretpostavimo da je $\varphi : S \rightarrow T$ zatvoreni $\mathbf{V}$ -relacijski morfizam iz strukture S u pro- $\mathbf{W}$ strukturu T . Ako su $V_1, \dots, V_k$ podstrukture strukture S unutar pseudovarijeteta $\mathbf{V}$, tada direktno iz pretpostavke slijedi da je, za svaki idempotentan element e pro- $\mathbf{W}$ strukture T , $\varphi^{-1}(e)$ sadržano u nekoj podstrukтури V_i . Ako, za svako $1 \leq i \leq k$, definiramo $X_i = \{t \in T \mid \varphi^{-1}(t) \subseteq V_i\}$, tada je $X_i = T \setminus \bigcup_{s \notin V_i} \varphi(s)$. Budući da je relacijski morfizam φ zatvoren, prema lemi 2.1, svaki $\varphi(s)$ je zatvoren, odakle slijedi da je svaki X_i otvoren. Budući da je T profinitna struktura, topologija definirana na T sadrži bazu od istovremeno otvorenih i zatvorenih skupova, pa možemo zaključiti da, za svaki idempotentan element $e \in T$, postoji $1 \leq i \leq k$ i postoji istovremeno otvoreni i zatvoreni skup Y_e takav da je $e \in Y_e \subseteq X_i$. Skup idempotentnih elemenata $E(T)$ je zatvoren i potom kompaktan, te je kao takav sadržan u uniji otvorenih skupova Y_e . Stoga postoji konačno mnogo idempotentnih elemenata $e_1, \dots, e_n$ i odgovarajućih indeksa $i_1, \dots, i_n$ takvih da je $Y_{e_j} \subseteq X_{i_j}$, za svako j , te da vrijedi $E(T) \subseteq \bigcup_{j=1}^n Y_{e_j}$.

Promatramo li otvorenu relaciju kongruencije $\sim$ na nekoj kompaktnoj strukturi S tj. relaciju kongruencije čiji je graf R otvoreni podskup od $S \times S$, tada je relacija kongruencije $\sim$ istovremeno otvorena i zatvorena, konačnog je indeksa i odgovarajuće $\sim$ -klase su istovremeno otvorene i zatvorene. Doista, ako $s \in S$, tada $(s, s) \in R$ i dakle postoji otvorena okolina U elementa $s \in S$ takva da je $U \times U \subseteq R$. Okolina U također pripada $\sim$ -klasi $[s]_{\sim}$ elementa s , te je stoga $[s]_{\sim}$ otvorena i $\sim$ -klase formiraju otvorenu particiju od S . Iz kompaktnosti strukture S , slijedi da je $\sim$ konačnog indeksa i da je svaka $\sim$ -klasa istovremeno otvorena i zatvorena. I na kraju, R je konačna unija produkata oblika $[s]_{\sim} \times$

$[s]_{\sim}$, te je stoga istovremeno otvoren i zatvoren. Koristeći ovu tvrdnju, možemo zaključiti da je kongruencija na svakom Y_e istovremeno otvorena i zatvorena, da je presjek kongruencija na Y_{e_j} ($1 \leq j \leq n$) istovremeno otvoren i zatvoren, te da je konačnog indeksa. Neka je sada $\tau : T \rightarrow V$ projekcija strukture T na svoj kvocijent po kongruenciji $\sim$. Budući da je $\sim$ zatvorena, projekcija τ je neprekidna. Dakle, V je konačna struktura i $V \in \mathbf{W}$.

Na kraju, uzmemo li da $e \in E(V)$, tada je $\tau^{-1}(e)$ $\sim$ -klasa kao i zatvorena podstruktura od T jer zbog kompaktnosti sadrži idempotentan element. Dakle, $\tau^{-1}(e)$ je sadržano u Y_{e_j} za neko $1 \leq j \leq n$, te je stoga $\tau^{-1}(e) \subseteq X_{i_j}$. Prema tome $\varphi^{-1}(\tau^{-1}(e)) = \bigcup_{t \in \tau^{-1}(e)} \varphi^{-1}(t) \subseteq V_{i_j}$, iz čega se može zaključiti da je $\varphi\tau : S \rightarrow V$, $V \in \mathbf{W}$, V -relacijski morfizam, tj. da $S \in \mathbf{V}(\mathfrak{m})\mathbf{W}$. $\square$

Ovaj teorem ima važnu ulogu prilikom definiranja pseudoidentiteta za pseudovarijetet $\mathbf{V}(\mathfrak{m})\mathbf{W}$. U tu svrhu uvesti ćemo i neke posebne oznake. Neka je A profinitni skup, B konačni alfabet, $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ pseudovarijetet konačnih struktura. Sa z_b ćemo označavati sliku svakog elementa $b \in B$ za koji postoji inducirani neprekidni morfizam $\varphi : \hat{S}_B(\mathbf{V}) \rightarrow \hat{S}_A(\mathbf{V})$, tj. $z_b = \varphi(b)$. Dalje, za svako $x \in \hat{S}_B(\mathbf{V})$, sliku $\varphi(x)$ ćemo označavati sa $x(z)$, pri čemu je $z = (z_b)_{b \in B} \in (\hat{S}_A(\mathbf{V}))^B$ i kazati da je slika $x(z)$ dobivena iz x supstitucijom elemenata z_b . Napomenimo da z možemo promatrati kao vektor te se stoga može označavati i sa z .

Za $x, y \in \hat{S}_B(\mathbf{V})$ kažemo da je $x' = y'$ pseudoidentitet dobiven iz pseudoidentiteta $x = y$ pomoću $\mathbf{W}$ -supstitucije ako postoji profinitni skup A i $z = (z_b)_{b \in B} \in (\hat{S}_A(\mathbf{V}))^B$ takav da pseudovarijet $\mathbf{W}$ zadovoljava pseudoidentitete $z_b = z_{b'}$ za sve $b, b' \in B$, $x' = x(z)$ i $y' = y(z)$.

Sada ćemo definirati skup pseudoidentiteta koji će vrijediti za produkt Maljceva.

Teorema 2.5. Neka su $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ pseudovarijeteti struktura. Ako je Σ skup pseudoidentiteta pseudovarijeteta $\mathbf{V}$, tada je $\mathbf{V}(\mathfrak{m})\mathbf{W}$ definiran pomoću pseudoidentiteta dobivenih iz elemenata skupa Σ pomoću $\mathbf{W}$ -supstitucije.

Dokaz. Neka je B konačan alfabet, $\sigma : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow S$ neprekidni morfizam i $\pi : \hat{S}_A(\mathbf{V}) \rightarrow \hat{S}_A(\mathbf{W})$ prirodna projekcija. Ako pretpostavimo da je $z = (z_b)_{b \in B} \in (\hat{S}_A(\mathbf{V}))^B$ takav da pseudovarijet $\mathbf{W}$ zadovoljava pseudoidentitet $z_b = z_{b'}$ za sve $b, b' \in B$, onda moramo pokazati da vrijedi $\sigma(x(z)) = \sigma(y(z))$. Prema gore navedenom, za svaki element $b \in B$, njegova slika $z_b = \varphi(b)$ inducira neprekidni morfizam $\varphi : \hat{S}_B(\mathbf{V}) \rightarrow \hat{S}_A(\mathbf{V})$, pri čemu je $x(z) = \varphi(x)$ i $y(z) = \varphi(y)$. Budući da smo pretpostavili da, za element z vrijedi pseudoidentitet $z_b = z_{b'}$, odnosno $x = y$ ($x, y \in \hat{S}_B(\mathbf{V})$), prema Reitermanovom teoremu i propoziciji 2.2, proizlazi postojanje idempotentnog elementa $e \in \hat{S}_A(\mathbf{W})$ takvog da je $\pi(\varphi(b)) = \pi(z_b) = e$ za svako $b \in B$. Kako je $\pi^{-1}(e)$ zatvorena podstruktura unutar $\hat{S}_A(\mathbf{V})$, možemo zaključiti da je $\varphi(\hat{S}_B(\mathbf{V})) \subseteq \pi^{-1}(e)$ i $\sigma(\varphi(\hat{S}_B(\mathbf{V}))) \subseteq \sigma(\pi^{-1}(e))$, što slikovito prikazujemo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \hat{S}_B(\mathbf{V}) & \xrightarrow{\varphi} & \hat{S}_A(\mathbf{V}) & \xrightarrow{\pi} & \hat{S}_A(\mathbf{W}) \\
 & \searrow \varphi\sigma & \downarrow \sigma & & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

Budući da struktura $S \in \mathbf{V}(\mathfrak{m})\mathbf{W}$, to također $\sigma(\hat{S}_A(\mathbf{V})) \in \mathbf{V}(\mathfrak{m})\mathbf{W}$, pa prema teoremu 2. 4. možemo zaključiti da $\sigma(\pi^{-1}(e)) \in \mathbf{V}$. Stoga, $\sigma(\pi^{-1}(e))$ zadovoljava pseudoidentitet $x = y$, a odavde i pseudoidentitet $\sigma(\varphi(x)) = \sigma(\varphi(y))$, odnosno $\sigma(x(z)) = \sigma(y(z))$. Dakle, za strukturu S vrijedi $x(z) = y(z)$, što znači da je $\mathbf{V}(\mathfrak{m})\mathbf{W}$ definiran pomoću pseudoidentiteta oblika $x(z) = y(z)$, odnosno pomoću pseudoidentiteta dobivenih iz skupa Σ pomoću $\mathbf{W}$ -supstitucije. $\square$

Sada ćemo ovaj teorem primijeniti na pseudovarijate profinitnih struktura.

Teorema 2.6. Neka su $\hat{\mathbf{V}}$ i $\hat{\mathbf{W}}$ pseudovarijeteti profinitnih struktura. Ako je Σ skup pseudo-identiteta pseudovarijeteta $\hat{\mathbf{V}}$, tada je $\hat{\mathbf{V}}(\mathfrak{m})\hat{\mathbf{W}}$ definiran pomoću pseudoidentiteta dobivenih iz elemenata skupa Σ pomoću $\hat{\mathbf{W}}$ -supstitucije.

Dokaz. Neka je A profinitni skup, $\sigma : \hat{S}_A(\hat{\mathbf{V}}) \rightarrow S$ surjektivni neprekidni morfizam na profinitnu strukturu S , a $\pi : \hat{S}_A(\hat{\mathbf{V}}) \rightarrow \hat{S}_A(\hat{\mathbf{W}})$ prirodna projekcija. Ako je $e \in \hat{S}_A(\hat{\mathbf{W}})$ idempotentan element, tada moramo pokazati da je $\sigma(\pi^{-1}(e))$ pro- $\mathbf{V}$ struktura, odnosno da $\sigma(\pi^{-1}(e)) \in \hat{\mathbf{V}}$. Prema teoremu 1.3, dovoljno je dokazati da za $\sigma(\pi^{-1}(e))$ vrijede svi pseudoidentiteti iz skupa Σ . Tako možemo, za pseudoidentitete iz skupa Σ , uzeti $(x = y) \in \Sigma$ pri čemu $x, y \in \hat{S}_B(\hat{\mathbf{V}})$, za neki konačan skup B . Ako je φ neprekidni morfizam iz $\hat{S}_B(\hat{\mathbf{V}})$ u $\sigma(\pi^{-1}(e)) \subseteq S$, tada $\varphi(b) \in \sigma(\pi^{-1}(e))$, za svako $b \in B$. Stoga možemo izabrati element $z_b \in \pi^{-1}(e)$ takav da je $\varphi(b) = \sigma(z_b)$. Uzmemo li da je $z_b = \psi(b)$, za svaki element $b \in B$, tada prema već dokazanom, z_b inducira neprekidni morfizam $\psi : \hat{S}_B(\hat{\mathbf{V}}) \rightarrow \hat{S}_A(\hat{\mathbf{V}})$ tako da je $\psi\sigma = \varphi$ ili slikovito:

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{S}_A(\hat{\mathbf{V}}) & \xrightarrow{\pi} \hat{S}_A(\hat{\mathbf{W}}) \\
 \psi \nearrow & \downarrow \sigma & \\
 \hat{S}_B(\hat{\mathbf{V}}) & \xrightarrow{\varphi} & S
 \end{array}$$

Ako je sada $z = (z_b)_{b \in B}$, tada je $\psi(x) = x(z)$ i $\psi(y) = y(z)$. Budući da, iz same definicije slijedi da je $\pi(z_b) = \pi(z_{b'}) = e$, to prema propoziciji 2.2, možemo zaključiti da pseudovarijetet $\hat{W}$ zadovoljava pseudoidentitet $z_b = z_{b'}$ za sve $b, b' \in B$. Odavde i iz pretpostavke da je Σ skup pseudoidentiteta pseudovarijeteta $\hat{V}$, dobivamo da profinitna struktura S zadovoljava pseudoidentitet $x(z) = y(z)$, pa dakle i također $\sigma(x(z)) = \sigma(y(z))$. Zbog toga, dalje vrijedi da je $\sigma(\psi(x)) = \sigma(\psi(y))$, odnosno da je $\phi(x) = \phi(y)$. Znači da, za podstrukturu $\sigma(\pi^{-1}(e))$, vrijedi pseudoidentitet $x = y$, odnosno da vrijede svi pseudoidentiteti iz skupa Σ .

Dakle, dokazali smo da je $\sigma(\pi^{-1}(e)) \in \hat{V}$ pro- V struktura, odnosno da je $\sigma^{-1}\pi : S \rightarrow \hat{S}_A(\hat{W})$ zatvoreni pro- V relacijski morfizam, što prema teoremu 2.4. znači da profinitna struktura $S \in \hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$. Stoga je pseudovarijetet $\hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$ definiran pomoću pseudoidentiteta dobivenih iz skupa Σ pomoću $\hat{W}$ -supstitucije. $\square$

Koristeći ovaj teorem dolazimo i do posebne karakterizacije pro- $(V(\mathfrak{m})W)$ struktura.

Teorema 2.7. Neka su V i W pseudovarijeteti struktura. Ako je $Y = V(\mathfrak{m})W$, tada je $\hat{Y} = \hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$, tj. $\hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$ je klasa pro- $(V(\mathfrak{m})W)$ struktura.

Dokaz. Pretpostavimo da struktura $S \in \hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$. Tada, prema teoremu 2.4, postoji zatvoreni pro- V relacijski morfizam ϕ iz S u pro- W strukturu T tj. $\phi : S \rightarrow T$, $T \in \hat{W}$. Ako je $\psi : S \rightarrow S'$ surjektivni neprekidni morfizam na konačnu strukturu S' , tada je, za svaki idempotentan element $e \in T$, $\psi(\phi^{-1}(e))$ konačni neprekidni kvocijent od $\phi^{-1}(e)$, pa je stoga $\psi(\phi^{-1}(e)) \in V$. Povrh toga, prema lemi 2.1, $\psi^{-1}\phi$ je V -zatvoreni relacijski morfizam. Zbog toga, ponovno iz teorema 2.4. slijedi da $S' \in V(\mathfrak{m})W$. Prema tome, sve konačne neprekidne homomorfne slike strukture S se nalaze unutar $V(\mathfrak{m})W$, te je dakle struktura S pro- $(V(\mathfrak{m})W)$ struktura.

Obrnuto, pretpostavimo da je S pro- $(V(\mathfrak{m})W)$ struktura i da je Σ skup svih pseudoidentiteta koji vrijede za pseudovarijetet $\hat{V}$. Prema teoremu 1.3, struktura S zadovoljava sve pseudoidentitete koje vrijede za pseudovarijetet V , a prema teoremu 2.5, struktura S zadovoljava sve pseudoidentitete za $V(\mathfrak{m})W$ dobivene iz elemenata skupa Σ pomoću W -supstitucije. Koristeći teorem 2.6. zaključujemo da je $\hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$ definiran pomoću pseudoidentiteta dobivenih iz elemenata skupa Σ pomoću $\hat{W}$ -supstitucije, odnosno prema dokazu tog teorema, da postoji zatvoreni pro- V relacijski morfizam u pro- W strukturu (tj. $\sigma^{-1}\pi : S \rightarrow \hat{S}_A(W)$), što znači da $S \in \hat{V}(\mathfrak{m})\hat{W}$. $\square$

Literatura

- Almeida 1995: J. Almeida, *Finite Semigroups and Universal Algebra*, Singapore: World Scientific.
- Almeida 2003: J. Almeida, *Profinite structures and dynamics*, CIM Bulletin 14, 8–18.
- Almeida, Weil 1995: J. Almeida and P. Weil, *Free profinite semigroups over semidirect products*, Izvestiya VUZ Matem. 39, 3–31.
- Eilenberg 1974: S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, New York: Vol. A, Academic Press, (MR 58:26604b)
- Henckell et al 1991: K. Henckell, S. Margolis, J.-E. Pin, and J. Rhodes, *Ash's type II theorem, profinite topology and Mal'cev products*, Part I, Int. J. Algebra Comput. 1, 411–436.
- Lonza 2009: K. Lonza, *O jednom proširenju Reitermanovog teorema na profinitne strukture*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta Pale s naučnog skupa održanog 23–24. 5. 2009.
- Lonza 2009: K. Lonza, *Profinite completions and continuous extensions of morphisms between free groups and their profinite completions*. Sarajevo J. Math. 5(18), No. 2, 149–153.
- Perić 1991: V. Perić, *Algebra* Vol. 1, third edition, Sarajevo: IGKRO Svjetlost.
- Pin, Weil 1996: J.-E. Pin and P. Weil, *A Reiterman theorem for pseudovarieties of first-order structures*, Algebra Universalis 35, 577–595.
- Ribes, Zalesskii 1993: L. Ribes and P. A. Zalesskii, *On the profinite topology on a free group*, Bull. London Math. Soc. 25, 37–43.
- Ribes, Zalesskii 2000: L. Ribes and P. A. Zalesskii, *Profinite groups*, Berlin: Ergeb. Math. Grenzgebiete 3, No. 40, Springer.
- Reiterman 1982: J. Reiterman, *The Birkhoff theorem for finite algebras*, Algebra Universalis 14, 1–10.
- Zeitoun 1995: M. Zeitoun, *The join of the pseudovarieties of idempotent semigroups and of locally trivial semigroups*, Semigroup Forum 50, 367–381.

Dragan Ž. Đurčić*
 Rale M. Nikolić
 Univerzitet u Kragujevcu
 Tehnički fakultet Čačak
 Katedra za sistemsko i industrijsko inženjerstvo
 Aleksandar N. Torgašev
 Univerzitet u Beogradu
 Matematički fakultet
 Katedra za matematičku analizu

Originalni naučni rad

A NOTE ON THE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE AND THE GENERALIZED INVERSE

1. Introduction

Function $f : [a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, ($a > 0$), is called slowly varying in the sense of Karamata (see e.g. [11]), if it is measurable and if:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1, \quad (1)$$

for every $\lambda > 0$. We denote the class of all such functions by SV (see [2] and [12]).

Function $f : [a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, ($a > 0$), is called rapidly varying (see e.g. [2]) if it is measurable and if:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = +\infty, \quad (2)$$

for every $\lambda > 1$. We denote the class of all such functions by R_∞ (see [2] and [5]).

Classes R_∞ and SV are of great importance in qualitative analysis of divergent asymptotic processes (see e.g. [1,2,5,8,10,12]).

Let $A = \{ f : [a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), (a > 0) \mid f \text{ nondecreasing and unbounded } \}$.

If $f \in A$, consider the set $\{f\} = \{g \in A \mid f(x) \asymp g(x), x \rightarrow +\infty\}$, where $f(x) \asymp g(x), x \rightarrow \infty$ is the weak asymptotic equivalence relation defined by

$$0 < \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty \quad (3)$$

* dragandj@tfc.kg.ac.rs

(see e.g. [2]).

For any $f \in A$, the function $f^{\leftarrow}(x) = \inf \{y \geq a \mid f(y) > x\} (x \geq f(a))$ is its *generalized inverse* (see e.g. [2]).

If $f \in A$ is continuous and strictly increasing, then $f^{\leftarrow}(x) = f^{-1}(x)$, for $x \geq f(a)$. Besides, $f^{\leftarrow} \in A$ whenever $f \in A$. For any right continuous function $g \in A$ there is an $f \in A (f(x) = g^{\leftarrow}(x), x \geq g(a))$ such that $g(x) = f^{\leftarrow}(x)$ for $x \geq f(a)$.

A function $f : [a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), (a > 0)$ is called *regularly varying* in Karamata sense if

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho} \quad (4)$$

holds for all $\lambda > 0$ and some $\rho \in \mathbb{R}$, where ρ is general index of variability of f . The class of all regularly varying functions is denoted by RV. This class is the main object of the Karamata theory of regular variability (see e.g. [11]), and its theory and applications (see also [2] and [12]).

For any function $f \in A$ define $[f] = \{g \in A \mid f(x) \sim g(x), x \rightarrow +\infty\}$, where $f(x) \sim g(x), x \rightarrow +\infty$ is the strong asymptotic equivalence relation defined by

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (5)$$

The next theorem is a modified combination of some results from [1] (see also [2, p.190, 14(ii), (iii)]).

THEOREM A. Let $f, g \in A$ and assume that f is a regularly varying function whose index $\rho > 0$. If $g \in [f]$, then $g^{\leftarrow} \in [f^{\leftarrow}]$.

Some extensions of the Theorem A can be found in [6], [7] and [9]. Also, some modifications of this theorem are given in [3] and [4], where another asymptotic relation is considered, in fact the process (operator) of inverting the functions.

2. The main result

In the following Theorem, (a) introduces one extension of Theorem A by observing weaker condition $g \in \{f\}$ instead of $g \in [f]$, while (b) determines maximal class for which (a) holds (class $R_\infty \cap A$).

Theorem 1. (a) Let $f, g \in A$ and $f \in R_\infty$. If additionally $g \in \{f\}$, then $g^\leftarrow \in [f^\leftarrow]$.

(b) Let $f, g \in A$. If $g^\leftarrow \in [f^\leftarrow]$ for every $g \in \{f\}$, then $f \in R_\infty (g \in R_\infty)$.

Short Proof. (a) From $f \in R_\infty$ it follows that $f^\leftarrow \in SV_f$. For $x \geq x_0$ it is $g(x) \cdot m \leq f(x)$, i.e. $g(x) \leq \frac{1}{m} f(x)$, thus for sufficiently large x it is $g^\leftarrow(x) \geq f^\leftarrow(mx)$. Similarly, for sufficiently large x it is $f^\leftarrow(Mx) \geq g^\leftarrow(x)$, so it is

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^\leftarrow(x)}{f^\leftarrow(x)} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^\leftarrow(mx)}{f^\leftarrow(x)} = 1$$

and

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^\leftarrow(x)}{f^\leftarrow(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^\leftarrow(Mx)}{f^\leftarrow(x)} = 1.$$

Hence, $f^\leftarrow(x) \sim g^\leftarrow(x)$ for $x \rightarrow +\infty$.

(b) Let $f \in A$ and $g(x) = \lambda \cdot f(x)$ for $x \geq a$, and λ is arbitrary fixed positive number. Then $f(x) \asymp g(x)$ for $x \rightarrow +\infty$, so it follows that $g^\leftarrow(x) \sim f^\leftarrow(x)$ for $x \rightarrow +\infty$. Hence

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^\leftarrow(x)}{f^\leftarrow(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^\leftarrow(\alpha x)}{f^\leftarrow(x)}, \alpha > 0 \left(\alpha = \frac{1}{\lambda} \right).$$

This means that $f^\leftarrow \in SV_f$, so it follows that $f \in R_\infty$.

Theorem 1 is also generalization of analogous results from [7], which hold for continuous and strictly increasing functions.

References

- Balkema 1979: A. A. Balkema, J. L. Geluk, L. de Haan, An extension of Karamata's Tauberian theorem and its connection with complementary convex functions, *Quart. J. Math. Oxford Ser. 30* (No.2), 385–416.
- Bingham 1987: N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Bulygin 2002: V. V. Bulygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, Properties of a subclass of Avakumović functions and their generalized inverses, *Ukr. Math. Zh.* 54 (No. 2), 179–206.
- Buldygin 2005: V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. steinebach, Some properties of asymptotic quasiinverse function and their applications, I, *Theor. Probability and Math. Statist.* 70, 11–28.
- Djurčić 2007: D. Djurčić, Lj. D.R. Kočinac, M. R. Žižović, Some properties of rapidly varying sequences, *Journal Math. Anal. Appl.* 327, 1297–1306.
- Djurčić 2001: D. Djurčić, A. Torgašev, Strong asymptotic equivalence and inversion of functions in the class K_c , *Journal Math. Anal. Appl.* 255, 383–390.
- Djurčić 2003: D. Djurčić, A. Torgašev, Weak asymptotic equivalence and inverse functions in the class OR, *Math. Moravica* 7, 1–6.
- Djurčić 2007: D. Djurčić, A. Torgašev, Some asymptotic relations for the generalized inverse, *J. Math. Anal. Appl.* 325, 1397–1402.
- Djurčić 2008: D. Djurčić, A. Torgašev, S. Ješić, The strong asymptotic equivalence and the generalized inverse, *Siber. math. J.* 49 (No. 4), 786–795.
- Haan 1970: L. de Haan, On regular variation and its applications to the weak convergence of sample extremes, *Math. Centre Tracts*, Vol. 32, CWI, Amsterdam.
- Karamata 1930: J. Karamata, Sur un mode de croissance reguliere des fonctions, *Mathematica (Cluj)* 4, 38–53.
- Seneta 1976: E. Seneta, Functions of regular variation, *LNM Vol. 506*, Springer, New York.

BAER PROPERTY AND NAGATA CONSTRUCTIONS OF ARMENDARIZ RINGS

1. Preliminaries

Throughout this paper R denotes an associative ring with identity, σ denotes an endomorphism of R and A a ring. A ring R is Baer if annihilator of each subset is generated by idempotent of a ring. A ring R is left (p-q) Baer if the right annihilator of every subset (principal left ideal) is generated by an idempotent. The notion of Armendariz ring is introduced by Rege and Chhawchharia [1]. They defined a ring R to be Armendariz if $f(x)g(x) = 0$

implies $a_i b_j = 0$ for all polynomials $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ and $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ from

$R[x]$. The motivation for those rings comes from the fact that Armendariz has shown that the *reduced rings* ($a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$) satisfy previous condition. The notion of Armendariz rings is natural and useful in understanding of the relation between annihilators of rings R and $R[x]$ (see [4]). Those rings were also studied by Armendariz himself, Hong and Kim [5], Chen and Tong [3], Krempa [6], and others.

We use $R[x; \sigma]$ to denote skew polynomial ring with the ordinary addition and multiplication subject to the relation $xr = \sigma(r)x$. When σ is an automorphism, $R[x, x^{-1}; \sigma]$ denotes skew Laurent polynomial ring with the multiplication subject to the relation $x^{-1}r = \sigma^{-1}(r)x$.

An endomorphism σ is *rigid* if $a\sigma(a) = 0$ implies $a = 0$, for all $a \in R$ (Krempa [6]). Following Hong, a ring R is said to be *rigid* if it has a rigid endomorphism. Hong also generalized the notions of Armendariz ring to skew Armendariz ring. Ring R is called σ -skew Armendariz if $f(x)g(x) = 0$ implies $a_i \sigma^i(b_j) = 0$, for all

$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ and $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ from $R[x; \sigma]$ (see [4]). As a generalization of

σ -skew Armendariz rings Ouyang (see [2]) introduced a no-

* dusanjok@yahoo.com

tion of weak σ -skew Armendariz rings R as a ring in which $f(x)g(x) = 0$ implies $a_i\sigma^i(b_j) \in \text{nil}(R)$, where $\text{nil}(R)$ denotes a set of all nilpotent elements of ring R , for all

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ and } g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \text{ from } R[x, x^{-1}; \sigma]$$

R is σ -skew Armendariz if and only if $R[x, x^{-1}; \sigma]$ is σ -skew Armendariz ring. Chen and Tong (see [3]) have proved that if R and S are rings, and σ is an isomorphism of rings R and S and R is α -skew Armendariz ring then S is $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ -skew Armendariz ring. In this paper we prove a variant of this theorem for weak-skew Armendariz rings. We also give very important example of skew Armendariz ring of matrices. Let R be commutative and M an R -module. The R -module $R \oplus M$ acquires a ring structure where the product is defined by $(a, m)(b, n) = (ab, an + bm)$

We shall use the notation $R(+)M$ for this ring.. If M is not zero, this ring is not reduced, since M can be identified with the $0(+)M$ which has square zero. (It is very natural to call this ring as " R Nagata M ").

2. Examples of Armendariz rings

It is easy to see that subrings of Armendariz rings are also Armendariz. However, factor rings need not be so.. If $(R_i)_{i \in I}$ are Armendariz, so is $\prod_{i \in I} R_i$. We begin with examples of familiar non-reduced rings which are Armendariz.

Proposition 2.1 [1] For each integer n , Z/nZ is an Armendariz ring, which is not reduced whenever n is a natural number which is not square free.

In this section we introduce σ -Armendariz rings and Laurent σ -skew power series rings and we give their useful characterization in terms of σ -skew Armendariz rings. Throughout this section σ is a ring automorphism.

A ring R is σ -skew Armendariz ring of Laurent type if for every two polynomials

$$f(x) = \sum_{i=-p}^q a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=-t}^s b_j x^j \text{ from the ring } R[x, x^{-1}; \sigma]$$

$$f(x)g(x) = 0 \text{ implies } a_i \sigma^i(b_j) = 0, \quad -p \leq i \leq q, \quad -t \leq j \leq s.$$

We say that R is σ -skew power series ring of Laurent type if for every

$$f(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=-t}^{\infty} b_j x^j \quad \text{from the power series ring } R[[x, x^{-1}, \sigma]],$$

implies $a_i \sigma^i(b_j) = 0, -p \leq i \leq \infty, -t \leq j \leq \infty$.

In the following two theorems we give a useful characterization of Laurent σ -skew Armendariz rings and Laurent σ -skew power series rings.

Theorem 2.1. The following conditions are equivalent:

1. R is σ -skew Armendariz ring
2. R is σ -skew Armendariz ring of Laurent type.

Proof: Suppose that $f(x) = \sum_{i=-p}^q a_i x^i, g(x) = \sum_{j=-t}^s b_j x^j$ are polynomials from the ring $R[x, x^{-1}; \sigma]$, such that $f(x)g(x) = 0$. Since $x^p f(x)$ and $x^t g(x)$ are polynomials from the ring $R[x; \sigma]$ we have that $x^p f(x)g(x)x^t = 0$ which gives

Since σ is an automorphism, we obtain $\sigma^p(a_i \sigma^i(b_j)) = 0$, so that we have $a_i \sigma^i(b_j) = 0$.

The converse is evident since $R[x; \sigma] \subset R[x, x^{-1}; \sigma]$.

Theorem 2.2. The following conditions are equivalent :

1. R is σ -skew power series Armendariz ring
2. R is σ -skew power series Armendariz ring of Laurent type.

Proof: The same as the proof of the previous theorem.

Theorem 2.3. If an endomorphism σ of a reduced ring R satisfies so called compatibility condition : $a\sigma(b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0$ then the power series ring $R[[x; \sigma]]$ is reduced.

Proof. Let $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, and $(f(x))^2 = 0$. We have to prove that $f(x) = 0$.

It is clear that $a_0^2 = 0$, so that $a_0 = 0$. Now, since the coefficient of x^2 has to be zero, we have $a_0 a_2 + a_1 \sigma(a_1) + a_2 \sigma^2(a_0) = 0$, so that we obtain $a_1 \sigma(a_1) = 0$. From the compatibility condition we obtain $a_1^2 = 0$, and since R is reduced ring, we have $a_1 = 0$. Continuing in this way, since the coefficient of x^{2^n} is zero, we have $a_n \sigma(a_n) = 0$ and using compatibility condition once again we have $a_n \sigma^{n-1}(a_n) = 0$ and in the same way $a_n \sigma(a_n) = 0$, so that $a_n = 0$. By the induction argument, we have $a_i = 0$, for all i .

This means that $f(x) = 0$ and so the ring $R[[x; \sigma]]$ is reduced.

Without compatibility condition the previous theorem is not true. Since if the ring $R = Z_2 \oplus Z_2$, and σ is defined by $\sigma(a, b) = (b, a)$, it is easy to check that $R[[x; \sigma]]$ is not reduced. Observe that $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$, but $(1, 0)\sigma(0, 1) \neq (0, 0)$.

We generalize some results from [3], which are related to σ -skew Armendariz rings, to the weak σ -skew Armendariz case.

A ring R is weak Armendariz if $f(x)g(x) = 0$ implies $a_i b_j \in \text{nil}(R)$, for every two polynomials

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ from the ring $R[x]$. This definition equivalent with the fact that ideal 0 is weak Armendariz ideal. We will prove that the class of weak Armendariz rings is closed for direct products. Also if the factor ring R/I is weak Armendariz ring, for some nilpotent ideal I then the ring R is weak Armendariz.

Theorem 2.4. Finite direct product of weak Armendariz rings is weak Armendariz ring.

Proof: Suppose that $R_1, R_2, \dots, R_n$ are weak Armendariz rings and

$R = \prod_{i=1}^n R_i$. If $f(x)g(x) = 0$ for some polynomials

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \in R[x],$$

where

$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ are elements from the product ring R , define

$$f_k(x) = a_{0k} + a_{1k} x + \dots + a_{nk} x^n, \quad g_k(x) = b_{0k} + b_{1k} x + \dots + b_{mk} x^m.$$

From $f(x)g(x) = 0$, we obtain

$$a_0b_0 = 0, a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \dots, a_nb_m = 0 \text{ and this implies}$$

$$a_{01}b_{01} = a_{02}b_{02} = \dots = a_{0n}b_{0n} = 0,$$

$$a_{01}b_{11} + a_{11}b_{01} = \dots = a_{0n}b_{1n} + a_{1n}b_{0n} = 0, \text{ and}$$

$$a_{n1}b_{m1} = a_{n2}b_{m2} = \dots = a_{nm}b_{mn} = 0.$$

This means that $f_k(x)g_k(x) = 0$ in $R_k[x]$, $1 \leq k \leq n$, and since R_k are weak Armendariz rings, we have that $a_{ik}b_{jk} \in \text{nil}(R_k)$. Now for each i, j , there exists positive integers m_{ijk} such that $(a_{ik}b_{jk})^{m_{ijk}} = 0$ in the ring R_k , $1 \leq k \leq n$. If we take $m_{ij} = \max\{m_{ijk}, 1 \leq k \leq n\}$, then it is clear that $(a_ib_j)^{m_{ij}} = 0$ and this means that R is weak Armendariz ring.

Theorem 4.2. If I is nilpotent ideal of a ring R such that R/I is weak Armendariz ring, then R is weak Armendariz ring.

Proof:

Let $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ are polynomials from $R[x]$, such that $f(x)g(x) = 0$. This implies $(\overline{a_0} + \overline{a_1}x + \dots + \overline{a_n}x^n)(\overline{b_0} + \overline{b_1}x + \dots + \overline{b_m}x^m) = 0$, and since R/I is weak Armendariz, we have that $\overline{a_ib_j} \in \text{nil}(R/I)$. From the fact that the ideal I is nilpotent, we obtain that $a_ib_j \in \text{nil}(R)$ which completes the proof.

Recall that a ring R is weak σ -rigid if $a\sigma(a) \in \text{nil}(R) \Leftrightarrow a \in \text{nil}(R)$. It is easy to see that the notion of weak rigid ring generalizes the notion of rigid ring. Every homomorphism σ of rings R and S can be extended to the homomorphism of rings $R[x]$ and $S[x]$ by

$$\sum_{i=0}^m a_i x^i \rightarrow \sum_{i=0}^m \sigma(a_i) x^i, \text{ which we also denote by } \sigma. \text{ Chen and Tong in [3]}$$

prove that if σ is a ring isomorphism of ring R and S and S is α -skew Armendariz, then S is $\alpha\alpha\sigma^{-1}$ -skew Armendariz. We prove the weak skew Armendariz variant of this theorem.

Theorem 4.3. Let R and S be rings with a ring isomorphism $\sigma: R \rightarrow S$. If R is weak α -skew Armendariz then S is weak $\alpha\alpha\sigma^{-1}$ -skew Armendariz ring.

Proof: Let $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ and $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ are polynomials from the ring $S[x; \alpha\alpha\sigma^{-1}]$. We have to prove $f(x)g(x) = 0$ implies $a_i(\alpha\alpha\sigma^{-1})^i b_j \in \text{nil}(S)$, for all i and j .

As we noted σ extends to the isomorphism of corresponding polynomial rings, so there exists polynomials $f_1(x) = \sum_{i=0}^m a'_i x^i$ and $g_1(x) = \sum_{j=0}^m b'_j x^j$ from $R[x]$ such that $f(x) = \sigma(f_1(x)) = \sum_{i=0}^m \sigma(a'_i) x^i$ and $g(x) = \sigma(g_1(x)) = \sum_{j=0}^m \sigma(b'_j) x^j$.

First we shall show that $f(x)g(x) = 0$ implies $f_1(x)g_1(x) = 0$. If $f(x)g(x) = 0$ we have

$$a_0 b_k + a_1 (\alpha\alpha\sigma^{-1})(b_{k-1}) + \dots + a_k (\alpha\alpha\sigma^{-1})^k (b_0) = 0, \quad \text{for any } 0 \leq k \leq m.$$

From the definition of $f_1(x)$ and $g_1(x)$ we have $\sigma(a'_0)\sigma(b'_k) + \sigma(a'_1)(\alpha\alpha\sigma^{-1})\sigma(b'_{k-1}) + \dots + \sigma(a'_k)(\alpha\alpha\sigma^{-1})^k \sigma(b'_0) = 0$, so that $(\alpha\alpha\sigma^{-1})^t = \alpha\alpha^t\sigma^{-1}$ we obtain $a'_0 b'_k + a'_1 \alpha(b'_{k-1}) + \dots + a'_k \alpha^k(b'_0) = 0$, which means that $f_1(x)g_1(x) = 0$ in the ring $R[x; \alpha]$. It remains to prove that $f_1(x)g_1(x) = 0$ implies $a_i(\alpha\alpha\sigma^{-1})^i (b_j) \in \text{nil}(S)$.

From the fact that R is weak α -skew Armendariz we have $a'_i \alpha^i (b'_j) \in \text{nil}(R)$, and since $a'_i = \sigma^{-1}(a^i), b'_j = \sigma^{-1}(b_j)$ we have $\sigma^{-1}(a_i) \alpha^i \sigma^{-1}(b_j) \in \text{nil}(R)$. This implies

$$\sigma^{-1}(a_i (\alpha\alpha\sigma^{-1})^i \sigma^{-1}(b_j)) \in \text{nil}(R) \quad \text{and finally we obtain } a_i (\alpha\alpha\sigma^{-1})^i (b_j) \in \text{nil}(S), 0 \leq i, j \leq m.$$

Hence S is weak $\alpha\alpha\sigma^{-1}$ -skew Armendariz.

3. Nagata constructions of Armendariz rings

Let R be commutative and M an R -module. The R -module $R \oplus M$ acquires a ring structure where the product is defined by $(a, m)(b, n) = (ab, an + bm)$

We shall use the notation $R(+)M$ for this ring.. If M is not zero, this ring is not reduced, since M can be identified with the $0(+)M$ which has square zero. (It is very natural to call this ring as " R Nagata M ").

Theorem 3.1 [1] Let R be a domain, A an ideal of R . Suppose R/A is Armendariz. Then $R(+)R/A$ is Armendariz.

Corollary 3.1 For each n , $Z(+)Z/nZ$ is Armendariz ring.

A ring R is reduced if it has no nilpotent elements.

Proposition 3.1 [1] Let R be reduced ring. Then $R(+)R$ is Armendariz ring.

4. Baer rings and Armendariz rings

The study of Baer rings has its roots in functional analysis. Rickart studied C^* -algebras with the property that every right annihilator of any element is generated by a where $*$ is an involution on the algebra). Kaplansky defined an AW^* -algebra as a $*$ -algebra with the property that the right annihilator of any nonempty subset is generated by a projection. He also introduced Baer rings to abstract various properties of AW^* -algebras, von Neumann algebras, and complete $*$ -regular rings. Berberian continued the development of Baer rings and Clark defined quasi- Baer rings and used them to characterize when a finite dimensional algebra with unity over an algebraically closed field is isomorphic to a twisted matrix units semigroup algebra. As mentioned we define a ring R to be *right* (resp. *left*) *principally quasi-Baer* (or simply right (resp. left) p.q.-Baer) if the right (resp. left) annihilator of a principal right (resp. left) ideal is generated (as a right (resp. left) ideal) by an idempotent.. If R is both right and left p.q.-Baer, then we say R is *p.q.-Baer*.

In our closing section we how the notion of Baer property can be naturally transferred from the ring to some of his extensions if the ring is Armendariz.

Recall that a ring R with an endomorphism α is α -sps-Armendariz (skew power series) if $f(x)g(x) = 0$ implies $a_i b_j = 0$, for every two polynomials

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots, \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m + \dots$$

from the ring $R[[x; \alpha]]$.

Theorem 4.1 Let R be is α -sps-Armendariz ring. Then the ring R is Baer (quasi Baer) if and only if $R[[x; \alpha]]$ is Baer (quasi Baer)

Proof: Let A be nonempty subset of $S = R[[x; \alpha]]$. We use A^* to denote the set of all coefficient of elements from A . From the Baer property of R we have that $r_R(A^*) = eR$ for some idempotent of a ring R . From the fact that $e \in r_{S(A)}$ we obtain that $eS = r_S(A)$.

For $0 \neq q = b_0 + b_1x + \dots + b_tx^t + \dots \in r_S(A)$ we have that $Aq = 0$ and $pq = 0$ for every $q \in A$. From the sps property we find that $b_0, b_1, \dots, b_t, \dots \in r_R(A^*) = eR$. Now there exists $c_0, c_1, \dots, c_t, \dots \in R$ satisfying

$q = ec_0 + ec_1x + \dots + ec_tx^t + \dots = e(c_0 + c_1x + \dots + c_tx^t + \dots) \in R[[x; \alpha]]$, so we have $eS = r_S(A)$ which means that $R[[x; \alpha]]$ is generated by idempotent i.e. Baer ring. The other implication of equivalence, and quasi Baer variant is analogous.

References

- Rege 1997: M. R. Rege, S. Chhawchharia, *Armendariz rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 73, 14–17.
- Ouyang 2008: Ouyang, *Extensions of generalized α -rigid rings*, International Journal of Algebra, 3, 105–116.
- Chen, Tong 2007: W. Chen, W. Tong, *On skew Armendariz and rigid rings*, Houston Journal of Mathematics, 22(2).
- Hirano 2000: Y. Hirano, *On annihilator ideals of polynomial ring over a non-commutative ring*, J. Pure and Applied Algebra 151(3), 105–122.
- Hong, Kim, Kwak 2003: C. Y. Hong, N. K. Kim, T. K. Kwak, *On skew Armendariz rings*, Comm. Algebra, (31)(2), 105–122.
- Krempa 1996: J. Krempa, *Some examples of reduced rings*, Algebra Colloq, (3)(4), 289–330.

ЧАСОВНИК СРПСКОГ МОНАХА ЛАЗАРА ПРЕТЕЧА КРЕМЉОВСКИХ КУРЕНТА

До данашњих дана не постоји сигуран податак, заснован на научно поузданој чињеници, када се појавио први часовник на Фроловској, данас Спаској кули (башњи), у Москви. Само се претпоставља да се могао појавити тамо неке давне 1491. године, непосредно након што је та кула сази- дана.

Али се, зато, сигурно зна да се, скоро 200 година прије тога, у ње- ној непосредној близини, појавио први часовник уопште на некој кули древне Русе. Било је то 1404. године. Тада је, на двору великог кнеза Васи- лија, сина чувеног кнеза Димитрија Донског¹ који се, такорекућ, налазио на истом мјесту на којем данас стоји „Московскиј Бољшој кремљовскиј двор- јец“, постављен часовник, чији је конструктор био српски монах Лазар, ко- ји је био познат и као Лазар Призренац, или Лазар Црноризац, односно Чернец како су га звали Руси.

Тако се, само прије коју годину навршило шест стотина година, или шест вијекова, откако је српски монах Лазар изradio први јавни меха- нички часовник и поставио га на торањ московског великокнежевског дво- ра. У то вријеме је Москва постајала престолницом древне Русе, а тај меха- нички часовник је био, не само први часовник на великокнежевском двору, и у Москви, него и један од првих механичких часовника у Европи, који је тада, с правом, сматран технолошким чудом свога времена.

Часовник монаха Лазара је посједовао такозвани „фолиот“ као осцилатор, што је представљало велики напредак за оно вријеме, а часови на њему нису били означени бројевима, него староцрквенословенским сло- вима: аз (азъ), буки (бѣ), вједи (вѣди), ... која су се, иначе, у оно вријеме, употребљавала као ознаке за цифре.

* mirvuk48@gmail.com

¹ Димитрије И. Донски (1350–1389), од 1389. велики кнез Москве, а од 1363. и Владимира, 1380. год. побјеђује монголске *златне хорде* под командом ка- на Мамаја и протјерује Монголе.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
а і р	в к с	г л т	д м ѳ	е н ф	з, s ѡ х	з о ѱ	н п ѡ, ѡ	ѳ ѣ ѡ, ѡ

Систем словне нумерације која се користила у средњовјековној Србији:

1. ред: цифре јединица, 2. ред: цифре десетица и 3. ред: цифре стотица.

Заправо, скоро да је непознато да су најстарије биле вавилонске и староегипатске (коптске) цифре, па затим римске и индијске, које су биле познате као арапски бројеви, иако су их Арапи, у периоду између десетог и тринаестог вијека, само пренијели у Европу. Мање је, међутим, познато, могло би се рећи чак скоро сасвим заборављено, да су постојале и словено-српске или црквенословенске цифре које су користили Стари Словени за означавање бројева у азбучном систему нумерације, који се појавио у 10. вијеку. Тим „цифрама“ су били обиљежени и сати на Лазаревом часовнику, постављеном на великокнежевом двору у Москви. Аутором азбучног означавања бројева се сматра Ћирило², један од утемељивача словенске азбуке.

Тај систем означавања бројева словима је уведен према грчком (јонском) систему, а користили су га и Византинци. Улогу бројева су имала само слова грчке азбуке и бројно значење је строго одговарало њиховом алфабетском редосљеду.

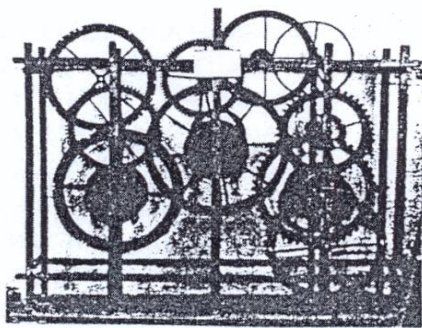


Староцрквенословенска слова у улози цифара на часовнику

² Ћирило (црквенословенски Кирил, 827–14. фебруар 869. год.).

Јасно је да је Лазар Хиландарац морао бити веома учен и посједовао одговарајуће знање, да би могао направити модел хелиоцентричног система, чијом колијевком се, иначе, сматра Византија. Ако се упитамо како је ковао зупчанике, одговор на то питање би био: морао је познавати Архимедову подјелу круга полигонима, на основу које је вршио процјену његовог обима и ковао три врсте зупчаника.

Ипак, сматра се да он није све смислио сам, него је занатску вјештину, а посебно потребно знање, стицао на ономе што су људи прије њега открили и знали. С обзиром да је прича о српским црквеним сатовима настала у средњовјековном Призрену, који је, у вријеме деспотовања Ђурђа Бранковића, био сајцијски центар, највјероватније је и монах Лазар у њему стекао одговарајуће знање. У Призрену је, осим тога, својевремено боравио и славни полихистор Теодор Метохит³, који је ту писао и подучавао Еуклидове аксиоме, преносећи на младе знање које је стекао на цариградским универзитетима.



Механизам часовника Лазара Хиландарца

Стога би се могло рећи да је подвиг Лазара Хиландарца био ношен таласом вишевјековно сакупљаног знања јелинско-ромејске традиције, посвећене занатској вјештини, која се преносила, још од времена обелиска, древног Мисира, преко Александрије и њених клепсидри (водених сатова) и Мусеона, у којем је Аристарх⁴, поређењем сјенки обелиска и бунара, прорачунавао величину Земље и Сунца, сматрајући већ тада да се Земља окреће око њега, атинских „Кула вјетрова“ и двадесет и четвора враташца клепсидре на цркви Света Софија⁵, у Цариграду, чији је механизам „бучно тандрако“, па све до претпоследње, призренске часовничарске школе, из које

³ Теодор Метохит (око 1260–1332. г.) био је византијски писац, филозоф и покровитељ наука, један од највећих полихистора позне Византије и претеча хуманизма.

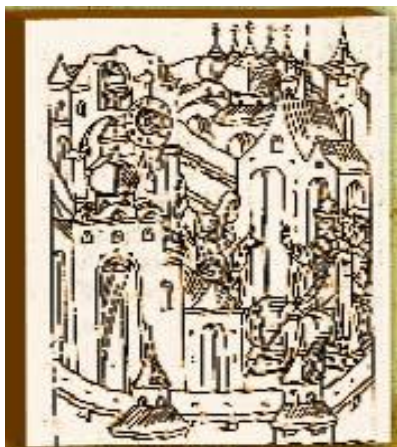
⁴ Аристарх са Самоса (око 310–230. п. н. е.), грчки филозоф и математичар, први заговорник хелиоцентричног система.

⁵ *Hagia Sophia* (532–538), сада џамија Аја Софија.

је и сам потекао. Али, та часовничарска школа, сигурно није само умножавала зупчанике, чиме би се сва тајна заната сводила на слијепо копирање.

О монаху Лазару Хиландарцу, који се на просторима најсјеверније православне земље, древне Русе, обрео, највјероватније, бјежећи пред Турцима, послвије пораза српске војске на Косову, као творцу московског часовника свједочи, између осталог, и један сачувани прг – минијатура из 16. вијека на којој се види како он великом кнезу показује своје тек завршено ремек-дјело. На минијатури се, поред бројчаника, са црквенословенским ознакама за вријеме и казаљке виде и три тега, која су покретала чекиће за откуцавање четвртина часова, од којих је један био у рукама човјекове фигуре, чијим ударцима „о гонг“ су откуцавани пуни сати.

Часовник је, у складу са потребама оног времена, имао само једну непокретну казаљку, док су се дискови „бројчаника“ с ћириличним словима, као ознакама за бројеве, окретали. Један од њих је показивао часове на Земљи, тј. вријеме, а остали положаје планета.



Пирг на којем се виде монах Лазар и велики кнез Василије



Староцрквенословенска слова: аз, буки, вједи,... у улози цифара



Минијатура на којој монах Лазар Хиландарац објашњава великом московском кнезу Василију функционисање часовника којег је конструисао

До појаве овог часовника је звонар, помно посматрајући Сунце и - сунчаник, ударцем чекића о гонг, оглашавао часове и то само дању и за сунчаних дана. Ноћу је вријеме тонуло у мрак.

Због тога је долазак монаха Лазара у Москву представљао невиђено чудо. На ступу више није стајао живи човјек. Њега је замијенио механизам у виду човјека који је, ударајући чекићем о гонг, и дању и ноћу оглашавао часове.

Да ово није ни празна прича ни легенда, поред поменуте минијатуре, свједоче како Никоновски летопис,⁶ тако и неки други краћи записи, који нису нестали у бројним пожарима, који су харали Москвом.

О том догађају и мајсторству Лазара Хиландарца су сачувани писани трагови, у старим руским књигама и записима. На примјер, у једном летопису из 16. вијека пише: „У лето 6912. (1404) године велики кнез - Василиј I, науми часник (часовник) и постави га на свом двору код цркве Свете Благовјести... Мајстор и умјетник овог ремекдјела бијеше неки монах који је дошао са Свете горе, родом Србин, по имену Лазар, а цијена ове бијеше 150 рубаља...“.

Опет у једној чешкој књизи, преведеној и издатој у Загребу 1990. - године, дословице стоји: „О јавним сатовима у средњовековној Србији пр-

⁶ Спомиње се у последњој четвртини 12. вијека.

активно и нема података, али се и поред тога сигурно зна да су у доба српске самосталности украшавали јавне зграде, јер су везе са Бизантом биле у то вријеме доста развијене. *Постоји податак о монаху Лазару из Србије који је, по доласку у Русију 1404. године, израдио велики сат са механизмом, за торањ Кнежева двора у Кремљу“.*

Исто тако, према чешким изворима, монах Лазар је од 1.200 значајних часовничара Европе, хронолошки гледано, био четврти мајстор.

Часовник Лазара Хиландарца откуцавао је вријеме пуних 217 година, када је замијењен новим, који је убрзо нестао у великом пожару. Иако тог часовника више нема, у Политехничком музеју у Москви може се видјети Лазаров часовник из манастира у Новгороду, који је функционисао на истом принципу као и кремљовски.

Лазара Хиландарца, као творца великих часовника, помиње и *Даница* из 1998. године. У том тексту се наводи како су Турци, улазећи први пут са војском у Скопље, затицали часовнике на високим кулама из, како - су говорили, *невјерничких времена*.

Тако на примјер, инж. Желимир Стефановић, обновилац таквих црквених механичких часовника по Србији, који се иначе бави како историјом, тако и филозофијом и теологијом, вјерује да је појава хришћанства донијела судбоносну промјену у поимању времена. Према њему: „Вријеме се одлијепило, од круга, претворивши се у праву линију која се шири, сада историјског времена, које има свој почетак и које ће имати свој крај“.

Разлог томе је, свакако, вјеровање у други Христов долазак, којим - се отвара перспектива за остварење сна о вјечном животу. У таквом, неповратном времену, човјек, у свом односу према Богу, постаје личност, и то јединствена и непоновљива. Часовници су ту, да нас опомињу“.

Ипак, свакако треба рећи да се прва откуцавања (избијања) часовника „у Срба“, спомињу и много раније, чак 200 година прије Лазара Хиландарца.

Свети Сава 1199. године, завршавајући писање Хиландарског типика каже „И тако сви, са похвалом, и у весељу духовном, предајте се сну, док подклесијарх, чувши гдје часовник избија и по томе сазна да је вријеме, не дође к игуману и прими од њега потребну молитву...”

Свакако треба истаћи да се у писаним изворима са Запада спомињу откуцавања часовника, и то на воду, тек 1250. године, што значи пуних 51 годину након што је Свети Сава завршио Хиландарски типик!

Исто тако, инжг. Владан Здравковић Авакум, архитекта, обновилац београдске тврђаве, је открио трагове који указују да су и калемегданске куле красили сатови још у вријеме деспота Стефана Лазаревића и Ђурђа Бранковића. Кула је порушена 1521. године, приликом турске опсаде града, али се на дрворезу Волфганга Реса, види палата на сјеверном бедему горњег града, источно од замка, са сат-кулом окренутом ка Горњем граду.

Али, нажалост, до данашњих дана није сачуван ниједан од таквих часовника, изузев бројчаника са црквенословенским бројкама, који је

пронађен на звонику цркве српског манастира Свети Ђорђе код Темишвара, саграђеном 1485. године, као задужбина властелинске породице - Бранковић.

Обновљајући часовнике на звонику цркве Лазарице у Крушевцу (из 1871), затим цркве у Александровцу Пожаревачком (из 1893) и цркве Св. Преображења у Смедеревској Паланци, као и цркви у Сремској Каменици (из 1746) и Сахат кули на Калемегдану, инжењери Желимир Стефановић и Мирко Вукашиновић су не само успјели вратити у функцију часовнике на јавним мјестима, него и отргнути од заборавља ремек-дјела наших вриједних мајстора.

Велики зидни сат на кули манастира Хиландара, који највјероватније спада међу најстарије црквене часовнике са клатном на српским духовним просторима, такође, захваљујући њима, поново, после 20 година „ђутања“, ради.

Тај сат је од изузетне историјске и културне вриједности. Направљен је непосредно након што је 1657. године Хајгес⁷ изумио сат са клатном. Израђен је по старој ковачкој технологији, с бројчаником пречника 1.350 мм. Према процјени поменуте двојице инжењера, до које су дошли на основу клатна, сматра се да потиче из 17. вијека, а да му остали дјелови конструкције, припадају чак и ранијем временском периоду. Иначе, тај хиландарски сат ради по византијском времену, које је нешто увећано у односу на стандардно и откуцава сваких петнаест минута, које прати дванаест звона са оближњег звоника.

Кремљовски куренти на Спаској кули, чија је шестстота годишњица обиљежена 2004. године, постали су већ давно симболом Красне плошчади,⁸ а и поред тога, још увијек није довољно познато да је њихова претеча био часовник српског монаха Лазара.

2004. године, на Ваведење, одржана је Литургија у црквама у Београду и Москви, у којој је часовник постављен, у манастиру Хиландар на Светој гори, одакле је монах Лазар кренуо, као и у манастиру Светих Арханђела у Призрену, одакле се претпоставља да је монах Лазар потекао, говорећи при том о њему као „Србину Лазару Черњецу“, према имену каје се наведи у документима.

Могло би се, без имало претенциозности, слободно рећи, док су други градили куле да би осматрали Сунце и тако одређивали вријеме, по Србији су се правили часовници, а један Лазар Хиландарац је, не само сам сачинио механизам, него и сам поставио часовник чак и на московски Кремљ. А ми смо га, и поред тога, заборавили. Како одговорити на питање: како и зашто се тако нешто уопште могло десити?

⁷ Christiaan Huygenz, (1629–1695), холандски математичар, астроном, физичар и часовничар.

⁸ Московски Црвени трг.

Јер, с обзиром на вријеме у којем је Лазар Хиландарац живио, да нас бисмо га слободно могли ставити на пиједестал поред Николе Тесле.

Дакле, требало би дати одговор на питање: зашто се тако мало зна о тако великом и вриједном дивљења подвигу? Зашто су падали у заборав - генијални подвизи наших генијалних предака, из древних времена, када је таквих подвига било, не само код нас, него и уопште мало? Једино оправдање, ако се то уопште може оправдати, јесу тешка времена и патње нашег народа, времена борбе за голи живот и опстанак, борбе за родну груду. Била су то времена надирања Турака на наше просторе. За слободу се пролијевала крв, слобода се плаћала животом. А мали, али поносни и храбри српски народ, није никада заборављао своје мртве. Иако неписмен, успијевао је да сачува успомену и отргне од заборава своје јунаке и хероје, опјевавајући догађаје и мртве. На тај начин их је бројао и у исто вријеме чувао успомену на њих. Зато не смијемо замјерати онима који су испред - корисног и угодног за душу и лијепог за око, давали предност храбрости и херојству и опјевавајући смрт и страхоте, памтили своје мртве и клањали - се њиховим сјенима. Тако су настала најљепша народна усмена поезија, којој су се клањали и дивили великани попут Гетеа и Шилера, браће Грим.

Литература

- Baillie, Clutton, Ilbert 1956: Baillie, G., H., O. Clutton, C., A., Ilbert, *Britten's Old Clocks and Watches and their Makers* (7th ed.), Bonanza Books.
- Депман 1959: Депман, И.Ј., *История арифметики*.
- Свети Сава 1199: *Сабрани списи*, Хиландарски типик.
- Трифуновић 1996: Трифуновић, Д., *Осам вијекова математике у српском народу*, Београд.
- Трифуновић 2004: Трифуновић, Д., *Математика Византије и средњовјековне Србије*, Београд.
- Трифуновић 2011: Трифуновић, Д., *Математика у српском народу*, Плана (магазин за науку, истраживања и открића), Београд.
- Забелин 2000: Забелин, И., *Домашний быт русских царей в XVI и XVII столетия*. Т.1 Ч.1. Домашний быт русских царей в XVI и XVII ст. /Башенные часы. С.110./- М.: Языки русской культуры. 480 с. ISBN 5-7859-0104-8
- Gerstmeyer 1988: Gerstmeyer, Y. J., *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*. New York: Cambridge University Press.
- Словенско средњовековно наслеђе, 2001, *Зборник посвећен професору Ђ. Трифуновићу*, уред.: Витић, З., Јовановић, Т., Шпадијер, И; Импресум, Београд, Чигоја.

IMPLEMENTACIJA MULTIAGENTNIH SISTEMA U E-UČENJU MATEMATIKE

1. *Uvod*

U kontekstu eksplozivnog rasta novih znanja, izvori, uslovi, interakcije i ciljevi nastave, na ma kojem nivou njezine primjene, se nalaze u stanju dinamičkih promjena. Zato, jednostavno rečeno, ciljevi savremene nastave moraju biti usmjereni ka postizanju boljih, bržih, kvalitetnijih i trajnijih efekata ovog procesa. Uslovi koje definišu visoki tehnološki zahtjevi za savremeno obrazovanje, ukazuju da se ovako zacrtani cilj može ostvariti samo adekvatnom orijentacijom učenika u pravcu osposobljavanja za aktivnosti, procedure, postupke i načine rada kojima se prije svega ohrabruje i razvija njihova osobnost. Drugim riječima, proces savremene nastave podrazumijeva izuzetno dinamičku i prije svega kreativnu interakciju nastavnika i učenika u odgovarajućoj pedagoškoj atmosferi. Ta interakcija se može realizirati samo kroz partnerski kooperativni odnos učesnika procesa ostvarenog modernom tehnologijom nastave (Banjanin 1997).

Posljednjih su dvadeset godina web bazirana učenja, učenja bazirana na digitalnim (ICT) tehnologijama, kao i interaktivna učenja u računarskim mrežama postala vrlo pristupačna i omiljena, ali i sastavni dio svake savremene, visoko kvalitetne nastave, te interaktivne nastave odnosno učenja, prvenstveno u razvijenim zemljama svijeta, ponajviše jer nude veće mogućnosti učenja svim učenicima bez obzira na njihov stil učenja (Vrdoljak 2008, Vrdoljak i drugi 2009). Nadalje, u spomenutim modelima nastave svi učenici imaju ista prava za učenje i rad bez podjela ne samo po rasnom, nacionalnom ili klasnom osnovu, nego ni po bilo kojem drugom osnovu. U tom periodu su mnogi obrazovni tehnolozi, nastavnici matematike i istraživači razvili i vrednovali različite web bazirane tutorijale koji pomažu učenicima u učenju elementarne - matematike. Međutim većina tih tutorijala ne uključuje prisutnost interaktivnih modula sa inteligentnim tutorskim agentima, odnosno prisutnost kompleksnih interakcija sa inteligentnim multiagentnim sistemima, što bi, po nama, bio jedan od boljih načina kojim možemo unaprijediti elementarnu nastavu matematike, odnosno poboljšati efikasnost učenja u tom procesu. Naravno, potrebno je

* anton.vrdoljak@gmail.com

ispitati efikasnost (učinkovitost) tih modula, što je u biti jedan od ciljeva ovog rada.

Kako je riječ o primjeni teorije inteligentnog tutoringa i primjeni agentne tehnologije, očekujemo da korištenjem ovakvih modula od strane - učenika, isti mogu preuzeti ulogu nastavnika te se tako prilagoditi pojedinačno svakom učeniku, dajući mu pri tom inteligentnu pomoć i podršku.

Stoga, u nastavku rada donosimo objašnjenja temeljnih pojmova agentne tehnologije, analiziramo moguću multiagentnu arhitekturu interaktivnih modula, sa posebnim akcentom na sposobnosti agenata, i na prednosti koje oni pružaju, te pojašnjavano osnovni primjer – interaktivni modul o sabiranju i oduzimanju – od ukupno osam koji se razvija pri Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Mostaru.

2. Softverski agenti

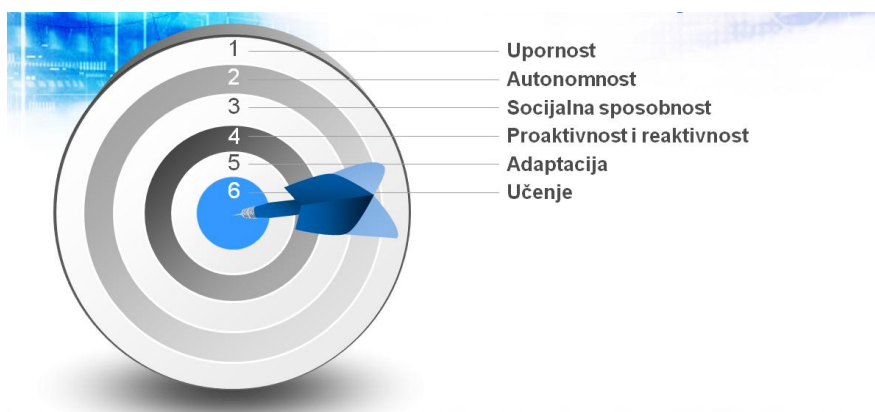
Po našoj definiciji „agent predstavlja svaki entitet u svijetu koji komunicira u određenom kontekstu“ (Banjanin 2007), dok prema najnovijim metodološkim smjernicama softverskog inženjerstva „agenti su opšta paradigma za razvoj kontekstno-svjesnih, prilagodljivih i samoorganizirajućih softverskih aplikacija“ (Mićanović 2008). Prema opštoj podijeli agenata razlikujemo ljudske i softverske agente (slika 1).

Softverski agenti predstavljaju dio softvera koji radi za korisnika ili neki drugi program. Takva „akcija u ime“ uključuje nadležnosti koje odlučuju koja akcija će biti provedena. Srodni i izvedeni koncepti uključuju inteligentne agente (pogotovo one aspekte koji su izraženi kod vještačke inteligencije, kao što su učenje i zaključivanje), autonomne agente (sposobne da modificiraju načine za postizanje ciljeva), multiagentne sisteme (distribuirane agente koji nemaju samosposobnost izvršavanja naredbe) i mobilne agente (agente koji su sposobni preseliti njihove postupke na različitim procesorima).



Slika 1: Opšta podjela agenata

Dakle, termin „agent“ predstavlja softversku apstrakciju, ideju ili koncept koji pruža prikladan i moćan način opisivanja softverskih entiteta koji su sposobni djelovati pri nekom stepenu autonomije kako bi izvršili zadatke u ime korisnika. Različiti autori zastupaju različite definicije agenata koje u osnovi uključuju koncepte kao što su: *upornost* (kod se ne izvršava na osnovu zahtjeva, nego agent neprekidno radi i odlučuje o tome kada treba neku aktivnost izvesti), *autonomnost* (agenti imaju sposobnost selekcije zadataka, utvrđivanja prioriteta, izbora ponašanja usmjerenog ka cilju, donošenja odluka bez ljudske intervencije), *socijalna sposobnost* (agenti mogu angažirati i neke druge komponente prilikom izvršavanja zadatka pomoću neke vrste komunikacije i koordiniranosti), *proaktivnost* i *reaktivnost*, *koaktivnost*, *kolaborativnost* - (agenti opažaju kontekst u kojem djeluju i u skladu sa njim djeluju, odnosno međudjeluju, slika 2.



Slika 2: Opšteprihvatljivi koncepti u definicijama agenata

Pored navedenih, značajne dimenzije sposobnosti agenata su *adaptacija* i *učenje*. Adaptacija podrazumijeva osjećanje okoline i rekonfiguraciju - odgovora. Ovo se može postići pomoću odgovarajućeg algoritma ili kroz otkrivanje strategija za rješavanje problema. Adaptacija, takođe, može uključiti i druge aspekte unutrašnje konstrukcije agenata. Učenje je moguće ostvariti na osnovu pokušaj-pogreška koraka, što povlači za sobom sposobnost ispitivanja i analize ponašanja i postignutog uspjeha. S druge strane, učenje se može odvijati na osnovu primjera i generalizacija, što povlači za sobom smanjenje - kako *kognitivnog* kapaciteta, tako i *memorijskog* ili pak *komunikacionog*.

Možemo konstatirati da ne postoji stroga podjela softverskih agenata, a većina autora podržava podjelu danu u sljedećoj tabeli.

Red. br.	Vrsta agenata	Definicija
1.	Sistemske agent	Agent koji izvršava neki pozadinski zadatak ili postupak za koji je specijaliziran.
2.	Korisnički agent	Korisničko sučelje (interfejs) kod visoko razvijenih mrežnih aplikacija.
3.	Klijentski agent	Korisničko sučelje za servis–bazirane aplikacije.
4.	Web–crawler	Servis–bazirani program koji neprekidno ili periodički pretražuje mrežu ili selektira dijelove mreže tražeći potrebne informacije.
5.	Konverzijski agent	Interaktivni program koji putem vrlo pristupačnog sučelja izvodi specifične zadatke pod vodstvom korisnika.
6.	Inteligentni agent	Program koji teži ciljevima i to sa minimalnim uputama, pri tome koristeći inteligenciju ili heurističku tehniku, što sami računar čini pametnim.
7.	Mobilni agent	Autonoman program koji se kreće između host sistema u tokom postizanja određenog cilja.
8.	Zatvoreni multiagentni sistem	Gusto integrirano aplikacijsko okruženje kod kojeg je dio aplikacije paralelan sa miniprogramima koji teže podciljevima.
9.	Otvoreni multiagentni sistem	Neodređeno, integrirano, aplikacijsko okruženje gdje nezavisno izgrađeni programi (ili agenti) mogu sudjelovati u interakcijama u kojima agenti imaju veliki značaj za zajednicu.
10.	Osnovni softverski agent	Inteligentan i fleksibilan program koji ima sposobnost dinamičke podjele samoga sebe pri čemu podagenti izvršavaju podzadatke.
11.	Robot	Inteligentni softverski agent koji je sposoban kretati se u realnom svijetu.
12.	Hibridni robot–agent	Robot koji može komunicirati sa jednim ili više softverskih agenata.

Tabela 1: Vrste softverskih agenata.

Uređeni skupovi ciljno orijentisanih softverskih agenata su multiagentni sistemi koji imaju dosta nezavisnih agenata mogu sarađivati (i/ili konkurirati) u potrazi za zajedničkim ciljevima. Skup bi mogao biti ograničen unaprijed određenim brojem članova, ili se može omogućiti da skup bude otvoren, pri čemu je omogućeno da agenti iz okruženja pristupe tom skupu.

Softverski agent može raditi bez prekida ili neodređeno, težeći ka svojim ciljevima. Takođe, agent prekida sa radom onda kada dostigne svoje ciljeve ili kada mu ti ciljevi nisu više od značaja.

Softverski agenti predstavljaju sekvencijalnu evolutivnu stepenicu poslije objekata i programa. Objekti su skloni pasivnosti, kao i skrivanju unutar programa, dok programi imaju tendenciju da budu relativno statični. Softverski

agenti nude mogućnost paralelne i međuprogramске kolaboracije, što omogućava lak, pouzdan, fleksibilan i siguran način rada.

Autonomija agenata predstavlja jedan od važnijih koncepata za rad inteligentnih softverskih agenata. Ponašanje agenata može biti zasnovano na vlastitom iskustvu ili ugrađenom znanju korištenom pri projektiranju agenata za određenu okolinu u kojoj će taj agent djelovati. Sustav je autonoman ako je ponašanje agenta određeno pomoću vlastitog iskustva. U slučaju da se ponašanje agenata bazira isključivo na ugrađenom znanju, agentu bi trebalo osigurati dovoljnu količinu znanja za početak, kao i dati mu sposobnost da uči. Fleksibilnost agenata da djeluje u različitim uvjetima se postiže autonomijom agenata. Autonoman, inteligentan agent morao bi biti u mogućnosti da djeluje uspješno u različitim okruženjima, pri čemu je osigurano dovoljno vremena za adaptaciju agenta.

Luck i ostali (2005), navode da se agentska tehnologija može promatrati iz tri perspektive: agenti kao metafora dizajna, agenti kao tehnologija i agenti kao simulacija. *Agenti kao metafora dizajna* osiguravaju novi način razvoja kompleksnih računarskih sistema, naročito u otvorenim i dinamičkim okruženjima. *Agenti kao tehnologija* obuhvataju specifične tehnike i algoritme za balansiranje reakcija i razmatranje u arhitekturama individualnih agenata, učenje od i o drugim agentima u okruženju, pronalaženje načina za pregovore i saradnju sa drugim agentima i razvoj odgovarajućih načina formiranja i upravljanja koalicijom. *Agenti kao simulacija* predstavljaju snažne modele kompleksnih i dinamičnih realnih okruženja koji osiguravaju odgovore na kompleksne fizičke ili socijalne probleme u uslovima visokog nivoa kompleksnosti

3. Primjena agenata u interaktivnom modulu o sabiranju i oduzimanju

Kao što je već navedeno u uvodu ovog rada, na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Mostaru pokrenut je projekt istraživanja nastavnog procesa i učenja elementarne matematike pomoću skupa inteligentnih tutorskih agenata, koji sadrži ukupno osam interaktivnih modula. U trenutku pisanja ovog rada razvijen je prvi takav modul – kontentni ili sadržajni modul o sabiranju i oduzimanju – koji strukturaju više kontekstualnih interaktivnih sekvenci modula u takozvanom situacijskom modelu dio–cjelina. Važno je istaći da je glavna ideja našeg obrazovno-istraživačkog projekta proizašla iz sličnih implementiranih modula koji su dostupni na adresi prema refenci (URL 2010). U biti, sljedeća vizija moguće multiagentne arhitekture sistema za učenje elementarne matematike nastala je kao problemsko polje odnosno predmet istraživanja u projektu doktorske disertacije prvog autora, a pod mentorstvom drugog autora ovog rada, čija je izrada u toku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Istočnom Sarajevu.

A. Pregled interaktivnog modula o sabiranju i oduzimanju

Ovaj modul je načinjen kao privlačan i interaktivan alat, odnosno skup od šest situacionih sekvenci modela dio–cjelina, za efektivniju orijentaciju učenika u učenju problemskih zadataka o sabiranju i oduzimanju sa jednom ili dvije nepoznanice (sa dva ili tri dijela). Korištenjem vedro obojenih blokova učenici modeliraju *odnose* među komponentama (dijelovima i cjelini) koje su dane u problemu. Uz pomoć virtualnog učitelja (tutora), odnosno inteligentnog tutorskog agenta, učenici kroz jednostavan proces rješavanja problema dolaze do njegovog rješenja. Prilikom izgradnje vlastitog modela, učenici moraju tačno identificirati informacije koje su dane (egzistiraju) u problemskoj situaciji, kao i informacije koje su nepoznate u njoj. Prepoznavanje i rješavanje nepoznate količine je ključni (ili pak ciljani) ishod učenja u elementarnoj nastavi matematike (algebre). Ovaj modul potiče učenike na gledanje iznad površine kako bi otkrili koncepte i odnose koji su u srži svakog matematičkog problema. Nadalje, svi budući moduli su osmišljeni na način da sadrže bogate kako obrazovne sadržaje tako i nastavne metode podržane istraživanjem.

Pročitaj problem

Grgur je imao 43 sličica. Njegov brat mu je dao još nekoliko sličica. Grgur je tada imao 72 njih u njegovoj kolekciji. Koliko sličica je Grgur dobio od njegovog brata?

Izgradi svoj model

Cjelina

Dijelovi

početna količina

dobivena količina

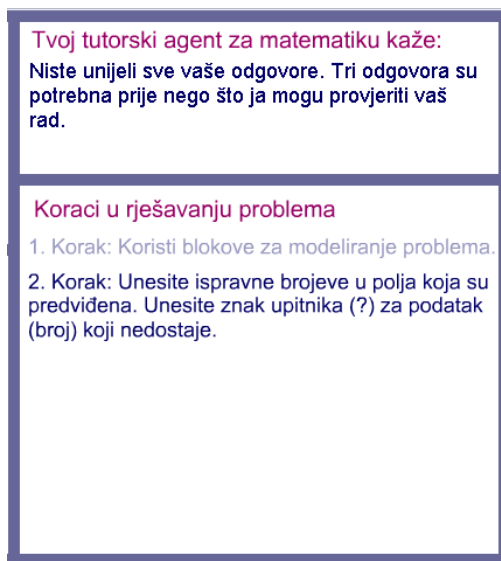
Provjeri

Slika 3: Primjer interaktivnog modula o sabiranju i oduzimanju sa jednom nepoznanicom.

Učenici ne uče samo modelirati i rješavati problemske zadatke u elementarnoj matematici, oni takođe uče kako razumjeti i pisati algebarske jednačine.

Primjer jednog interaktivnog modula o sabiranju i oduzimanju sa jednom nepoznanicom (takozvanog modela dio–cjelina) prikazan je na slici 3. U

biti, vidljiv je samo lijevi dio frejma u modulu koji služi za izgradnju modela dane problemske situacije.



Slika 4: Povratna informacija inteligentnog tutorskog agenta i koraci u rješavanju problema

Slika 4 prikazuje desni dio frejma u modulu, koji je takođe podijeljen u dva polja (prozora), od kojih gornje predstavlja poruke virtualnog učitelja koji potiče učenike na stvaranje modela s konkretnim blokovima. Njegove poruke (povratne informacije, engl. *feedback*) nude mnogo više nego jednostavni *da* ili *ne* odgovori. Na primjer, u slučaju problemskog zadatka prikazanog na slici 1, inicijalna poruka od strane tutorskog agenta za matematiku glasi: *Započni DIO–CJELINA problemske zadatke sa DVA dijela. Prati upute (korake) dane ispod te provjeravaj ovo polje u potrazi za povratnim informacijama i instant porukama*. Instant poruke koje će slijediti po pravilnom postavljanju modela biće usklađene s akcijom učenika, odnosno njegovim odgovorima. Ako student ne unese sve tražene odgovore, agent će mu poručiti: *Niste unijeli sve svoje odgovore. Tri odgovora su potrebna prije nego što ja mogu provjeriti vaš rad*. U slučaju unosa svih traženih odgovora, ali tako da je unesen pogrešan iznos za jedan od traženih dijelova agent poručuje: *Niste identificirali DIO koji nedostaje. Provjerite jeste li koristili znak upitnika u polju za DIO koji nedostaje u svom modelu*. Nadalje, u slučaju ispravnog unosa iznosa za dijelove, a neispravnog unosa iznosa za cjelinu, učenik će dobiti sljedeću instant poruku: *Vrijednost za poznati DIO je ispravna, dok je CJELINA neispravno unijeta. Vrijednost za CJELINU je dana u problemu. Ako student nakon ove poruke ponovno neispravno unese iznos za cjelinu, biće mu poručeno: CJELINA je neispravna. Tvoj matematički izraz glasi:*

$$23 + 38 = ?$$

Donje desno polje frejma u modulu predstavlja pojedine korake u rješavanju problema (ukupno četiri koraka), ali na način da tek kad učenik izvrši korak, zadan od strane virtualnog učitelja, vidi (čita) naredni korak (ako on postoji, odnosno ako ga je zadao inteligentni tutorski agent).

4. Umjesto zaključka

Ovaj rad daje sažet pregled nove paradigme učenja koja ima nedvojbeno veliki potencijal za poboljšanje efikasnosti učenja u elementarnoj nastavi matematike u kontekstu inteligentnih tutorskih agenata. Naša vizija promjena različitih struktura nastave (sadržajne, didaktičko-metodičke, interakcijske, procesne, kontekstualne, upravljačke) postavlja fokus upravo na kompleksne interakcije sa inteligentnim multiagentnim sistemima, zato što probleme interakcija između različitih učesnika u savremenom nastavnom procesu podržanom digitalnim (ICT) tehnologijama posmatramo kao probleme dva moćna informacijska procesora (ljudskog i računarskog) koji pokušavaju međusobno komunicirati preko vrlo uske veze. Brži i efikasniji način razmjene informacija između njih možemo postići sa obje strane. Sa strane učenika i nastavnika (korisnika), interaktivna tehnologija računara ograničena je količinom mašte pri instrukcijskom dizajniranju sadržaja i ljudskim organima za komunikaciju; sa strane računara, ograničenje su kako ulazno–izlazni uređaji koje učenici koriste u interakciji, tako i agentna tehnologija i njena arhitektura sistema za učenje. Pravci budućih istraživanja uključuju detaljna ispitivanja projektiranih interaktivnih modula u sklopu spomenute doktorske disertacije, koja bi omogućila precizniju i pouzdaniju implementaciju kompleksnih interakcija sa inteligentnim multiagentnim sistemima u elementarnoj nastavi matematike.

Literatura

- Banjanin 1997: M. K. Banjanin, *Tehnologija projektne nastave*, Beograd: Žel-nid.
- Banjanin 2007: M. K. Banjanin, *Komunikacioni inženjering*, Doboj: Saobra-ćajni fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu.
- Banjanin i drugi 2010: M. K. Banjanin, A. Vrdoljak, T. Gavrić-Mičić, R. Ko-vić, Multiagentni sistemi za upravljanje nepredvidivim događajima u inženjering projektima, u: *Zbornik radova sa 3. Internacionalnog na-učno-stručnog skupa "GNP 2010"*, Žabljak: Univerzitet Crne Gore.
- Luck i drugi 2005: M. Luck, P. McBurney, O. Shehory, S. Willmott, *Agent Technology: Computing as Interaction - A Roadmap for Agent Based Computing*, Southampton: University of Southampton.
- Mićanović 2008: T. Mićanović, *Modeli komunikacije za multiagentne sisteme*, Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu.
- URL 2010: URL, *Thinking Blocks™*, www.thinkingblocks.com [datum pristu-pa: 28. 4. 2010].
- Vrdoljak, Bouz–Asal 2008: A. Vrdoljak, N. Bouz–Asal. The educational po-tential of learning portals: The case of Mathematics ONLINE, u: *Zbor-nik radova sa The Third International Conference on Mathematical Science „ICM 2008“*, Al–Ain: UAE University.
- Vrdoljak i drugi 2009: A. Vrdoljak, M. K. Banjanin, M. Pikula, Digitalni alati u nastavi interaktivne geometrije, u: *Zbornik radova sa Naučno-struč-nog simpozijuma „InfoTeh 2009“*, Jahorina: Elektotehnički fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu.

ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ И ЊЕГОВО РАЗУМИЈЕВАЊЕ – СЛУЧАЈ СТУДЕНАТА РАЗРЕДНЕ НАСТАВЕ

Разумијевање појма функције је од фундаменталног значаја у процесу учења математике, те је стога у посљедњим декадама ова тема стављена у фокус истраживања у области математичког образовања (Сфард 1992, Серпинска 1992, Винер и Драјфус 1989, Евангелиду и остали 2004). Поменута истраживања су имала широк спектар разматрања. У овом раду се разматра поимање различитих репрезентација појма функције и прелазак с једне репрезентације у остале (Хит 1998).

Базирајући се на теорије Дувала (2002) и Стеинбринга (1997), те на тространи концептуално-семиотички модел који су понудили Елиа и Спи-роу (2006), у раду разматрамо везу међу дефиницијама и примјерима функција које наводе студенти разредне наставе, као и њихову способност да користе и повезују различите репрезентације функција.

Репрезентације и разумијевање појма функције

Различите репрезентације појма функције чине разумијевање овог појма нимало лаким процесом (Хит 1998). Ученици и студенти имају потешкоће при успостављању везе између различитих репрезентација појма функције (формуле, графици, дијаграми, функција задана у текстуалном облику), као и са тумачењем графика функција и симбола којима је функција представљена (Серпинска 1992). Неке од наведених потешкоћа су директна посљедица начина на који се појам функције обрађује у школама. Наиме, често се наставници ограниче само на одређене репрезентације појма функције. При увођењу појма функције најчешће користе алгебарску репрезентацију, а рјеђе графичку. Одређена истраживања су показала да је трансформација појма функције из алгебарске репрезентације у графичку лакша него трансформација у супротном смјеру (Марковиц и остали 1986).

Наведена истраживања потврђују психолошки феномен расцјепкавања: усвојена знања су расцјепкана на дијелове и тешко се повезују, умјесто да ученици имају флексибилно мишљење и да су способни да превode различите репрезентације појма једних у друге, што је у сржи математичког мишљења.

* kpjanic@gmail.com

Тространи концептуално-семиотички модел

Елиа и Спироу (2006) су понудили тространи концептуално-семиотички модел базиран на теоријама Дувала и Стеинбринга. Поменути модел се базира на двије основне идеје које се огледају у значају различитих репрезентација појма и њихових трансформација при формирању појам, као и у томе да се појам формира у интеракцији система симбола и контекста у којем је задан.

Претворба репрезентација чини фундаменталан процес при разумијевању математичких појмова. Дувал (2002) наводи да се математичка активност може анализирати у оквиру двају типова трансформација репрезентација појма. Први тип би представљао трансформације репрезентација у оквиру истог система, док би други тип чиниле трансформације репрезентација који мијењају систем, али не и сам појам.

Тространи концептуално-семиотички модел разумијевања појма функције се састоји из следећих компоненти: дефинисање појма функције од стране студената, примјери функција које наводе студенти, опсег различитих репрезентација појма функције којим располажу студенти (Елиа и Спироу 2006).

Циљ овог рада је да се испита усвојеност појма функције међу студентима разредне наставе у свјетлу тространог концептуално-семиотичког модела. Разматрамо на који начин студенти разредне наставе поимају функцију на основу дефиниција и примјера које наводе, на основу препознавања функција датих у различитим репрезентацијама и преласку из једне репрезентације у остале. Напосљетку, истражујемо везу између усвојености појма функције и способности студената да наведу различите репрезентације поменутог појма.

Методолошки оквир истраживања

Узорак нашег истраживања су чинила 44 студента разредне наставе Универзитета у Сарајеву који су похађали курс из Методике наставе математике у оквиру треће и четврте године студија. Упитник је рјешавало 27 студента четврте године студија и 17 студената треће године студија Одсјека за разредну наставу Педагошког факултета у Сарајеву. Студенти су похађали наставу математике у средњим школама по различитим наставним програмима, те су тиме стекли и различита предзнања, али су у току студија сви похађали обавезне предмете Математика у оквиру којих је велики фонд часова био посвећен појму функције. Предавања у оквиру студија су била класичног типа: формално се дефинисао појам функције, наглашавала се алгебарска и графичка репрезентација и увјежбавао поступак цртања графика функције дате формулом као и анализа на тај начин задане функције.

Студенти су рјешавали упитник (Додатак 1) у току љетног семестра академске 2009/2010. године. Упитник је садржавао четири типа задатака: задаци препознавања функције у различитим репрезентацијама; задаци трансформације; дефинисање функције; навођење примјера функције. Одговори студената у задатку дефинисања функције и примјене дефиниције на одговарајуће примјере, груписани су у категорије које омогућују да се одреди релација између дефиниције и примјера функције коју дају испитаници и различитих репрезентација функције које испитаници познају.

Кодирање података

Одговори студената на задатак дефинисања функције и навођење примјера функција груписани су у посебне категорије које омогућавају да се испитају везе између компоненти тространог модела – везе између дефиниције и примјера примјене са репрезентацијама функције.

Одговори на задатак навођења дефиниције функције су кодирани на следећи начин (Елиа и Спироу 2006):

Д1: Тачна дефиниција, уобичајена дефиниција коју налазимо у литератури намијењеној студентима разредне наставе.

Д2: Дјелимично тачна дефиниција, понуђене дефиниције указују на релацију међу варијаблама, али изостављају карактеристику везану за елементе домене (кодомене), или не указују на домену (кодомену).

Д3: Дефиниција посебног типа функције, дати одговори описују одређени тип функције (реалну функцију, бијекцију, инјекцију, сирјекцију и сл.)

Д4: Референца на неодређену релацију, одговори упућују на релацију међу варијаблама или елементима скупа, или је дат примјер било ријечима или симболима.

Д5: Остали одговори, одговори упућују на скупове, али не на релације међу њиховим елементима, или обрнуто.

Д6: Без одговора.

Одговори на задатак навођења примјера функције су кодирани на следећи начин:

1: примјер функције у којима су варијабле елементи дискретних скупова,

2: примјер непрекидних функција (примјери из физике),

3: примјер бијекције,

4: примјер који представља неодређен однос између елемената два скупа,

5: примјер једначине (дат ријечима или симболима),

6: нису дати примјери.

Квалитативну анализу смо засновали на статистичкој обради података примјеном програма SPSS (Statistical Package for Social Sciences). Том

прилоком смо утврђивали значајност разлика између аритметичких средина (t -тестом), корелацију истраживачких варијабли (коэффициенте корелације: Pearsonov и Goodmanov коэффициент и χ^2).

Резултати истраживања

а) Квантитативна анализа резултата

У овом одјелку наводимо резултате који указују на најјаче трендове које су испољили испитани студенти.

Највише успјеха студенти су остварили у идентификацији функција датих у виду текста, 85,4%, а затим у идентификацији функција представљених стреластим дијаграмом. Процентуално, најуспјешније су ријешени задаци: 1а (97,7%) и 1д (95,4%). Образложења одговора су реферисала на дефиницију функције. С друге стране, тачну дефиницију функције је навело само 43,2% испитаних студената.

Као успјешно ријешене задатке треба истаћи задатак 4д у којем су и домена и кодомена функције представљене као унија двају скупова, те задатак 6ц у којем је била понуђена линеарна функција дата у имплицитном облику. Тачне одговоре на задатак 4д је дало 88,6% испитаника, што указује на висок степен разумијевања репрезентације функције, њене домене и кодомене стреластим дијаграмом. Широка распрострањеност репрезентације линеарне функције у алгебарском облику у школској математици може објаснити чињеницу да је 72,7% испитаника тачно дговорили на задатак 6ц.

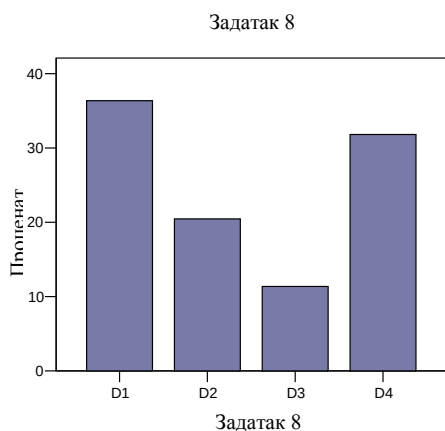
За разлику од задатака идентификације, задаци конверзије су ријешени с мање успјеха: само 31,8% студената је ријешило проблем 2, а 36,4% њих је ријешило проблем 3, гдје се тражило да се функција дата у вербалној репрезентацији преведе у алгебарску репрезентацију. Више успјеха студенти су постигли у представљању функције дате у алгебарском облику графички, њих 43,2% је функцију идентификовану у алгебарском облику представило и у графичком облику.

Процентуално најслабије ријешен задатак је задатак идентификације функције дате у графичком облику (задатак 5ц). Поменути задатак је ријешило само 25% студената. Индикативно је да у образложењима одговора студенти наводе да график функције мора бити непрекидан, те да варијабла x мора припадати једном интервалу скупа реалних бројева.

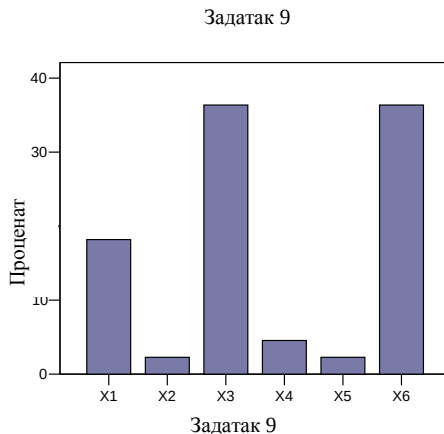
Графикони 1 и 2 приказују резултате задатака дефинисања и навођења примјера функција респективно. Само 36,4% студената је навело исправну дефиницију функције, а приближно исти број студената, тј. њих 31,8%, је навео неодређене релације као дефиницију функције. С друге стране, при рјешавању задатка навођења примјера 56,8% испитаних студената је навело коректне примјере. Овдје се истиче поистовјеђивање функ-

ције са бијекцијом, што је случај код 36,4% испитаника. Исти проценат испитаника није уопште навео примјере функција.

Графикон 1:



Графикон 2:



Табела 1 показује успјешност испитаника у рјешавању задатака препознавања функција у различитим репрезентацијама и задатака конверзије у односу на њихове одговоре на задатке дефинисања и навођења примјера функције. У табели 1 су категорије одговора на задатке дефинисања и навођења примјера функција груписане на „прихватљиве“ – одговори D1, D3, X1, X2, X3 и „неприхватљиве“ – D2, D4, D5, D6, X4, X5, X6.

Табела 1:

Тип задатка		D1-D3	D2-D6	X1- X3	X4- X6
		%	%	%	%
Задаци препознавања	Текстуални облик	50	38,6	63,6	29,5
	Алгебарски облик	40,9	20,5	43,2	20,5
	График у правоуглом коор. систему	34,1	15,9	38,6	13,6
	Стреласти дијаграм	43,2	22,7	45,5	22,7
Задаци конверзије	Проблем 2	20,5	9,1	15,9	15,9
	Проблем 3	20,5	13,6	29,5	9,1
	Проблем 7	22,7	18,2	31,8	13,6

Резултати кростабулације показују да су студенти који су навели „прихватљиве“ дефиниције и примјере функција остварили и боље резултате у задацима препознавања и конверзије, него што је случај са студентима који су навели „неприхватљиве“ дефиниције и примјере функција. Осим тога, може се уочити редослијед успјешности у препознавању различитих

репрезентација функција. Највећи број студената је препознао примјере функција датих у текстуалном (вербалном) облику, слиједи репрезентација стреластим дијаграмом.

Такође треба истаћи чињеницу да су испитани студенти исказали одређену недоследност у давању тачних одговора у различитим типовима задатака. Наиме, велики број студената, који нису дали било прихватљиве дефиниције или прихватљиве примјере функција, препознали су одређене репрезентације функција. Исто тако, међу студентима који су исказали успјех у дефинисању и навођењу примјера функција је био велик број оних који нису знали те одговоре искористити у задацима препознавања и конверзије. Разматрајући везе између успјеха у рјешавању појединих задатака, истиче се највећа зависност међу задацима 1 – препознавање функције у вербалном облику и задатка 8 – дефинисање функције; задатак 9 – навођење примјера у односу на задатак 8 – дефинисање; задатак 4 – препознавање Венових дијаграма у односу на задатак 8; задатак 3 – конверзија вербалне репрезентације у алгебарску од задатка 8.

Овакве резултате можемо оправдати чињеницом да у процесу наставе на студију за разредну наставу, при обради појма функције полази од формалне дефиниције и примјера функција које се илуструју Веновим дијаграмима. У том случају се примјењује тространи модел, што је и дало позитивне резултате. Стога треба размотрити могућност веће примјене поменог модела и при обради осталих тема везаних за функције.

б) Квалитативна анализа

Навешћемо неке од индикативних одговора испитаника на поједина питања у упитнику.

Студенти су се у примјени дефиниције функције најбоље показали при рјешавању задатка 1, тј, у идентификовању функције дате у вербалном (текстуалном) облику. Образложења одговора су прецизно упућивала на кључне ријечи дефиниције: за сваки елемент домене, те постоји тачно један елемент у скупу слика.

На исти начин су студенти реаговали и при образлагању одговора на идентификацију функција представљених стреластим дијаграмом. За разлику од испитаника Елиа и Спироу, наши испитаници нису били збуњени представљањем домене и кодомене (задатак 4ц, 4д) у виду уније два скупа.

Но у идентификацији функције представљене графиком у правоуглом координатном систему и у алгебарском облику, образложења одговора се нису базирала на дефиницији.

У Задатку 6, гдје је међу понуђеним алгебарским изразима требало издвојити оне који могу да представљају функцију, најраширеније образложење одговора студената је указивало на то да функција мора да садржи двије варијабле. Одговори да изрази: $2x - 5 = 0$ (задатак 6а) и $4x +$

$\frac{1}{2} = 0$ (задатак 6б) не могу представљати функције образложени су тиме да се у изразу јавља само једна „непозната“ и да израз представља једначину. Сличну аргументацију студенти су навели и у образложењу одговора (задатак 6д) да израз $x^2 + y^2 = 9$ представља функцију јер се у њему јављају двије варијабле. У случају задатак 6ф, негативни одговори су аргуменотвани чињеницом да варијабла x „долази из 2 скупа“, што је у супротности са тачним одговорима истих студената на задатак 4ц (стреласти дијаграм), гдје је домена такође дата као унија два скупа.

При идентификацији функције представљене графиком у правоуглом координатном систему, уочава се тренд да се као функција прихвати само непрекидно пресликавање. График функције $y = |x|$ за $x \in (-5, -1) \cup (0, 1) \cup (2, 5)$ није прихваћен као функција, јер „график се прекида“.

У задатку који се односи на дефинисање функције, уочава се изостанак кључних ријечи дефиниције „за свако“ и „постоји тачно једно“. Такође, извјестан број студената сматра да је функција било какво придруживање елемената два скупа. С друге стране, при навођењу примјера функција испитаници су наводили примјере бијекција. Репрезентација коју су користили је била вербална (текстуална). Само двоје студената је навело примјер функције из физике, те двоје студената који су навели примјер користећи алгебарску репрезентацију. Овакви одговори могу упутити да су студенти најсигурнији у идентификацији и артикулацији функција датих текстуално (што је потврђено успјехом у рјешавању задатака 1).

Закључак

Резултати истраживања су показали на који начин студенти разредне наставе разумију појам функције. Истиче се чињеница да велики постотак студената поистовијећује појам функције са појмом бијекције. Овакав резултат је у складу са налазима ранијих истраживања (Винер и Драјфус 1989, Елиу и Спироу 2006). Овакво поимање функције је повезано са процесом пребројавања и придруживања које студенти прихватају као природне процесе. Други тренд у поимању функције међу студентима разредне наставе је тај да функцију поистовијећују са алгебарским изразом са двије варијабле. Одређени број студената је у образложењима својих одговора експлицитно навео да једино алгебарски израз са двије варијабле може да представља функцију. Трећи уочени тренд односи се на график функције: према мишљењу студената само непрекинут график може да представља функцију. Овакво поимање функције од стране студената је поражавајуће, имајући на уму вријеме и простор у Наставном плану и програму предмета Математика које је посвећено изучавању функција и анализи графика функција (и то разломљене функције, дакле функције која има прекиде).

Један од основних циљева овог истраживања је било утврдити које репрезентације функција студенти разредне наставе препознају, те да ли су у стању да изврше конверзију једне репрезентације у другу. Уочено је да су

студенти најуспјешнији у идентификацији функција у текстуалном облику, а затим у облику стреластог дијаграма, што се може објаснити да се након дефинисања функције, најчешће наводе примјери функција представљени стреластим дијаграмом, па се такви примјери „урежу“ у памћење студента. Студенти нису били у стању успјешно рјешавати задатке конверзије различитих репрезентација функције. Рјешавање овог типа задатака представља предуслов за потпуније разумијевање појма функције, те је препорука да се обрада наставне теме функције употпуни навођењем примјера и рјешавањем задатака овог типа.

Литература

- Винер, Драјфус 1989: S. Vinner, T. Dreyfus, Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4), 356–366
- Дувал 2002: R. Duval, The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 1(2), 1–16
- Евангелиду и остали 2004: A. Evangelidou, P. Spyrou, I. Elia, A. Gagatsis, University students' conceptions of function, у M. Johnsen Hoines and A. Berit Fuglestad (ред) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, Bergen University College, Norway, 351–358
- Елиа и Спироу 2006: I. Elia, P. Spyrou, How students conceive function: a tri-archic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept, *The Montana Mathematics Enthusiast*, Vol 3, no2, 256–272
- Марковиц и остали 1986: Z. Markovits, B. Eylon, M. Bruckheimer, Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics* 6 (2), 18–28
- Серпинска 1992: A. Sierpinska, On understanding the notion of function, у G. Harel, E. Dubinsky (ред), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, United States, 25–58
- Стеинбринг 1997: H. Steinbring, Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169
- Сфард 1992: A. Sfard, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function, G. Harel, E. Dubinsky (ред), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, United States, 59–84
- Хит 1998: F. Hitt, Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function, *The Journal of Mathematical Behaviour* 17 (1), 123–134

Додатак 1 Упитник за студенте разредне наставе

Задатак 1.

Објасните да ли су сљедећим „правилима“ задане функције:

- a) Свакој фудбалској утакмици придружујемо постигнути резултат;
- b) Артиклима у једној продавници придружијемо купце;
- c) Сваком писменом раду придружујемо оцјене двојице оцјењивача;
- d) Сваком упосленику придружујемо радно мјесту у фирми;
- e) Сваком ученику у одјељењу придружујемо његовог учитеља.

Проблем 2

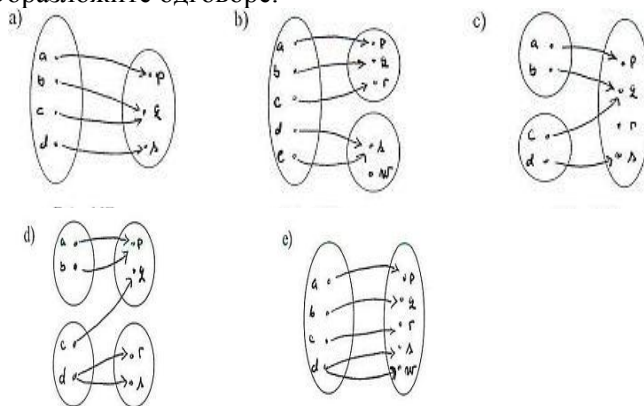
На основу постигнутих резултата на тесту из математике, студенти се категоришу или као успјешни или као неуспјешни. Са А означимо скуп успјешних студената, а са Б скуп неуспјешних. Користећи бројке 0 и 1 конструисати функцију (дати њену формулу) која описује успјех на тесту.

Проблем 3.

Написати формулу функције која сваком артиклу придружује нову цијену која је 20% нижа од оригиналне цијене артикла.

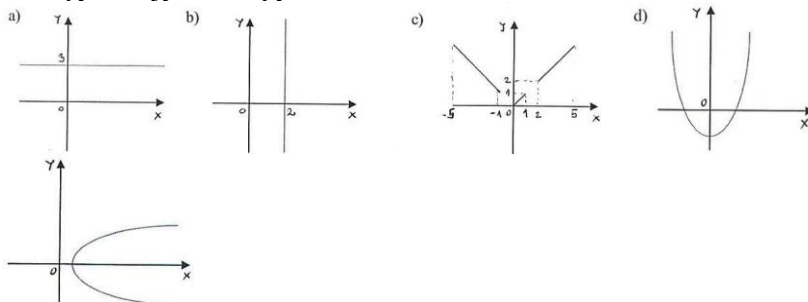
Задатак 4.

Да ли су придруживања представљена Веновим дијаграмима функције? Образложите одговоре.



Задатак 5.

Ако x означава независну варијаблу, који од сљедећих графика представља функцију? Заокружите!



Задатак 6.

Који од алгебарских израза може да представља функцију. Образложите одговор..

a) $2x - 5 = 0$	ДА	НЕ
b) $4y + \frac{1}{2} = 0$	ДА	НЕ
c) $4x - 3y + 1 = 0$	ДА	НЕ
d) $x^2 + y^2 = 9$	ДА	НЕ
e) $x^2 - y = 0$	ДА	НЕ
f) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$	ДА	НЕ

Проблем 7.

Нацртати график једног од израза из задатка 6 за који сматрате да је функција.

Задатак 8.

Дефинисати функцију.

Задатак 9.

Наведите два примјера примјене функције у свакодневном животу.

ПРИМЕНА ТАКСОНОМСКОГ МОДЕЛА НА ОДРЕЂИВАЊЕ РАЗЛИКЕ У КВАЛИТЕТУ ЗНАЊА УЧЕНИКА РАЗЛИЧИТИХ ОБРАЗОВНИХ УЗРАСТА

Употреба образовног стандарда, односно покушаја да се сагледа крајњи исход заједничког рада наставника и ученика у једној школској години у виду знања, вештина и навика које ученици треба да усвоје, знају да репродукују и примене, повећава се последњих година у многим земљама. То значи да се одређују задаци за поједини предмет, али и за сваки разред, и то тако да се прецизирају: *садржаји* програма, односно шта ученик треба да зна, *квантум* (колико) и *ниво* знања по квалитету, али не са становишта шта наставник да предаје, већ шта ученик треба да зна. У уређивању било које од наведених компоненти увек треба полазити од одговарајуће научне *методологије*. Најкомпликованије, а делом и најдубиозније је одређивање *образовних* нивоа. У свету за ово не постоји идеална методологија, јер се о селекцији садржаја програма по нивоима тек у новије време више расправља.

Амерички научник Бењамин С. Блум (1981) је један од аутора који је, заједно са својим сарадницима, међу првима успео да систематизује циљеве и задатке наставе, је. Имајући у виду чињеницу да се знања која су организована у некакав систем боље усвајају и брже памте од изолованих и неповезаних чињеница, он је разрадио *таксономију* у области *когнитивног* подручја која садржи васпитно-образовне циљеве поређане у хијерархијски низ, од најједноставнијих (памћење, разумевање, примена) па до оних највиших и најсложенијих (анализа, синтеза, евалуација), где доминирају виши когнитивни процеси.

Истраживања су показала да су таксономски модели веома погодно средство за проучавање и вредновање ефикасности наставног процеса. Њихов значај је у томе што помажу да се формулишу такви задаци и питања која ће бити хијерархијски поређана по категоријама, при чему се мора водити рачуна о сложености свих категорија, односно нивоима знања по квалитету, процесу мишљења и решавања проблема. Ако се пође од најнижих категорија знања (памћење, препознавање, репродукција) па до највиших (схватање, примена, решавање проблема, креативност), могуће је за било коју од категорија саставити одређени број питања и задатака који би били индикатори и мерили знање и понашање које је карактеристично за сваку од категорија.

* nmalinovic@yahoo.com

Блумова таксономија је подстакла настанак великог броја нових таксономија, али се као проблем јавља израда таксономских модела и инструментата провере. Проблем се огледа у одређивању јасне границе између категорија знања и способности, односно одређивању образовних нивоа. Сходно томе, поставља се и проблем формулисања задатака у тестовима који би били индикатори и мерили одговарајући квалитет, што за собом повлачи питање валидности задатака, односно да ли задаци мере квалитет знања који треба да мере.

Тако је проучавање образовних постигнућа у настави математике и природних наука, пројекат који води *Међународно удружење за процену образовних постигнућа (International Association for the Evaluation of Educational Achievement - IEA)* са циљем да на међународном нивоу вреднује и прати развој постигнућа ученика основношколског узраста из природних наука и математике, као и да унапреди поучавање и учење математике и природних наука обезбеђивањем података о ученичким постигнућима у вези са различитим врстама курикулума, међународне праксе и школског окружења (Мулис и други 2005). Истраживање се реализује сваке четврте године и до сада су реализована четири циклуса. Резултати добијени овим истраживањем односе се на постигнућа ученика четвртог и осмог разреда основне школе, при чему је квалитет знања ученика одређиван према једној од варијаната Блумове таксономије.

Појмови који се изучавају у почетној настави математике уводе се поступно и знања која се стичу у једном разреду надограђују се и проширују у наредним разредима тако да чине један систем појмова који је спирално распоређен и протеже се кроз прва четири разреда основне школе. Тако су садржаји о природним бројевима који се изучавају на овом степену образовања међусобно повезани и распоређени тако да се: у првом разреду разматрају појмови у оквиру прве и друге десетице, а затим проширују до 100; у другом разреду се проширују знања о бројевима прве стотине; у трећем се разматрају појмови у оквиру прве хиљаде, а у четвртном сви остали природни, односно вишецифрени бројеви. Уједно, појмови се уводе у складу са нивоима знања које треба постићи у процесу учења и, с обзиром на проширивање стечених знања у сваком следећем разреду (оних из претходних), очекује се да се повећава и њихов квалитет, односно да квалитет знања о природним бројевима који су ученици постигли у једном разреду, буде већи у следећем. Овај рад се бави управо тим проблемом.

Актуелност проблема истраживања степена остварености циља и програмских задатака помоћу таксономског модела, а на основу тога и разлике у степену остварености циља и задатака наставе на различитим образовним узрастима, произлази и из чињенице да се савремена настава базира управо на дефинисаним васпитно-образовним циљевима, што омогућава: адекватно планирање поступака и процеса у настави, ефикаснију индивидуализацију процеса учења, одређивање критеријума и стандарда оцењивања знања ученика, стицање трајног и квалитетног знања и др.

1. Методолошки оквир истраживања

У сагледавању разлике у успеху ученика различитих образовних узраста, пошло се од таксономије циљева и задатака наставе и нивоа знања по квалитету које они треба да мере, као и обима (квантитета) и квалитета знања које ученици треба да поседују о природним бројевима, на крају школске године.

Циљ истраживања, је да се: изради таксономски модел и инструменти провере и утврди степен остварености задатака наставе о природним бројевима у трећем и четвртном разреду за сваку категорију знања дату у таксономском моделу и на основу тога разлика у успеху ученика на овим образовним узрастима.

У складу са постављеним циљем претпоставка је да се *успех ученика у вредновању квалитета знања према категоријама таксономског модела повећава са повећањем образовног узраста ученика.*

Такође, претпоставља се да се: *са повећањем квалитета знања према таксономском моделу операционализације циља и задатака наставе смањује степен остваривања програмских задатака наставе о природним бројевима у III и IV разреду основне школе.*

У истраживању је коришћена *дескриптивна метода* у аналитичкој, компаративној и класификационој варијанти. Анализом се дошло до података о таксономским моделима, циљевима и програмским задацима наставе, односно колико су они операционализовани и класификовани у погледу конкретизације, реализације и могућности провере остварености захтева. Класификацијом програмских задатака датих у Наставном програму математике за основну школу конструисан је таксономски модел према нивоима знања по квалитету.

Избор технике и инструмената који су примењивани у овом истраживању, извршен је у складу са природом проблема и метода у истраживању. Унутар дескриптивне методе примењивана је *техника анализе садржаја и тестирање.*

Техника анализе садржаја коришћена је да би се дошло до података о описима нивоа знања по квалитету који обезбеђују основу за доношење закључака о успеху ученика, као и приликом испитивања валидности задатака датих у тестовима. Логичком анализом испитана је садржајна валидност датих задатака којом је утврђено да ли задаци обухватају све захтеве дате у одговарајућим тематским задацима и да ли су у складу са нивоима знања које треба да мере, а који су одређени таксономским моделом.

Техника тестирања и тест као мерни инструмент коришћени су за утврђивање успеха ученика. Коришћен је критеријски тест којим се утврђује шта и до ког нивоа су ученици научили у области планираног.

1.1. Таксономски модел и критеријски тестови знања

За потребе истраживања конструисан је таксономски модел образовних циљева и задатака у когнитивном подручју, који мери квалитет стеченог знања и развој неопходних способности. Категорије су хијерархијски поређане према нивоима знања по квалитету. Квалитет знања изражава се у степену усвојености чињеница и генерализација. Зависно од степена усвојености, знање може бити различитог квалитета.

Таксономија садржи пет главних категорија: *препознавање, репродукција, схватање, уопштавање и примена и решавање проблема.*

За сваку категорију, сходно истраживању, дефинисане су поткатегорије које ближе одређују садржаје образовних циљева сваке категорије, а које овде наводимо.

1. Препознавање

1.1. *Упознати појединости садржаја (појмове, чињенице, правила, појаве):* стећи представу о појмовима природног броја; препознати предмете (цртеже) који у себи садрже појам, у низу понуђених одговора препознати тражени податак, правило, принцип и сл.

1.2. *Именовање појединости садржаја (вербално и невербално):* вербално именовање појмова природног броја, својства операција и релација; невербално (симболичко) записивање појмова, процеса, правила.

1.3. *Знање значења појединости садржаја:* значење броја, релација и операција препознати путем перцепције и бројања; знати значење вербалних и невербалних симбола.

2. Репродукција

2.1. *Знати правила повезивања чињеница грађе у целину:* повезује научене појмове у оквиру наученог правила (о релацијама и операцијама) с конкретним предметима, али још не разуме та научена правила; зна појмове, чињенице, принципе, правила и може да их репродукује на репрезентативним примерима, али без дубљег улажења у њихово значење.

2.2. *Знати методе класификовања делова садржаја при стварању целине:* знати начине формирања класа једнакобројних скупова при образовању коначног низа природних бројева; знати поступак настанка вишецифреног броја помоћу бројевних класа (јединице, хиљаде, милиони,...).

2.3. *Знати смисао, логику повезивања делова садржаја у целину:* знати логику записивања бројева помоћу цифара у декадном бројевном систему; знати логику ређања природних бројева у коначан бројевни низ; знати логику придруживања бројева тачкама бројевне праве.

2.4. *Знати писмено или усмено објаснити градиво према „оригиналу“:* знати верно образложити својим речима или навођењем примера, чињенице, повезаност чињеница, узроке, последице и закључке; користити стечена знања за решавање познатих (шаблонских) задатака, али не и код решавања сасвим нових и непознатих.

Знања на степену препознавања и репродукције су основна знања и представљају минимум знања која треба да поседује сваки ученик.

3. Схватање

3.1. Превођење научених садржаја из једног у друго подручје: знати путеве, начине, методе превођења математичких садржаја из описа у цртеж, илустрацију, графикон, схему, модел итд.; знати превођење математичког вербалног садржаја у форму математичке симболике и обратно.

3.2. Тумачење садржаја: знати другачије посматрање садржаја (способност редифинисања); знати уочити скривено значење неког податка (способност увиђања необичног); знати према тезама верно изложити чињенице, извести последице и закључке.

4. Уопштавање и примена (оперативно знање)

4.1. Познавање смисла, логике уопштавања: знати логику индуктивног начина упознавања појмова; познавати смисао генерализације при усвајању правила, метода и закона (особина) рачунских операција; изложити садржаје логички и с разумевањем.

4.2. Знати стечено знање примењивати у пракси: примењивати знање у ситуацијама сличним упознатим; знати издвојити битно и апстраховати споредно при изграђивању појмова природног броја; знати логички поступак долажења до решења задатка.

5. Креативно (стваралачко) решавање проблема

5.1. Анализа садржаја проблема и проблемске ситуације: знати уочити проблемску ситуацију и дефинисати проблем; рашчланити проблем на познате елементе (претпоставке), открити односе међу њима и начин повезивања.

5.2. Синтеза елемената проблема у целину: знати објединити елементе у целину (израз, формулу); знати логички поступак долажења до решења проблема.

5.3. Евалуација (процена) решења: знати извршити евалуацију према унутрашњим критеријумима, тј. извршити проверу тачности решења; знати проценити шта ће се десити изменом неких елемената у проблему.

Аналогно Блумовој таксономији у когнитивном подручју, и ова таксономија се може поделити у две групе. У *прву групу* улазе ниже категорије знања и једноставнији облици понашања (препознавање, репродукција, перцепција, памћење), а у *другу* виши нивои знања (схватање, примена, уопштавање, решавање проблема, интелектуалне способности). Прва група, сходно *Блумовој таксономији* у когнитивном развоју којом се стичу основна знања названа је група за стицање *знања*, а друга, група за стицање знања *с разумевањем*, јер све категорије те групе подразумевају таква знања.

У табели 1 је дат шематски приказ таксономског модела.

Табела 1: Таксономски модел операционализације задатака наставе

Група	Категорије	Поткатегорије
1. Репродуктивна	1.00 Препознавање	1.10. Познавање појединости
		1.20. Именовање појединости
		1.30. Знање значења појединости
	2.00 Репродукција	2.10. Знање правила повезивања
		2.20. Знање метода класификовања
		2.30. Знање логике повезивања
		2.40. Знање објашњавања
2. Продуктивна	3.00 Схватање	3.10. Превођење
		3.20. Тумачење
	4.00 Операционалност	4.10. Уопштавање
		4.20. Примена
	5.00 Креативно решавање проблема	5.10. Анализа
		5.20. Синтеза
		5.30. Евалуација

У сагледавању степена остваривања програмских задатака наставе математике пошло се од операционализације задатака почетне наставе за сваки разред и таксономског модела, управо због њихове изузетне важности у расветљавању овог проблема. Евалуација се врши према категоријама таксономског модела.

За утврђивање резултата евалуације, конструисани су *критеријски тестови знања* којима се утврђује *шта* и *до ког нивоа* су ученици научили у области онога што је планирано у одређеном предмету (Вучић 1979: 26–35). За сваки програмски задатак се израђују задаци и питања којима се испитује да ли је циљ постигнут или није.

Тематски задаци којима се исказује *шта* ученици треба да знају након обраде садржаја, дефинисани су на нивоу разреда и дати су у Наставном програму математике за основну школу. До *ког нивоа* су ученици остварили тематске задатке, одређује се таксономским моделом. Према томе, питања и задаци за потребе тестирања рађени су према захтевима тематских задатака и таксономског модела.

Конструисано је пет критеријских тестова за сваки разред: *тест препознавања*, *тест репродукције*, *тест схватања*, *тест операционалности* и *тест решавања проблема*. Сваки од њих мери одговарајућу категорију знања по квалитету дату у таксономском моделу.

Број задатака у сваком тесту зависио је од захтева који су обухваћени датим тематским задатком и за сваки од њих формулисан је бар један задатак у тесту. Задаци су, такође, оцењивани према захтевима тематских задатака, јер сваки од израђених тестова мери исти квалитет знања, па није било оправдано рангирати их по комплексности. Тако се сваки задатак у

тесту бодује максимално са онолико поена колики су захтеви тематског задатка на који се односи садржај.

У тестовима су били заступљени: задаци алтернативног (двоструког) избора, задаци вишеструког избора, задаци допуњавања, задаци откривања веза и односа међу датим елементима и задаци са конструкцијом одговора (задаци отвореног типа) које сачињавају задаци који налажу да се кратко одговори на дато питање и задаци за решавање (са сложенијим одговором). Задаци алтернативног и вишеструког избора, допуњавања и откривања веза и односа коришћени су у тестовима препознавања, јер поступак долажења до њиховог решења подразумева знање на нивоу препознавања. Задаци допуњавања, коришћени су и у тестовима репродукције, али само у случајевима у којима су ученици требало да на основу датих података у задатку изведу закључке допуњавајући одговарајуће исказе. У свим осталим тестовима коришћени су само задаци отвореног типа прилагођени категорији знања коју су требали да мере.

При вредновању *степенa остварености програмских задатака*, између осталих, узимају се у обзир и следеће компоненте вредновања: у којој мери је ученик усвојио и разумео *знања* која проистичу из програмских задатака; колико су та знања *применљива* и *функционална*, односно како ученици умеју да користе стечена знања у решавању разних проблема и усвајању нових математичких знања; оспособљеност ученика да релативно брзо, тачно, спретно и до одређеног степена *увешбаности* изводе поједине интелектуалне, практичне и друге операције (нпр. писмено исказивање знања, технику решавања математичких проблема, служење симболима, овладавање разним алгоритмима итд.); формираност одређених корисних навика: јасно и концизно писмено изражавање, уредност и систематичност у раду, одговорност и самосталност у раду и др.; допринос наставе математике у развијању *способности* ученика: интелектуалних (анализа, синтеза, примена), менталних (логичког мишљења, расуђивања, закључивања, стваралачког мишљења), перцептивних (посматрање, опажање) и др.

Интерпретација резултата, с обзиром на врсту теста, односила се на проценат решености одговарајућих задатака, а класификација степена остварености програмских задатака дата је у табели 2.

Табела 2: Интерпретација резултата теста, с обзиром на степен остварености програмских задатака

Степен остварености програмских задатака изражен у %	Опис резултата				
	Тест препознавања	Тест репродукције	Тест схватања	Тест операционалности	Тест решавања проблема
0%–20.0%	Врло низак ниво препознавања	Врло низак ниво репродуктивног знања	Врло низак ниво схватања	Врло низак ниво операционалности	Врло низак ниво решавања проблема
20.1%–40.0%	Низак ниво препознавања	Низак ниво репродуктивног знања	Низак ниво схватања	Низак ниво операционалности	Низак ниво решавања проблема
40.1%–60.0%	Просечан ниво препознавања	Просечан ниво репродуктивног знања	Просечан ниво схватања	Просечан ниво операционалности	Просечан ниво решавања проблема
60.1%–80.0%	Изнад просечан ниво препознавања	Изнад просечан ниво репродуктивног знања	Изнад просечан ниво схватања	Изнад просечан ниво операционалности	Изнад просечан ниво решавања проблема
80.1%–100%	Висок ниво препознавања	Висок ниво репродуктивног знања	Висок ниво схватања	Висок ниво операционалности	Висок ниво решавања проблема

Евалуација се односила на степен остварености програмских задатака наставе о природним бројевима. Највећи број програмских задатака у оквиру једног разреда омогућава брзу, непосредну евалуацију. Ради се о крајњој евалуацији, па се за сваки програмски задатак могу постизати и виши нивои знања по квалитету од оних који су садржани у њему. Наиме, знања која се стичу на почетку школске године на једном нивоу, биће вишег нивоа на крају, јер ће бити интегрисана у систем знања која следе.

1.2. Узорак истраживања

Узорком су обухваћени ученици три основне школе и то: по пет одељења ученика III и IV разреда О.Ш. „Радоје Домановић“, шест одељења III и пет одељења IV разреда О.Ш. „Вук Караџић“ и по три одељења III и IV разреда О.Ш. „Јован Јовановић Змај“ из Враћа у популацији ученика Пчињског округа. Узорак школа и одељења условљен је реалним могућностима истраживача. Укупно је тестиран 341 ученик III разреда и 315 ученика IV разреда, што знатно премашује стопу бирања 0.05, односно 5%. Истраживање је обављено у периоду мај–јун школске 2005/2006. године. Тестови су рађени редом, почевши од теста препознавања, па све до теста

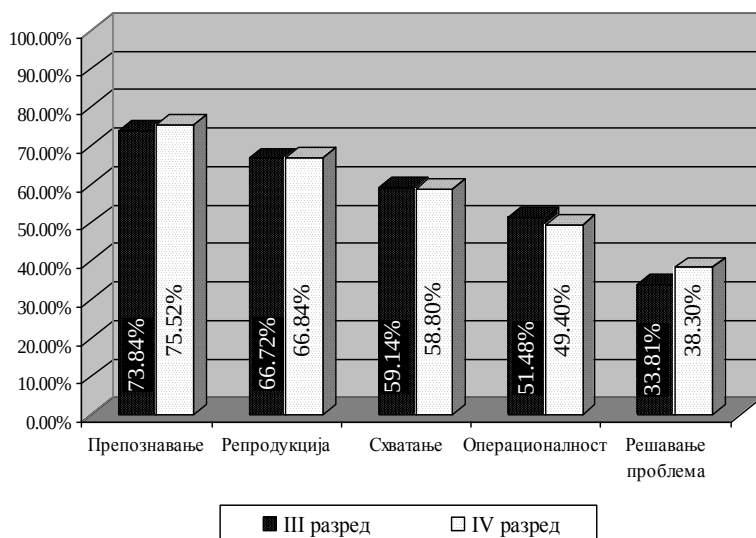
креативног решавања проблема који претпоставља знање на највишем нивоу по квалитету.

2. Анализа резултата истраживања

2.1. Степен остварености програмских задатака у односу на категорије знања

Да бисмо утврдили разлику између успеха ученика на различитим образовним узрастима, потребно је утврдити степен остварености програмских задатака који се односе на садржаје о природним бројевима који се изучавају у III и IV разреду, у односу на категорије знања таксономског модела. Израчунат је проценат решености задатака који се односе на садржаје о природним бројевима који се изучавају у III и IV разреду, и на основу добијених резултата израчунате су одговарајуће *t*-вредности разлике између успеха ученика међу свим категоријама знања таксономског модела. Добијени резултати приказани су графиком 1 и табелама 3 и 4.

Графикон 1: Проценат решености задатака по категоријама знања у III и IV разреду



На основу процента решености задатака, а узимајући табелу интерпретације резултата као критеријум успешности, видимо да су ученици постигли: *изнад просечан ниво знања* у категоријама препознавање и репродукција и у III и у IV разреду; *просечан ниво знања* у категоријама схватање и операционалност у оба разреда и *низак ниво знања* у категорији креативног решавања проблема, такође у оба разреда.

Табела 3: Статистичка значајност разлика по категоријама таксономског модела у III разреду

Категорија знања	Препознавање		Репродукција		Схватање		Операционалност		Решавање проблема	
	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
Препознавање			2.001	0.05	4.040	0.01	6.056	0.01	11.055	0.01
Репродукција	-2.001	0.05			2.012	0.05	3.999	0.01	8.787	0.01
Схватање	-4.040	0.01	-2.012	0.05			1.969	0.05	6.620	0.01
Операционалност	-6.056	0.01	-3.999	0.01	-1.969	0.05			4.562	0.01
Решавање проблема	-11.055	0.01	-8.787	0.01	-6.620	0.01	-4.562	0.01		

Из табеле 3 видимо да у III разреду статистички значајна разлика постоји у свим случајевима и високо је значајна на нивоу 0.01 или 0.05. Највећа статистички значајна разлика је између категорија препознавање и решавање проблема ($t=11.055$), док је најмања између категорија схватање и операционалност и износи $t=1.969$. Уопште, примећујемо да је најмања разлика између суседних категорија и то на нивоу значајности 0.05, осим у случају категорија операционалности и решавања проблема, где је ниво значајности 0.01, а највећа између категорије решавања проблема и осталих категорија.

Табела 4: Статистичка значајност разлика по категоријама таксономског модела у IV разреду

Категорија знања	Препознавање		Репродукција		Схватање		Операционалност		Решавање проблема	
	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>p</i>
Препознавање			2.391	0.05	4.460	0.01	6.822	0.01	10.000	0.01
Репродукција	-2.391	0.05			2.057	0.05	4.377	0.01	7.374	0.01
Схватање	-4.460	0.01	-2.057	0.05			2.297	0.05	5.169	0.01
Операционалност	-6.822	0.01	-4.377	0.01	-2.297	0.05			2.778	0.01
Решавање проблема	-10.000	0.01	-7.374	0.01	5.169	0.01	-2.778	0.01		

Из табеле 4 видимо да у IV разреду статистички значајна разлика постоји у свим случајевима и високо је значајна на нивоу 0.01 или 0.05. Највећа је између категорија препознавање и решавање проблема ($t=10.000$), док је најмања између категорија репродукција и схватање и износи $t=2.057$. Уопште, примећујемо да је најмања разлика између суседних

категорија и то на нивоу значајности 0.05, осим у случају категорија операционалности и решавања проблема, где је значајна на нивоу 0.01. Највећа разлика је између категорије решавања проблема и осталих категорија.

Такође, разлика се повећава са повећањем квалитета знања ученика одређеног таксономским моделом, почев од категорије препознавање па до категорије креативног решавања проблема. Тако је, када је у питању разлика успеха ученика између категорије препознавања и осталих категорија, најмања између препознавања и репродукције ($t=2.391$), а највећа између препознавања и креативног решавања проблема ($t=10.000$). Између категорије репродукције и осталих категорија, разлика се такође повећава, где је најмања између репродукције и схватања ($t=2.057$), а највећа између репродукције и креативног решавања проблема где је $t=7.374$. За категорију схватања важи исто, с обзиром да је $t=2.297$ и $t=5.169$ у случајевима разлике између схватања и операционалности и схватања и креативног решавања проблема респективно.

Такође, с обзиром да се t -вредност повећава што је разлика већа између категорија знања таксономског модела, можемо прихватити претпоставку да се са повећањем квалитета знања смањује успех ученика у решавању задатака који мере степен остварености програмских задатака наставе математике који се односе на садржаје о природним бројевима у III и IV разреду.

2.2. Разлика између успеха ученика на различитим образовним узрастима

На основу добијених резултата који су дати графиконом 1 може се видети да су ученици, на различитим образовним узрастима, односно на образовним узрастима III и IV разреда основне школе, у истим категоријама постигли исти ниво знања, с обзиром на интерпретацију резултата. Такође, проценат решености задатака који мере степен остварености програмских задатака који се односе на садржаје о природним бројевима у III и IV разреду, приближно је исти у свим категоријама знања таксономског модела.

У табели 5 дата је t -вредност разлике између успеха ученика у категоријама знања таксономског модела у III и IV разреду.

Табела 5: Статистичка значајност разлика између процената у III и IV разреду

Категорија знања	D_f		t	p
	III разред	IV разред		
Препознавање	330	310	0.488	-----
Репродукција	329	309	0.032	-----
Схватање	329	301	-0.086	-----
Операционалност	323	289	-0.513	-----
Решавање проблема	310	293	1.147	-----

На основу података из табеле, видимо да статистички значајна разлика не постоји ни у једној категорији знања таксономског модела, а која се односи на резултате које су ученици постигли у III и IV разреду основне школе. При том, разлика је највећа у категорији креативног решавања проблема, и то у корист IV разреда, али још увек није довољно велика да би била статистички значајна.

Дакле, није потврђена претпоставка да се успех ученика у вредновању квалитета знања према категоријама таксономског модела повећава са повећањем образовног узраста ученика у млађим разредима основне школе.

Закључна разматрања

Резултати добијени истраживањем указују на чињеницу да ученици трећег и четвртог разреда у Србији углавном поседују основна знања о природним бројевима која подразумевају препознавање и репродуковање садржаја који се изучавају на овом нивоу школовања. У категоријама продуктивне групе које подразумевају схватање и примену стечених знања на решавање рутинских проблема, ученици су постигли тек просечан ниво знања, док су у категорији решавања проблема исте групе постигли чак низак ниво знања.

Упоређивањем резултата добијених TIMSS истраживањем који се односе на успех ученика VIII разреда код нас у когнитивним доменима и резултате овог истраживања у III и IV разреду, и у једном и у другом највиши резултати добијени су у категорији знање чињеница, потом у категорији схватања појмова, а најслабији за резоновање, односно у категорији решавања проблема. Резултати добијени и једним и другим истраживањем указују на чињеницу да наши ученици нису довољно оспособљени да повезују знања из сродних научних дисциплина, да повезују појмове у системе и да примењују теоријска знања у практичним ситуацијама и за решавање проблема.

Такође, TIMSS истраживањем закључено је да се у настави мање пажње посвећује сложенијим менталним операцијама, највише се негује процедуралност, односно омогућава се ученицима да добро савладају поступке решавања задатака, те су се слабији резултати постигнућа ученика могли и претпоставити, када је у питању испитивање присуства сложенијих когнитивних способности и вештина (Антонијевић и Вељковић 2005: 81–107).

Тиме се може објаснити и непостојање разлике у успеху ученика по категоријама знања на различитим образовним узрастима, с обзиром да се настава у нас још увек изводи на традиционалан начин, и да се не води рачуна о цикличном распореду садржаја математике, при чему би знања из претходних разреда требало да се проширују и надограђују у наредним разредима. Тако се еквивалентни садржаји у сваком разреду обрађују без

ослонца на знања која су ученици стекли о њима у претходним разредима, па се стиче погрешан утисак о преобимности предвиђеног наставног градива у сваком поједином разреду.

Непостојање разлике у квалитету знања ученика на различитим образовним узрастима последица је и чињенице да се код нас ретко користе критеријски тестови којима би се утврдило шта су ученици постигли и до ког нивоа по квалитету у односу на постављене циљеве. Тиме би се стекао увид у њихово напредовање или назадовање, на основу чега би могао да се разради систем за адекватно планирање процеса и поступака у настави, као и за праћења ефеката рада на свим нивоима.

Резултати до којих се дошло овим истраживањем могу допринети промени у приступу садржајима наставе и то: у мењању и иновирању наставног програма математике, идентификовању и формулисању образовно-васпитних циљева, начину презентовања садржаја програма, ефикаснијој индивидуализацији процеса учења, одређивању критеријума и стандарда оцењивања знања ученика, стицању трајнијег и квалитетнијег знања и др.

Литература

- Антонијевић, Вељковић 2005: Р. Антонијевић и М. Вељковић, Наставни садржаји и постигнуће ученика из математике, у: Р. Антонијевић и Д. Јањетовић (ред.) *TIMSS 2003 у Србији: резултати међународног истраживања постигнућа ученика основне школе из математике и природних наука*, Београд: Институт за педагошка истраживања, 81–107.
- Блум 1981: Б. Блум, *Таксономија или класификација образовних и одгојних циљева, Когнитивно подручје*, Београд: Републички завод за унапређивање васпитања и образовања.
- Богдановић, Малиновић-Јовановић 2009: С. Богдановић, Н. Малиновић-Јовановић, Таксономски модел и степен остварености задатака наставе математике у III разреду основне школе, Београд: *Педагогија*, LXIV/4, 618–631.
- Вучић 1979: Л. Вучић, Критеријски тестови, Београд: *Психологија*, бр. 3–4.
- Малиновић-Јовановић 2008: Н. Малиновић-Јовановић, Таксономски модел операционализације циља и задатака наставе о природним бројевима, *Докторска дисертација*, Врање: Учитељски факултет.
- Мулис и др 2005: I. V. S. Mullis, M. O. Martin, & P. Foy, *IEA's TIMMS international report on achievement in the mathematics cognitive domains: findings from a developmental project*, Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Наставни план и програм за основну школу у Републици Србији* (1996), Београд: Архимедес.

„СТАРЕ“ И „НОВЕ“ ФИЛОЗОФИЈЕ БРОЈА

Увод

Број је један од основних појмова математике, поникао најприје у вези са потребом бројања предмета, а затим се усавршавао сразмјерно развоју математичких знања. Већ у радовима античких научника било је установљено да је низ природних бројева бесконачан (3. вијек прије нове ере). Проблеми бесконачности природног низа, низа простих бројева и формирање назива за произвољно велике бројеве, разматрани су у знаменитом Еуклидовом дјелу *Елементи* и у Архимедовој књизи *О израчунавању пијеска*.

Увођењем појма сабирања, одузимања, множења и дијељења, почиње да се развија наука о бројевима и операцијама над њима која се зове аритметика. Изучавање дубоких законитости у природном низу бројева наставља се до данашњег времена и чини теорију бројева. Појам природног броја чини се толико једноставним и природним да се у науци дуго времена није постављало питање његовог дефинисања у терминима ма каквих простих појмова. Образложење појма природног броја постало је неопходно тек средином 19. вијека у вези са развојем аксиоматског метода у математици и разрадом основа математичке анализе. То је учињено 70-их година 19. вијека у радовима њемачког математичара Кантора на основу појма скупова и њихове једнаке моћи, тј. упоређивањем елемената једног скупа са елементима другог скупа. Број предмета у скупу, број елемената у скупу дефинишу се као оно заједничко што има дати скуп и сваки други, њему једнако моћан. Други појам природног броја дао је талијански математичар Пеано на основу аксиома које је сам формулисао (Пеанови аксиоми).

Прво уопштење природних бројева били су рационални бројеви, поникли у вези са потребом да се измјери нека величина, што се састоји у њеном упоређивању са неком другом величином – еталоном (разломци). Сва даља проширења појма броја нису више изазвана потребама рачунања и мјерења, већ су била посљедица развоја науке. Прво од њих било је увођење негативних бројева, условљено развојем алгебре. У Европи је негативне бројеве увео у употребу у 17. вијеку француски научник Декарт. Затим су били уведени ирационални бројеви. Изучавање појма непрекидности у радовима њемачких математичара Дедекинда, Кантора, Вајерштраса довело је до даљег прецизирања појма броја и његових особина. Развој теорије алгебарских једначина довео је (18. вијек) до појма комплексног броја.

Комплексни бројеви образују поље и како је установио Вајерштрас, скуп свих комплексних бројева не може бити даље проширен на рачун припајања нових бројева, тако да у проширеном скупу буду очувани сви закони операција који важе у скупу комплексних бројева.

Математички појам броја би могли проширити посебним освртом на: Природне бројеве, рационалне бројеве, ирационалне бројеве, реалне бројеве, комплексне бројеве, алгебарске бројеве, трансцендентне бројеве, кардиналне бројеве, трансфинитне бројеве, број π , итд.

У изучавању аритметике нула се дефинише као број који има особину да кад се дода (сабере) било којем броју, број се не мијења, или као број са особином да је резултат множења било којег броја овим бројем једнак нули.

Математика је наука о односима међу чистим величинама (бројевима) и просторним фигурама. Математику карактерише њена апстрактност. Величине и односи међу њима, које се појављују и посматрају у математици, узете су из реалног свијета, али су им разна квалитативна обиљежја апстрахована, и то много потпуније него у било којој другој науци.

Кроз историју математика се стално развијала у смислу продужавања и проширивања. Данас постоји много математичких дисциплина. Међу најважнијима су алгебра, анализа (посебно функционална анализа), теорија скупова, топологија, диференцијална геометрија, алгебарска геометрија, *теорија бројева* и теорија вриједности. У модерно доба, под утицајем нових истраживања и нових потреба, настале су нове гране математике, као нпр., теорија информација, кибернетика, програмирање и теорија игара, теорија алгоритама, које су нашле важну примјену у економији, социологији, психологији и биологији.

„Старе“ филозофије броја

Филозофски проблеми математике почињу још од самих почетака филозофије у старој Грчкој, математика је била један од великих извора филозофских питања.

Што се тиче аритметике, и ту се поставља мноштво сличних питања која се односе на значења употребљених термина, на могућност утврђивања истине и, у ствари, да ли се у овој области математике уопште трага за истином; постављају се питања о каквој је врсти знања ријеч, ако је уопште ријеч о знању, као и питања зашто се закони бројева могу примијенити на стварност. У вези с математиком која се бави бројевима, јавља се један други и нешто друкчији проблем, проблем математичке егзистенције. Принципи геометрије могу се схватити као хипотетички принципи који не тврде постојање било чега: „Ако постоји фигура која је троугао, онда је збир њених углова једнак два права угла“. Геометрију не морамо замишљати као теорију која садржи законе као што је „постоји троугао“. С друге стране, у математици која се бави бројевима, постоји мноштво закона који

изгледају као да тврде постојање ствари; на примјер: „постоји тачно један број у такав да је x помножено с у једнако x , без обзира какав је број x “. Ова врста закона, без сумње, као да тврди постојање нечега (број 1), тако да се закон не може лако схватити у хипотетичком смислу, као што је то случај са законима геометрије. Али о каквој врсти постојања је овдје ријеч? На какву се врсту стварности односи овај дио математике? Да ли се искази о постојању морају схватити дословно, или се морају разумјети сасвим фигуративно?

На овом мјесту можемо упоредити филозофију математике с филозофијом религије. Пошто пажљиво размислимо о ономе што су о божанству рекли религиозни мислиоци и филозофи током дугог низа година, можемо извести закључак да је расправа о религији збркана и недоследна и да на крају крајева нема много смисла.

Емпиризам и априоризам

Емпиријско знање можемо дефинисати као знање које захтијева искуствено оправдање.

Међутим, априорно знање можемо дефинисати као знање које не мора да се оправдава искуством.

Разлика између априорног и емпиријског знања повезана је с важном разликом између двије врсте расуђивања, дедукцијом и индукцијом. Ми нећемо покушати да их дефинишемо у потпуности, али ћемо уочити како се оне разликују. *Дедукција* је расуђивање у којем можемо априори знати да закључак мора бити истинит ако није учињена никаква логичка грешка и ако су премисе истините. Ево примера таквог расуђивања: „Сваки паран број је дјелив са два; ниједан прост број није дјелив са два; дакле, ниједан прост број није паран“. У овом примјеру нема логичке грешке и ми априори можемо знати да, ако су обје премисе истините, онда ће и закључак морати да буде истинит. То је примјер оне врсте знања којим се бави логика, јер у том примјеру дедуктивна аргументација је исправна на основу своје *логичке форме*. То значи да у *свакој* аргументацији облика „Свако ### је ///, ниједно *** није ///, дакле, ниједно *** није ###“ можемо априори знати да ако су премисе истините, онда закључак мора такође бити истинит. У логици се појам логичке форме схвата као нешто што је у вези само с распоредом ријечи *сваки*, *ниједан*, *је* и извјесних других *логичких* ријечи међу којима су *неки*, *не*, *и*, *или* и *ако*.

Одавде се може извући порука да иако је логичка форма за дедукцију, она није једина ствар од важности.

Насупрот дедукцији, *индукција* је расуђивање у којем закључак изражава емпиријску тврдњу која прелази оквире онога што кажу чињенице. Због тога се не може априори знати да ће, ако су подаци истинити, онда и закључак бити истинит. Претпоставимо, на пример, да смо посматрали много врана и да су све оне биле црне. Тада индуктивно можемо закључи-

ти да су, вјероватно, све вране црне. Али истинитост наших података не представља априорно јемство да закључак како су све вране црне мора бити истинит. У најбољем случају може се рећи да подаци подржавају и поткрепљују закључак, а не да апсолутно јамче за његову истинитост.

Номинализам

Номинализам је опште схватање да нема апстрактних ентитета, а нешто одређеније, то је схватање да нема апстрактних ентитета који се могу идентификовати као бројеви.

Многи ће, упитани шта су бројеви, одговорити да су бројеви идеје у нашем духу.

На помисао да су бројеви идеје у нашем духу људи долазе врло брзо, али то није веома задовољавајуће гледиште. Као покушај да се пружи интерпретација у којој ће теорија бројева бити истинита, ово гледиште има неколико недостатака. Прво, теорија бројева сматра да постоји тачно један природни број који је нула; када би бројеви били идеје у том смислу, било би онолико различитих бројева који су нуле колико има људи који имају идеје нуле. Исто тако, теорија бројева тврди да сваки природни број има непосредног слѣдбеника, али је извјесно да има природних бројева (великих) за које нико нема идеје њихових непосредних слѣдбеника. Дакле, схватање да су бројеви идеје повлачи за собом, супротно ономе што тврди теорија бројева, да не постоје непосредни слѣдбеници ових великих природних бројева.

Други правац номиналистичког размишљања позива се на физичке а не на менталне ентитете. Ми обично разликујемо бројеве и нумерале; нумерал је знак извјесног облика који схватамо као име неког броја. Тако, на примјер, арапска цифра „5“ и римска цифра „V“ обично се сматрају именима броја пет. Али претпоставимо да смо изједначили бројеве и нумерале; претпоставимо да кажемо како бројеви нису ништа осим нумерала. То значи бројеве можемо схватити као нешто одређено и опажљиво; нема сумње да нумерали постоје, јер их можемо видјети. Може изгледати да изједначавањем бројева и нумерала ми ослобађамо математику њене зависности од апстрактних ентитета.

Концептуализам

Крајњи облик концептуализма би сматрао да дух има снагу стварања било каквих бројева или других математичких ентитета по вољи, на савршено слободан и свемогућ начин. Тада би се математичареви постулати могли сликовито упоређивати с креативним созерцањем божанства: када математичар мисли у себи: „Претпоставимо да постоје бројеви такве и такве врсте“, тим чином они почињу да постоје, а његова врховна стваралачка моћ је као свемогуће божанство које из ничега ствара све што оно жели.

Концептуалиста који претпоставља да мишљење може створити бројеве, мора свакако јамчити да у овој игри стварања постоји разлика између жеље и њеног остварења. Штавише, главни мислиоци који су заступали ово концептуалистичко гледиште сматрали су да су стваралачке снаге људског духа прилично ограничене, ограничене чак и више него што то захтијева формална логичка непротиврјечност.

Историјски гледано, филозоф Кант је био најважнији представник концептуалистичког схватања у математици бројева. Кант је сматрао да су закони бројева, као и закони еуклидске геометрије, априорни и синтетички.

Интуиционизам и конструктивизам

У модерно вријеме једна група математичара, међу којима је Холанђанин Брауер био централна фигура, дала је нов ток једној филозофији математике која потиче од Кантове. Брауер је, као и Кант, тврдио да „чиста интуиција“ временског бројања служи као полазна тачка за математику броја; из тог разлога филозофији ове групе дато је име „интуиционизам“.

Одређено говорећи, аргуменат као што је Канторов доказ да има више реалних бројева него што има природних бројева интуиционисти не прихватају као исправан, мада су га многи други математичари сматрали ваљаним. У извођењу тог доказа Кантор је дефинисао извјестан реални број (ми смо га назвали p_0) рекавши да у његовој бесконачној децималној репрезентацији његова n -та цифра треба да буде „5“; ако n -та цифра броја p_n пије „5“, иначе треба да буде „6“. Интуициониста не може ову дефиницију сматрати исправном, јер нам та дефиниција не показује како да „конструишемо тај реални број нашом чистом интуитивном дјелатношћу бројања и рачунања“. Та нам дефиниција даје једно правило, али да бисмо то правило примијенили и „створили“ тај реални број, морали бисмо да учинимо бесконачан број корака, пролазећи преко сваке појединачне цифре тог реалног броја; интуициониста мисли да за то немамо времена. На тај начин он одбацује као неисправан Канторов аргуменат да има више реалних бројева него што има природних бројева, а заједно с тим он одбацује читаву Канторову теорију трансфинитних бројева.

Два добро позната примјера математичких тврђења који нису ни доказани ни оборени заслужују да се помену. Фермаова такозвана „велика теорема“ тврди да не постоје четири природна броја већа од 2 која задовољавају једначину: $x^n + y^n = z^n$. „Голдбахова хипотеза“ тврди да сваки парни број може да се изрази као збир два проста броја (гдје је прост број, број који се не може без остатка подијелити неким цијелим бројем изузев бројем 1 и самим собом). Упркос великим напорима математичари нису били у стању да нађу доказе ни за једно од ових тврђења, а нису успјели ни да их оповргну. Ми нисмо сигурни да ће икада успјети у једном или у другом.

Интуициониста заузима радикално становиште у погледу примјера као што су ови. Интуициониста вјерује да су бројеви творевина духа и вјерује, заједно с Кантом, да му све што дух створи мора у принципу бити у потпуности познато. Он сматра да не може бити несазнајних (наиме, кон-

структивно недоказивих) истина или неистина о бројевима. Дакле, он тврди да не можемо бити сигурни да су Фермаова велика теорема и Голдбахова хипотеза истините или лажне. Ако се оне не могу ни доказати ни оповргнути, онда оне нису ни истините ни лажне.

Тако интуиционизам, најутицајнији облик концептуалистичке филозофије броја, уноси приличну пустош у класичну математику одбацујући неке њене методе расуђивања и неке њене аксиоме. Да ли је филозофија која стоји иза интуиционизма довољно привлачна да би ова цијена изгледала прихватљива?

Филозофско схватање интуиционисте о стварању математичких ентитета може се, наравно, одвојити од његових принципа математичке праксе (његовог одбацивања неконструктивних аргумената, непредикативних дефиниција и тако даље). Али без тога филозофског схватања, принципи математичке праксе изгледају произвољни и неоправдани. Зашто би се неко залагао за одбацивање математичких поступака извјесне врсте, који су до сада били општеприхваћени, ако се то не чини на основу неког филозофског учења као што је ово.

Реализам и логицизам

Номинализам и концептуализам су шкрти и зловољно критични у свом ставу према питањима математичког постојања. Насупрот томе, став реализма посједује племениту ширину, поздрављајући обиље апстрактних ентитета. За разлику од номиналисте, реалиста нема дискриминаторске предрасуде према апстрактним ентитетима као таквим. За разлику од концептуалисте, он не осјећа да је свијет апстрактних ентитета на било који начин ограничен слабањим стваралачким снагама духа, јер апстрактни ентитети постоје по себи и за себе, а не као да их је дух „конструисао“. Реалиста вјерује да дословно постоје сви ентитети о којима изгледа да говоре аксиоме и теореме теорије бројева. Ово схватање интерпретације теорије бројева је најдословније могуће схватање: кад год изгледа да се термини теорије бројева односе на апстрактне ентитете, њих треба интерпретирати као да се заиста односе, а у таквој интерпретацији аксиоме и теореме су истинити искази.

Са реалистичког становишта, задатак математичара се може упоредити с истраживачким путовањем. Математичар не може да створи или измисли објекте о којима говори, јер они постоје и чекају да их он открије и опише, како је Бертран Расл написао у једном од својих ранијих списа.

Учење да су сви закони математике броја изводљиви из логике или да се могу „свести“ на логику, само на логику, постало је познато као „логистичка теза“. Прво га је исказао Фреге, касније га је независно формулисао Расл, а у свом монументалном дјелу, *Principia Mathematica*, Вајтхед и Расл подухватили су се да ову тезу изложе у појединостима. Према логистичкој тези, закони аритметике и остатак математике броја повезани су са

законима логике као што су теореме геометрије повезане с њеним аксиомама. Ако је то потребно показати, неопходне су двије ствари: јасна формулација закона логике и низ дефиниција кључних термина теорије бројева које дозвољавају да се њени закони изведу из закона логике. Извођење било којег дијела математике из традиционалне аристотеловске логике не долази у обзир; потребан је много моћнији систем логике. Фреге, Вајтхед и Расл допринијели су на веома важан начин разради закона ове модерне и моћније логике. Битно је напоменути да су, за њихову сврху термини „скуп“ и „уређен пар“, као и закони о скуповима и уређеним паровима прикључени логици а не математици. (Расл је на једном мјесту предложио оно што је назвао „теорија без класа“ али је то била теорија која није имала класе – друго име за скупове – само зато што је умјесто тога садржавала једнако сложене или још сложеније појмове својстава и релација.).

Потребне дефиниције биле су дефиниције свих основних нелогичких термина и симбола теорије бројева; то је укључивало „нулу“, „непосредног слѣдбеника“, „природни број“, „+“ и „х“. Фреге, а и Расл и Вајтхед, дефинисали су природне бројеве као извјесне врсте скупова чији су чланови скупови. Нула је дефинисана као скуп свих празних скупова; један као скуп свих непразних скупова од којих је сваки такав да су све ствари које њему припадају идентичне међу собом; два као скуп свих скупова од којих сваки има један члан различит од неког другог члана, али је сваки члан идентичан с једним од ова два поменута члана и тако даље. За један такав скуп скупова се каже да је непосредни слѣдбеник другог ако и само ако, када се један члан уклони из било којег скупа који припада првоме, онда смањени скуп припада другоме.

Формализам и модернизам

У претходном излагању размотрили смо дословна схватања математике броја, схватања према којима ова математика има интелектуалну вриједност зато што се њени закони могу интерпретирати као важне истине. Међу овим схватањима номинализам је изгледао као да не може да пружи било какву истиниту интерпретацију, а концептуализам је изгледао као да почива на магловитом и необразложеном учењу о наводним стваралачким духовним снагама. Реализам је изгледао као дословно схватање које највише обећава. Па ипак, реализам рђаво пролази у свјетлости доцнијег развоја. Ако је математика броја истраживање једне области независно стварних апстрактних ентитета као што су скупови и бројеви, онда треба да постоји неки низ закона о тим ентитетима. Међутим, настојећи да одговоре на изазов парадокса, математички логичари су развили четири у основи различите врсте теорија чији се закони никако не слажу у потпуности. Свака врста теорије је донекле произвољна и има изглед помоћног средства, а чини се да нема никакве основе да се сматра како је нека од њих више истинита од осталих.

Формализам је, као филозофија математике, гледиште, а математичке системе треба у основи гледати само као формализоване системе. Заступник формализма осјећа да, када математичке системе посматра само као формализоване системе, он избјегава многа збуњујућа и непотребна питања. Шта значе закони броја? Како знамо да ли су они истинити? Да ли бројеви постоје? Сва таква питања ишчежавају и не могу се чак ни поставити, ако се приклонимо схватању да су математички системи само формални системи. Формуле таквог формализованог система не значе ништа, оне нису ни истините ни лажне, оне не садрже никакво знање ни тврдње о постојању нечега.

„Нове“ филозофије броја

Дефиниције аритметичких појмова помоћу скупова и уређених парова које предлаже логистичка теза нису ни корисне нити шта објашњавају када аритметичке законе схватимо као исказе о поступцима бројања. Међутим, када се ови закони аритметике схвате на овај начин, они су аналитички у нашем првом смислу: то су такви закони да ништа осим њиховог разумијевања није потребно да бисмо били у стању знати да ли су истинити. Неко ко сумња или пориче један од основних закона аритметике, тиме коначно показује да га не разумије на исти начин као ми. Схваћени у овом духу, ови закони аритметике одражавају нашу одлуку да извјесне употребе ријечи које означавају бројеве сматрамо језички исправним, а да друге употребе сматрамо језички неисправним.

Вјероватно је један скривени мотив у филозофији математичког интуиционизма било нејасно осјећање да математика треба да буде ограничена на формуле које се могу интерпретирати као искази о бројању. Међутим, могли бисмо прихватити гледиште да математика треба тако да буде ограничена, а да не прихватимо математички интуиционизам. Филозофија математике, која би наглашавала ово ограничење, била би налик на интуиционизам по томе што би наглашавала конструктивне методе математичког расуђивања. То не би морао бити облик интуиционизма, јер не би морао укључивати концептуализам или Кантово учење о „чистој интуицији“. Такво „финитарно“ гледање на математику могло би да усвоји оно што је привлачно у математичком интуиционизму, али да одбаци његову непривлачну метафизику.

Постмодернизам

Термин „математика“ утврдио се као име за разне врсте проучавања које имају различит значај: било би неприлично и неразумно да је неко рекао Кантору, на примјер, да проучавање које је он обављао није била математика. Мада би неко од нас могао осјећати склоност ка математичким теоремама које се могу схватити као истине о бројању, не бисмо смјели до-

зволити да нас то учини слијепима за корисност, занимљивост и математичку оправданост многих теорема које се тако не могу схватити. Кућа математике има многе одаје и у њој се играју многе игре.

Да се послужимо једним крајње поједностављеним примјером (таквих ће у овом тексту бити много). Сто који се налази преда мном могао бих описати једнако ваљано као колекцију молекула и као дрвену конструкцију са четири ноге. Сто, као ствар по себи, одговара подједнако добро овим описима, а могуће је замислити неограничено много описа који му исто тако добро пристају. У том смислу, моји описи стола никада не могу да исцрпе све оно што тај сто *јесте*. Но ако прихватимо ту тачку гледишта, онда је јасно да наука – рецимо, физика – не може више бити тумачена као skupина описа који нам дају директно знање о физичком универзуму; она је само скуп концептуалних описа посматрачевог искуства бивања у том универзуму.

Прије свега се морамо договорити шта ћемо уопште сматрати објектом. Јер ако је све што „видимо“, све о чему можемо просуђивати; увијек и само феномен, репрезентација, онда морамо имати неки критеријум на основу ког ћемо репрезентације „стварних“ објеката разликовати од других менталних творевина, од фикција попут једнорога и округлог квадрата. За Канта је објекат нешто што перципирамо у простору и времену, нешто што има одређену инертност у односу на нас, нешто што нам се опире и у том смислу *дјелује* на нас. Рецимо, јабука која се налази преда мном има извјесну аутономију у односу на моје представе о њој. Не могу јој по сопственом нахођењу додати уши и бркове или је пак избрисати из видног поља; она ми се у извјесном смислу опире и по томе се разликује од неке јабуке коју сам једноставно замислио. Покушајмо сада да видимо како ствари стоје са установљавањем броја стварних јабука преда мном (под претпоставком да је ту тачно једна).

Видим, дакле, једну јабуку. Склапам очи, отварам их, и *поново* видим јабуку. Вријеме, очито, игра неку улогу у овом експерименту. Без интуиције времена, која моје доживљаје (по Кантовом схватању) уређује у темпорални низ, не бих могао да разликујем ова два искуства. Стога би се могло рећи да је за развитак способности бројања неопходна интуиција времена. Претпоставимо да је тако. Међутим, чињеница да сам имао *два искуства јабуке*, никако не значи да су преда мном *двје јабуке*. Интуиција времена, чак и ако прихватимо да се на њој заснива наша способност бројања уопште, не говори нам ништа о бројању објеката. Да бих могао утврдити да је преда мном једна јабука, неопходно је да временски низ мојих представа о том објекту на неки начин идентификујем као представе о истој ствари. За то је пак нужно (мада не и довољно) да своје перцепције дотичне јабуке разумијем и на основу представе о њеном положају у простору. Само се на тај начин од апстрактног бројања може доћи до практично релевантног бројања објеката, па слиједи да су за правилно бројање стварних објеката неопходне интуиције простора и времена.

Из овога произилазе бројне последице на развој европске филозофије (а и на однос науке према европској традицији). Хердер је, на примјер, критиковао Канта због тога што је неправедно занемарио проблематику језика и припадања језичкој заједници. Хегел је сматрао да је Кант жртва филозофски неодрживог дуализма – дуализма чисте и примијењене науке, дуализма субјекта и објекта – те да услови које је Кант поставио вјештачки намећу ограничења индивидуалних људских бића самом знању. За Хегела је субјекат, као и за Канта, биће рефлексије и знања, али његов пут ка самосвијести није нешто што се може разумјети у антропоцентричним оквири-ма које намеће спознајна моћ појединца (осим ако је тај појединац управо Хегел), већ само у оквиру историје. Значење науке, за Хегела, а видјећемо да ће тај став одиграти важну улогу и у 20. вијеку, не може се свести на интенције било које индивиде, већ се оно мора тражити у дијалектичком процесу самопревазилажења којим наука улази у однос са самом собом. Стога апсолутно знање не може бити познавање неке (или свих) ствари, већ познавање механизма промјене система рационалности, кроз које се, према чувеној Хегеловој формули, актуализује *идеја* (то јест космички ред у чије је постојање и могућност разумијевања вјеровао овај религиозни мислилац). Хегел је дакле вјеровао да апсолутни дух на „крају“ свог спознајног пута, пута од незнања ка знању, може избројати до један.

Нама ће овдје бити интересантнија алтернатива коју је понудио Фихте. За њега је исказ „ја сам ја“, или „ја сам један“, несводива претпоставка сваке рефлексије и сваког знања. Ово се често погрешно тумачи као нека врста апсолутног егоизма апсолутног ега, па би требало разјаснити Фихтеов однос према системима знања; најкасније од њега почиње романтичка шизма са науком, која се касније продубљивала и која се, по нашем мишљењу, наставља и данас, у облику сукоба науке и постмодерне теорије.

Структурализам

Структурална лингвистика Фердинанда де Сосира је непобитно најчешће цитирана референца филозофије структурализма уопште. Иако се, читајући популарну и велик дио академске литературе, стиче утисак да су биљешке с предавања овог женевског лингвисте – *Курс опште лингвистике* (1916) – својим револуционарним идејама произвеле читаву структуралистичку еуфорију, изгледа много вјероватније да је та превага структурализма омогућена једном, да тако кажем, формалистичком епистемом, скупом историјских околности чији је важан дио била математика.

Основно начело структурализма, уопштено говорећи, је то да објекти формалних система немају никакав природан или унутрашњи идентитет, већ свој идентитет стичу кроз односе са другим елементима у оквиру датог формалног система. И томе још треба додати и тезу о аутономији језика, према којој ове формалне релације не само да су нужне за одређивање идентитета објеката, већ су и довољне за то. „Природа“ ових еле-

мената, начин на који су они представљени, стога није од ни од каквог значаја. Њихово значење је у *улогама* које они играју у систему и они зато могу бити интерпретирани на било који начин, ако су при том очуване одговарајуће формалне релације.

Шах је релативно добар примјер на коме се може илустровати овај приступ. У партији шаха можемо слободно замијенити скакача упаљачем: упаљач ће функционисати исто као замијењена фигура, уколико се понаша у складу са правилима, уколико се према осталим фигурама на табли односи *као* скакач. Обратно, фигура скакача, као физички објекат, у оквиру неке друге структуре може имати сасвим различиту улогу: рецимо, могао бих је ставити испод краће ноге мог радног стола да га нивелишем. Отуд јасно слиједи да фигура скакача, као физикални представник једног формалног концепта, није на природан и нужан начин везана за концепт скакача. Скакач је једна *улога* у шаховском систему, он је системска „функција“, и то је једини релевантан идентитет елемента.

Можда би било претјерано тврдити да је *Теорија скупа*, манифест групе (пост)структуралистичких теоретичара – који су колективно потписали Дерида, Барт, Фуко, Солерс, Кристева, и читава *Tel Quel* екипа – настао као нека врста филозофског и књижевнотеоријског мимезиса Бурбакијевог пројекта. Но ако дискурс заиста формира мишљење и значење, као што тврде неки од ових филозофа, онда се не може занемарити чињеница да су они своје идеје формулисали управо у реформистичкој атмосфери свеопште структурализације, покрета чији је истакнути идеолог био Бурбаки.

Функционализам и дефункционализам

Основна теза структурализма је теза да је синтакси потребан *и довољан* услов семантике, напосљетку се своди на једну неосновану и тешко доказиву тврдњу која опстаје само у најекстремнијим областима когнитивних наука, међу истраживачима који вјерују да Тјурингове машине имају ментална стања и стога неку врсту аутономне семантике. Суштина тезе да синтакса производи семантику је слjedeћа: елементи формалне структуре, структуралном диференцијацијом у односу на друге елементе, постају *улоге*, *функције система* – сјетимо се примјера са скакачем у шаху, који је управо таква улога, функција чиме им је, наводно, на чисто формалан начин, аутоматски, подарено значење.

То је прилично тешко доказати. Синтаксичка структура је и непобитно нужна за постојање семантике, и она у том смислу допушта људском посматрачу да структури припише неку врсту семантике на снову саме синтаксе.

Видјели смо да је основна идеја то да је значење било ког елемента идентификовано са његовом улогу у систему, са његовом системском функцијом. Однос између означитеља и означеног је произвољан, јер ове функције могу имати било какве представнике, а формални систем постаје

„аутономан“. Теорије које се темеље на овом начелу требало би звати *функционализам*, а не структурализам, како бисмо Сосира поштедјели читавог низа неугодних асоцијација са врло популарним, али тешко одбрањивим и повремено уистину комичним – функционалистичким испадима.

Наиме, функционалистичко схватање значења суштински се заснива на кружној, непредикативној дефиницији: идентитет структурне јединице изведен је из њених односа са тоталитетом елемената структуре којој она припада. Зато, као што је у другом контексту показивао Поенкаре, а и Сосир, идентитет не може бити стабилан и одређен, већ проклизава на начин који се не може предвидјети нити формално израчунати. Управо се на тој примједби темељи дио постструктуралистичке критике структурализма (то јест функционализма), као што ћемо видјети на примјеру Дериде. Али прије него што размотримо ову аналогију између аргумената Дериде и Поенкареа, треба проучити још један често цитирани извор популарне тезе о аутономији језика: Витгенштајна.

Укратко, овдје изгледа имамо посла са неком врстом функционализма. Као и у случају функционализма, коначна редукција свега могућег на граматичку, језичку или културолошку структуру оправдава се позивањем на неког произвољно изабраног теоретичара, а све у име „научности“, „материјализма“, и неких позитивистичких бајки о страхотама метафизике.

Међутим, старомодна функционалистичка слика сада је ретуширана достигнућима „постмодерне“ критике идентитета тј. Поенкареове и Деридине критике непредикативних дефиниција на којима се заснива читава функционалистичка семантика – па тако добијамо једну лабаву варијанту функционализма у којој идентитет више није стабилан, већ се потенцијално мијења са сваком чином писања. Идентитет се у „постмодерном свијету“ – где је субјекат поново *табула раза*, „мјесто празнине која каже ја“, како каже Џудит Батлер – изводи из комбинације јединица културолошког текста, и сведен је на потрошачки профил. Возим „хонду“, носим „леви-ске“, пушим „житан“, слушам Боувија, читам Делила, имам диплому универзитета ХУ, бавим се менаџментом и консалтингом, летим „Луфтаханзом“: то је оно што *јесам*. За сада.

На овом мјесту треба уочити веома занимљив парадокс.

Овај неофункционализам – вјероватно му боље пристаје име *дисфункционализам* – упркос свом крајње формалистичком ставу који индивидуално своди на формалну комбинацију културолошких симбола, субјекат имплицитно поставља у позицију *идеалистичког* апсолута. Сада је то неки апсолутни потрошач, који се безбрижно „игра идентитета“ и тако остварује своју слободу.

Овим поступком постмодерна култура изгледа покушава да оствари један стари романтичарски сан, а тога није ни свјесна. Ту мислим на Шилерову утопију друштва које је у цјелости заокупљено умјетничком разиграношћу, утопију свијета чији је основни принцип то да нема основних принципа јер се његови становници превасходно ослањају на инстинкт

игре (Шилер то зове *Spieltrieb*). У тој шилервоској визији, играње не треба посматрати као неки просвјетитељски императив да се држимо универзалних, вјечних, поуздано ригидних, „правила игре“, већ као контрапросветитељску разиграност у којој се правила увијек могу промијенити, превазићи, подрити, као што се и сама игра може промијенити, истрошити, превазићи, замијенити неком другом игром или одбацити по сопственом нахођењу.

Постмодернизам једноставно прихвата све „паранормалне“ последице ове формалистичке редукције на које је интуиционизам указивао. Након поенкаревско-постструктуралистичке критике стабилности идентитета, стара функционалистичка доктрина модификована је прихватањем могућности ирационалне, дисконтинуиране, хаотичне, непредвидиве промјене идентитета и значења. То омогућава да се романтичка идеја непоузданости комуникације моделује у оквиру теорије која изгледа „научније“ јер нестабилност значења изводи *формално*, у оквиру филозофије језика, а не позивањем на неки мистериозни и метафизички принцип предјезичког субјекта.

Упркос великим надама које постмодернизам полаже у теорију хаоса, и чак је у неком смислу присваја, називајући је „постмодерном науком“, ситуација са том теоријом нешто је другачија од утиска који се стиче читајући оде о „промјени парадигме“ коју је она наводно проузроковала у науци. Овај урбани мит је веома распрострањен и стога треба размотрити шта заправо стоји иза њега: он веома лијепо илуструје амбивалентан однос постмодернизма према науци и романтизму.

Теорија хаоса бави се, најједноставније речено, динамичким системима са детерминистичком еволуцијом, који су, међутим, довољно сложени да се њихово понашање не може егзактно предвидјети на дуге стазе. Формални модели метеоролошких система представљају типичан примјер.

Читава ова теорија заснована је на идеји да се „хаос“ ! и „случајност“ могу *моделовати* у оквиру детерминистичких система јер је у системима одређеног типа, чак и ако су они у *теорији* тотално детерминисани, наша способност да математички предвидимо њихово понашање врло ограничена у одређеном техничком смислу. Ови системи могу се успјешно проучавати извјесним методама, али су у принципу „нестабилни“. Веома мале промјене у њима, дугорочно гледано, могу произвести ефекте на макронивоу. Тако настаје чувена прича о „ефекту кинеског лептира“, по којој би неки лептир у Кини, треперењем својих крила, могао произвести олују у Европи.

Пионири ове области математике – међу њима је и Поенкаре – јасно су стављали до знања да се ту ради о матернатичком *моделу* „случајности“ и „хаоса“, а не о тврдњи да неки системи *јесу* случајни и хаотични.

Да резимирам. У својим популарним формама - без обзира на неке несумњиве склоности ка симулацији одређених идеја романтизма - постмодернизам понавља фундаментални гест функционализма, ослања се на логоцентрички принцип по ком *бити* значи *бити вриједност неке промјенљиве*. Промјенљива је сада „случајна“ и „хаотична“, али принцип је исти. Ову

функционалистичку тенденцију друштвених наука Барт је наслутио још 1963, када је у есеју *Структуралистичка активност* написао: „*Структура* је већ отрцана ријеч (...), данас заиста претјерано коришћена: све друштвене науке користе је навелико, и њена употреба не може никог издвојити (...); *функције, форме, знакови, сигнификације* не стоје ништа боље: то су данас ријечи у свакодневној употреби, од којих се тражи и добија шта год се хоће, а то је најчешће једна камуфлажа старе детерминистичке схеме узрока и последице?

У „математичком“ контексту који обиљежава овај текст, показује се да њихове идеје не представљају никакву револуцију, већ се надовезују на питања о којима су размишљали многи други филозофи и научници прије њих. То ни у ком смислу не умањује њихов значај. Напротив, то само показује да је интердисциплинарни разговор, прије свега, *могућ*. Све остало је ствар пажљивог тумачења, образлагања хипотетичких и спекулативних судова; ствар полемике чији је дио и овај рад.

Литература

- Баркер 1973: Стефан Баркер, *Филозофија математике*, Нолит, Београд.
Витгенштајн: Витгенштајн, Лудвиг, *Трактатус логикус – филозофикус*, Веселин Маслеша, Сарајево.
Девиде 1964: Владимир Девиде, *Математичка логика I*, Посебна издања Математичког института, Београд.
Девиде 1979: Владимир Девиде, *Математика кроз културе и епохе*, Школска књига, Загреб.
Калужнин 1971: Калужнин, Л., А., *Што је то математичка логика*, Школска књига, Загреб.
Клини 1957: Клини, С., К., *Введеније в метаматематику*, М. Л.
Прешић 1972: Славиша Б. Прешић: *Елементи математичке логике*, Београд.
Расл: Бертран Расл, *Принципи математике*, Београд.
Стојк 1969: Дирк И. Стојк, *Кратак преглед историје математике*, Завод за издавање уџбеника СР Србије, Београд.
Тарски 1973: Алфред Тарски, *Увод у математичку логику и методологију математике*, Издавачко предузеће „Рад“, Београд.
Тасић 2002: Владимир Тасић, *Математика и корени постмодерног мишљења*, Светови, Нови Сад.
Тростников 1983: Тростников, В., Н., *Што су конструктивни процеси у математици*, (Повјесни, математички и филозофски аспект), Школска књига, Загреб.

Ваит Д. Ибро*

Универзитет у Приштини – Косовска Митровица

Учитељски факултет из Призрена у Лепосавићу

Еуген Љајко

Универзитет у Приштини – Косовска Митровица

Природно-математички факултет у К. Митровици

Прегледни рад

УЛОГА ЈЕЗИКА ПРИЛИКОМ УСВАЈАЊА МАТЕМАТИЧКИХ ПОЈМОВА И ПРАВИЛА

Увод

Почетна настава математике је организована и усмерена активност, насупрот предшколском раздобљу, где се математички развој детета остварује непосредним и спонтаним контактом са реалним светом. За ту наставу карактеристично је почетно формирање математичких појмова као што су природан број, релације и операције тим бројевима, елементарни геометријски појмови и величине. Са овом наставом ученици стичу почетну математичку писменост.

Математички појмови су једна од најзначајнијих саставних делова математичке науке, а тиме и наставе математике. Поред тога за наставу важну улогу имају и математичка правила са којима се сусрећемо још у почетној настави математике.

Математички појмови

Настава математике највише пажње посвећује увођењу математичких појмова и њиховом правилном усвајању од стране ученика. Већина свакодневних појмова, односно знања, која неко има, стечена су директно из непосредне околине и нису апстрактна. Појмови који се изучавају и усвајају у настави математике могу бити прости и сложени. Класификација појмова не значи да се лако и без потешкоћа формирају и усвајају. Успешно извођење наставе математике подразумева разумевање и знање математичких појмова. Настајање и развој математичких појмова је процес аналоган којим се иде од незнања ка знању. Он полази од реалног окружења, реалних предмета и појава до његове бити. Апстрактност и општост математичких појмова је, вероватно, и највећи проблем у процесу учења, али ово својство математике је и предност ове науке.

Појмови служе да би се створила прегледност између стварних и мисаоних објеката. Сталним појмовним сажимањем карактеристичних особина објеката, може се утицати на читав скуп, тако да у појединачним слу-

* vajtgora@gmail.com

чајевима није потребно ново размишљање. На тај начин, појмови представљају основу за свако когнитивно функционисање.

Говорити о математичком појму значи говорити о извесном броју објеката или појава са заједничким карактеристикама који је означен заједничким именом. Ослањајући са на појмовну логику, имамо различите математичке појмове, *појмове који се односе на особине* и *појмови који се односе на релације*. Детерминисаност ових појмова односи се на особине које имају појединачни објекти (троугласт, четвороугаон, прост) и релације између два или више објеката (дужи од ... , лежи између ...).

Подела појмова на просте и сложене говори о начину изграђивања. Просте појмове бирамо у извесној мери произвољно и они зависе од избора аксиоматске базе, а сложени се могу, кроз дефиницију, сводити на друге појмове. Школска настава није аксиоматска, па прости појмови не захтевају даља објашњења, а тиме имају и релативно значење. Активност учења појмова захтева обезбеђивање услова за савлађивање математичких појмова. За учење појмова је важно обратити пажњу на опште дидактичке принципе. Треба дати више примера који објашњавају ширину појма, чиме се помаже његовој генерализацији. Исто тако, треба дати једноставније примере код којих су битне карактеристике добро изражене и систематски бирати комбиноване парове (пример – контрапример). Поред тога треба навести и језичке помоћи које имају одређену улогу приликом учења појмова. Пре свега, то је језичко успостављање значаја појма, формулисање његове сржи свакодневним језиком и указивање на битне и небитне карактеристике са јасним одређивањем имена појма.

Схватање улоге језика тражи мали осврт на појам когнитивне структуре једне особе. То је субјективна психолошка структура елемената који су међусобно повезани и чине знање једне особе. Когнитивна структура једног ученика има врло мало заједничког са објективном логичком структуром наставних предмета (математиком). Код човека, за усвајање изузетно много значења које он мора да научи у току живота, служи хијерархијски изграђена когнитивна структура. Њу можемо замислити као пирамиду, где се на врху налазе значења најопштијег типа, по средини специфична и диференцирана значења а у основи конкретне информације и чињенице.

Уклопити нешто у когнитивну структуру ученика, значи уклопити га у његов језички репертоар у коме је репрезентовано свакодневно искуство, тј. уклопити у речи и представе које су му блиске. А то значи дубљи смисао језика, слика и објашњења који се прилагођавају ученицима. На тај начин је могућа блискија језичка и искуствена раван него одређени ниво апстракције. Свакодневно искуство је важније од активности са вештачким материјалом, а свакодневни језик сигурно битнији од стручног.

Опште је мишљење методичара да језик знатно олакшава учење. Они сматрају да је улога језика да интегрише и подстиче мишљење, а не само да има комуникативну улогу. То значи да се помоћу репрезентативне

способности речи увећава могућност манипулисања појмовима, значењем правила, формула и поступака. На тај начин се подстиче настајуће субвербално разумевање и у подручју у коме се самостално изводе закључци.

Многи методичари језику додељују водећу улогу у оквиру интелектуалног развоја за активности, опажање и мишљење. Употреба језика се мења кроз целокупан развој на типичан начин: „Веома мало дете употребљава језик готово искључиво као неку врсту допуне за показивање. Тек веома постепено се долази до тога да се употребљавају речи које се не одnose на присутне ствари“ (Zech 1999). Касније долази до тога да речи постају носачи за исказе који спадају у категорију могућег. Зато развој процеса мишљења треба разумети као све бољу координацију између различитих равни развоја мисаоних представа, уз суштински важно учешће језика.

Поставља се питање уклапања наставе математике у когнитивну структуру ученика. Најпоузданији ослонац у когнитивној структури ученика је свакодневно искуство и њихово уопштено сажимање у појмове и представе свакодневног језика.

Једноставан пример провере је сабирање природних бројева. Пре математичке формулације сабирања, као математичког правила за операције са бројевима, важно је да се експлицитно формулише операција свакодневним језиком у облику: „једном броју предмета се додаје један извештан број других и онда се они понове, све заједно преброје“. Таквом језичком формулацијом долази до интеграције претходног искуства у уопштеном облику и његовог најбољег могућег уклапања, као „идеје сабирања“ заједно са предзнањима у облику подређених идеја – у когнитивну структуру.

Овакво уклапање математичких појмова и операција путем свакодневног језика у когнитивну структуру има, највероватније, много веће дидактичке ефекте. Све ово показује да за усвајање математичких појмова улога језика није занемарљива. Он служи да се значење јасније ограничи, помаже при генерализовању примера и противпримера и наглашавању битних и небитних карактеристика.

Уколико се учење појмова посматра уопштено, онда постаје јасно да улога језика још више превазилази поменути значај. Вишеструка функција језика наставника и ученика представља се у појединостима на следећи начин:

- На почетку процеса учења, језик наставника има *орјентациону функцију*: наставник на овај или онај начин издваја значај појма који се мора научити и повезује нови материјал, што је битно за смисаони процес учења.
- Језик наставника има при даљем формирању појмова, увек *функцију усмеравања пажње*: наставник скреће пажњу примерима и противпримерима на битне и небитне карактеристике појма. Томе кореспондира учеников *одговор*, када и зашто се ради о примеру, односно противпримеру (том приликом се постепено за ученика издаваја суштина појма).

- Језик наставника (или ученика) има *функцију повратне информације*: тачне употребе појмова се потврђују, а погрешне коригују. Успех усвајања сигурно доста зависи од тога, колико је информативна та поратна информација. Нарочито је важно да грешке при том буду образложене,
- *Језик има функцију називања*: појму се приписује име и он, у когнитивној структури, добија у одређеном смислу „етикету“ и самим тиме постаје једноставнији за употребу. Садржај појма именовањем добија назив и тиме постаје лакши за саопштавање што је битан услов за каснију употребу појма,
- *Језик има функцију дефинисања*: садржај појма вербализацијом добија прецизније контуре и бива сажет упечатљивом дефиницијом. Овим се добија оно најбитније за могућност трансфера појма: језик нам помаже да научено издвојимо из специфичних ситуација тако да се може применити у свим могућим случајевима.

Методичари раздвајају удео језика приликом усвајања појмова зависно од развоја детета, односно од старости ученика. У том смислу разликујемо две форме одвијања приликом учења појмова у настави.

Постоје два облика усвајања појмова:

- претежно откривајуће усвајање појмова на основу релативно много примера и противпримера, као и на основу малог броја објашњавајућих савета за кратку егзактну вербализацију;
- претежно рецептивно усвајање сложених појмова на основу релативно великог броја објашњења, као и малог броја објашњавајућих примера за широку егзактну вербализацију.

Прва форма прикладна је за млађе ученике (важно је емпиријско искуство), а друга за старије, где је важна језичка презентација битних и небитних карактеристика.

Математичка правила

Разматрање има за циљ да разјасни улогу и значај језика у настави математике за савлађивање математичких правила. Као и код математичких појмова, језички пренос има суштински значај интеракције и стратегије дидактичког разговора приликом учења математичких правила.

Наставна ситуација при учењу правила је најчешће још више језички одређена него при савлађивању појмова. То је због тога што језичко-логичко објашњење представља суштински додатни аспект. Приликом учења правила, наставник има задатак да језички усмерава и помаже ученицима да појмове повежу на прави начин у правила и да их у датим условима образложе.

Термин *учење правила* представља смисаоно рецептивно учење математичких релација, закона и поступака. *Правило* се употребљава у ширем

смислу речи која не одговара уобичајеној језичкој употреби. Учење правила значи схватање повезаности више појмова у једној реченици. Овде се мисли на учење које у себи има потпуно разумевање међусобних односа, на основу појмова који су потпуно изграђени. Један од неопходних услова за учење правила је да подређени појмови буду претходно јасни. То значи да је учење појмова услов за учење правила.

Учење правила мора бити разграничено од једноставног декламовања правила и разумевања вербалних информација. Циљ учења правила је да ученик схвати правило и да може да га примени у новој ситуацији. Способност примене правила је дугорочан, а пуко разумевање правила краткорочан циљ.

Да би ученици разумели и усвојили правила најпре треба да су правилно усвојили појмове и претходна правила, да логички повезују кораке у правилу, сопственим речима прецизно формулишу правило, знају назив правила, графички прикажу правило, симболички смисао и демонстрацију правила у специјалном случају.

На питање када почети са учењем правила, методичари не препоручују прерано формулисање правила на апстрактном нивоу, зато што се тиме даје предност механичком учењу, а то учење представља општу опасност у математици.

Ученик је оспособљен за примену правила ако познаје случајеве примењивања, логички анализира правило, врши примену приликом стварања надређених правила и за решавање нерутински проблема.

Тренутни крајњи циљ учења правила је постигнут онда када ученик може да „ради“ са правилом. У принципу, процес учења правила никада није у потпуности окончан. Слично као код учења појмова, и код учења правила постоје дугорочни циљеви, који не важе само за једно одређено правило, већ им се тежи у свакој прилици, зависно од врсте правила.

Постало је потпуно јасно да је улога језика изузетно важна приликом учења правила. Правила се у настави претежно тумаче путем усменог језика. Оно што је речено о улози језика приликом учења појмова, важи и за учење правила у модификованом облику.

Језик наставника на почетку процеса учења има *функцију претходног усмеравања*. Наставник издваја значај правила које треба да се научи. Даје припремне смернице, ствара основу, ослања се на постојеће знање и представе, скреће пажњу на суштинске разлике проучаваног и већ познатог правила.

Језик наставника задржава током даљег процеса учења своју *оријентационо-структурирајућу* функцију, између осталог у облику рекапитулирајућих осврта, указујући на недостатке.

Поред тога, језик наставника добија постепено једну *усмеравајућу функцију*. Наставник скреће пажњу на релевантне појмове, даје усмерења ка адекватном повезивању појмова. Ово се дешава пре свега, путем одговарајућих питања и подстрека за размишљање.

Језик наставника (као и ученика) наравно, има и код учења правила *функцију повратних информација и проверавања*. Наставник провоцира повратну информацију ученика, нпр. питањем: *Да ли је то било тачно образложење?* или позива да се образложи једно правило које претходи.

Функција дефинисања језика при учењу појмова одговара *функцији формулисања* при учењу правила. Правило би, по могућности, требало да буде прецизно, али истовремено и ученицима јасно формулисано.

Слично као и при учењу појмова, при учењу правила језик има *функцију именовања*, често се правилу да „име“, нпр. Питагорина теорема, биномни образац, и сл.

Ове језичке ознаке олакшавају касније употребу и брзо разумевање. Називање најчешће стоји у уској асоцијативној вези са „симбиличком кондензацијом“ правила:

$$1) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$2) A \cup B = B \cup A.$$

Овакве *симбиличке скраћенице*, које обухватају суштину правила, су важне основе усвајања и олакшавају трансфер.

Закључак

Основна школа представља темељ учења, где пропусти учињени на овом нивоу образовања имају последице на професионалну оријентацију ученика. Математичко образовање је значајна компонента, не само општег већ и професионалног образовања за низ занимања. Математички појмови и правила који се формирају у почетној настави математике методички се интерпретирају у развојном континуитету ученика, који знања о квантитативним и просторним облицима усвајају уз помоћ објективне реалности. У тој фази образовања улога језика је значајна за све наставне предмете. Језик у настави математике, који мора бити коректан, прецизан, једноставан и разумљив, умногоме помаже схватању и усвајању математичких садржаја. У супротном, математику чини веома сложенем и непрактичном. Опште је мишљење методичара да језик, не само да има комуникативну улогу, већ знатно олакшава учење, интегрише и подстиче мишљење.

Литература

- Вуковић 2008: Вељко Вуковић, *Неки методички, психолошки и методолошки аспекти учења и истраживања математике*, Јагодина, Ужице, Учитељски факултет.
- Zech 1999: Friedrich Zech, *Grundkurs Mathematikdidaktik*, Weinheim und Basel, Beltz Verlag
- Пинтер и други 1996: Ј. Пинтер, Н. Петровић, В. Сотировић, Д. Липовац, *Опита методика наставе математике*, Сомбор, Учитељски факултет.

ПРОБЛЕМСКИ ЗАДАЦИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Увод

Да би се садржаји, циљеви и задаци наставе математике успјешно реализовали, потребно је да се дјеца све вријеме сусрећу са израдом математичких задатака различитих типова.

У почетној настави математике посебно су значајни *проблемски задаци* који су најсложенији међу текстуалним задацима и чије рјешавање представља врхунац математичког образовања и математичке културе ученика. Да би настава била усмјерена ка том циљу, потребно ју је организовати тако да се заснива на откривању и примјени теоријских релација у практичним проблемима. На тај начин, теоријска знања која се повезују кроз процес рјешавања практичних проблема, добијају нове димензије: дубину, трајност, квалитет и ефикасност примјене у различитим животним ситуацијама.

Мјесто, улога и избор проблемских задатака

Проблемски задатак је логички структурирана говорна цјелина која садржи квантитативне податке у различитим везама и односима, те захтјев да се из познатих података и услова, мисаоним активностима, пронађе непознати број, величина или рјешење логичког типа које се тражи постављеним питањем.

Проблемским задацима ученици стичу математичка знања и на специфичан начин упознају свакодневну стварност и окружење у којем живе и раде, а њиховом примјеном остварују се сљедећи васпитно-образовни циљеви почетне наставе математике:

1. Рјешавањем проблемских задатака математичка знања се брже и лакше усвајају, развијају се математичко мишљење и математичке способности, провјерава ниво овладаности математичким знањима и вјештинама, развија интерес за математику;
2. Користећи се проблемским задацима, ученици доживљавају, дознају и посредно рјешавају проблеме из различитих подручја људске дјелатности;

* sadra@teol.net

3. Њиховим рјешавањем ученици се оспособљавају за примјену математичких знања у реалним, практичним животним ситуацијама;
4. Проблемски задаци доприносе развијању технике рачунања, повезујући је непосредно уз реалност живота;
5. Рјешавањем проблемских задатака потпуније се упознаје смисао и значење појединих рачунских операција.

Мјесто и улога проблемских задатака у почетној настави математике се, према наведеним васпитно-образовним ефектима, сагледавају с аспекта *циља* и *средства* наставе, што се објашњава следећим:

С једне стране, крајњи циљ, идеал наставе математике јесте да ученици овладају методама рјешавања система проблемских задатака, а с друге стране, тај циљ је могуће постићи, првенствено, рјешавањем система математичких проблема.

Да би се остварила васпитно-образовна улога проблемских задатака у почетној настави математике, они морају испуњавати одређене дидактичко-методичке захтјеве:

1. Морају бити у складу с реалношћу и на исправан начин одражавати стварност из које потичу;
2. Морају бити јасни и „разговијетни“, а подаци и услови које садрже, разумљиви ученицима;
3. Језичка формулација мора бити концизна, прегледна и јасна, примјерена могућностима учениковог схватања и разумијевања, те њиховим интересима;
4. Морају бити степеновани по тежини.

Проблемски задаци својим садржајем, структуром и обликом, треба да конкретизују стварност, односно да буду вјерна слика онога што се догађа у блиској и даљој околини ученика. То не значи да увијек морају садржавати апсолутно тачне нумеричке податке о некој појави (броју ученика неке школе, цијени одређеног производа и сл.), него приближну тачност и вјероватност података који се у задатку налазе. То подразумијева да радње и односи који су садржани у задатку, бројеви којима се изражавају те радње и ти односи, те структура и композиција задатка треба да максимално мотивишу ученика да приступи његовом рјешавању и да математички савлада ту реално-практичну ситуацију.

Јасноћа проблемских задатака највише зависи од одређености питања, односно онога што рјешавањем задатка треба дознати, а разумљивост од његовог говорног, језичког и граматичког обликовања. Редослијед података у тексту, присуство сувишних података, те формулација проблемског питања, одређују степен тежине задатка.

У много случајева проблемско питање није потребно формулисати, њега треба да одреди и да формулише ученик.

Оправдање за овакво тврђење произлази из следећег:

- а) Задаци које поставља живот немају формулисано питање;

б) Самосталним одређивањем шта се све може израчунати у датом задатку полаже се сигуран темељ дискусији математичких задатака;

в) Одређивање и формулисање питања датог задатка представља стваралачки рад у овој области;

г) Ученик који је сам правилно одредио питање већ је, у већини случајева, ријешо задатак;

д) Одређивање питања датих задатака представља прву етапу у самосталном састављању проблемских задатака.

Избор проблемских задатака се врши на основу циља и оперативних задатака наставе математике, а спада међу најделикатније проблеме те наставе.

Степен тежине изабраних задатака треба да зависи од типа часа на коме се примјењују. Код обраде нових садржаја задаци ће бити једноставнији и формулисани тако да при њиховом рјешавању ученици примјењују појмове и правила које су усвојили на том часу. Разноврснији и сложенији задаци постављаће се ученицима на часовима вјежбања и провјеравања, уз услов да буду карактеристични за наставну тему којој припадају, а најсложенији на часовима додатне наставе.

„Приликом избора задатака мора се стално имати у виду да сваки задатак треба да има одређени циљ, сврху, тј. треба да буде карика у добро осмишљеном систему задатака за одређену наставну јединицу и тему. Наставне функције задатака треба да схвате и ученици. Сваки задатак који се даје ученицима треба нечему да их научи (упознавање новог градива, овладавање неким поступком, оспособљавање за неку математичку активност и др.). Рјешавање сваког математичког задатка треба да буде корак напријед у улажењу ученика у математику, тј. у обогаћивању њихових знања и искуства, оспособљавању да се оријентишу у различитим проблемским ситуацијама“ (Дејић 2000: 225).

Методика рјешавања проблемских задатака

Оспособљавање ученика за самостално рјешавање проблемских задатака тече од првих дана првог разреда. Будући да тај период представља почетак математичког образовања, у њему се користе веома једноставни проблемски задаци чије проблемске ситуације произлазе из најнепосредније околине ученика и чије је квантитативне податке и односе могуће очигледно представити. Такви су задаци утемељени на очигледности непосредне реалне ситуације и рјешавање се често поткрепљује очигледним средствима. Како ученици напредују у усвајању знања, очигледна компонента се постепено смањује, а појачава интелектуална, мисаона, која представља циљ рјешавања математичких проблема и у функцији је стицања научних знања.

Будући да су проблемски задаци сложенији од осталих врста текстуалних задатака и да њихово рјешавање укључује мноштво мисаоних

операција, методичко обликовање тих задатака захтијева примјену *сложенијих методских поступака*, који се састоје од сљедећих фаза:

1. *сагледавање проблема*;
2. *анализа проблема* (учавање датих и тражених величина);
3. *проналажење у когнитивној структури информација, појмова и правила неопходних за његово рјешавање*;
4. *дефинисање математичког модела, односно алгоритма*;
5. *рјешавање задатка*;
6. *провјеравање резултата и дискусија рјешења*.

Уводна фаза подразумијева читање задатка и схватање проблема.

Друга фаза представља разумијевање датих величина (појмова, термина и симбола), учавање тражених величина, те веза и односа између њих.

У трећој фази актуализују се одређена математичка знања која ученик посједује у циљу формирања најкраћих путева који воде до рјешења.

У фази стварања поступка, алгоритма, односно модела рјешавања повезују се одређене информације у систем који је у могућности да ријешити проблем. Често постоји већи број путева који воде до тачног рјешења, а прихвата се онај који је рационалнији и једноставнији.

Ипак, потребно је захтијевати од ученика да многе проблемске задатке рјешавају на више начина, јер долажење до рјешења различитим поступцима и методама:

1. најбоље, најбрже и најсигурније оспособљава ученике за самостално рјешавање проблема;
2. развија мишљење до максималних могућности;
3. развија иницијативу и смисао за проналажење и испитивање разних могућности рјешавања;
4. навикава ученике на тражење најкраћег и најједноставнијег рјешења датог проблема;
5. оживљава и освјежава рад самог наставника (често се догађа да наставник годинама рјешава са ученицима исте задатке на исти начин и тиме се његов рад шаблонизује и постаје досадан и за њега и за ученике).

Након дефинисања математичког модела, приступа се његовом *рјешавању*. У овој фази долази до изражаја техника рачунања, односно извођења рачунских операција.

Провјеравање резултата и дискусија рјешења подразумијева одговарајућу интерпретацију у сфери оригинала помоћу математичко-логичких операција. Добијене информације уграђују се у дотадашњи систем знања ученика, односно у област примјене математичких модела.

Наведени методски поступак оправдава тврдњу да сваки проблемски задатак представља *двоструки проблем за ученике*, који се огледа у сљедећем:

1. Морају прочистити, схватити и детаљно анализирати проблем, те одредити поступак којим ће га рјешавати;
2. Морају извршити неопходна израчунавања, да би дошли до ну- меричког рјешења.

Сигурно је да први проблем задаје ученицима много више тешкоћа него други.

„Прави“ проблемски задаци, у цјелини посматрано, немају „прави- ла“ за рјешавање, него се оно своди на познавање одређених правила ра- чунских операција и основних законитости математике.

Да би се приступило рјешавању *сложенијих проблемских задатака*, неопходно је испуњавати одређене захтјеве:

1. Рјешавању ма ког сложеног задатка не може прићи онај који не зна рјешавати просте задатке.
2. Рјешавање сложених задатака захтијева изграђену математичку културу која се стиче самосталним усвајањем математичких знања и путем учења откривањем. Ученици који примају готова знања не могу рјешавати проблемске задатке с потпуним разу- мијевањем и најчешће их раде шаблонски или по аналогiji.
3. Ученици се не могу оспособити за рјешавање сложених про- блемских задатака ако им се у томе увијек помаже, ако се зада- ци рјешавају увијек колективно, ако се не подстичу, ако им се не пружа могућност, односно ако се не захтијева да сваки од њих и самостално, у правом и пуном смислу те ријечи, рјешава и ријеша велики број задатака.

При рјешавању тежих проблемских задатака, тј. задатака у којима прости задаци из којих се они састоје нису довољно јасни ученицима или се везе међу њима не уочавају лако, ученицима се помаже на тај начин што им се постављају други, прости или мање сложени задаци које они могу да ријеше, а који им омогућавају да схвате дати задатак.

Осим тога, „да би могао да ријеша неки проблем, ученик мора да располаже одговарајућим појмовима и правилима. Он мора да је већ у ста- њу да примијени извјесне когнитивне способности, нпр. да анализира окол- ности, да упоређује, да успоставља односе. Мора бити у стању да примије- ни хеуристичка правила“ (Zech 1999: 208).

Према томе, пожељно је, већ од првог разреда основне школе, дава- ти ученицима одређена једноставна правила за рјешавање конкретних про- блемских задатака и пазити на придржавање истих.

На примјер:

понављање садржаја сопственим ријечима,

- разјашњавање конкретне ситуације давањем одредница и скица,
- разликовање датог и траженог подвлачењем у боји,
- проналажење неопходних података за рјешавање,
- размишљање о евентуално потребним међукорацима,

- препознавање, одвајање и фиксирање, за рјешавање неопходних рачунских задатака,
- формулисање одговора,
- провјера резултата.

Код давања хеуристичких правила постоји шест поступака или метода које се осмишљено допуњавају:

1. *Импулси, питања и упутства наставника* за вријеме рјешавања задатка према наведеним правилима.
2. *Рефлексија након рјешења задатка* и повремено фиксирање неких запамћених правила.
3. *Когнитивно моделовање* поступка при рјешавању проблема од стране наставника.
4. Рад ученика према *писменим упутствима*.
5. Циљно увјежбавање *парцијалних радњи*.
6. По могућности, самостално *рјешавање проблема* од стране ученика.

Умјетност креирања наставе састоји се у томе да се нађе уравнотежена мјера за сваки начин поступања и да се дјелује против могућих недостатака *варијацијом и комбинацијом метода*, а идеал коме тежи почетна настава математике је оспособљеност ученика за *самостално рјешавање проблемских задатака*.

Сложенији проблемски задаци у нижим разредима основне школе своју пуну примјену налазе у *додатној настави математике*. Потреба за овим посебним обликом рада произилази из појачаног интереса неких ученика за математику и њихове жеље за увјежбавањем, проширивањем и продубљивањем знања.

Мотивација у рјешавању проблема

У наставном процесу, без обзира о ком типу учења се радило, неопходно је да наставник адекватно мотивише ученике. Рот (1976) тврди, премда помало претјерано, да је поучавање умјетност да се учење адекватно мотивише.

Мотивација игра веома важну улогу у процесу рјешавања проблема. Она је веома важна и на почетку и у току рјешавања, пошто ученик треба самостално да дође до рјешења, а не да одустане пред првом тешкоћом на коју наиђе.

Зато је неопходно уводни дио часа „пројектовати“ тако да ученици одмах на почетку могу да разумију шта ће се учити, на који начин, шта се од њих тражи, а потом се ослањати на когнитивни нагон ученика да нешто желе да науче, на нагон за дјеловањем, као и групно такмичење.

Мотивација је у непосредној вези са постављеним задатком. Избор одговарајућег и интересантног задатка, прилагођеног способностима уче-

ника, доприноси њиховој мотивацији која прати цјелокупан ток активности при рјешавању проблема. При томе треба имати у виду сљедеће:

„Један задатак је сувише лак, ако га ученик ријеши простим подсјећањем на већ научена знања и сазнања. Задатак је сувише тежак, ако нису на располагању неопходна знања и сазнања, односно ако се не могу произвести. У овом случају ће ученик кад-тад одустати, могуће са осјећањем неуспјеха. Ако ученик пак није у стању да на основу његове когнитивне структуре непосредно ријеши неки проблем, али успијева да развије хипотезе и алтернативе, онда се ради о задатку средњег степена тежине; од оваквих задатака потиче најјача активност при рјешавању проблема“ (Eigler, Judith 1973: 86).

Новија истраживања доказују да принцип средње тежине, ипак, не може бити општеважећи пошто је у „стандардној“ разредној настави тешко погодити тај ниво због великих разлика међу ученицима. Зато се предлаже да понекад пустимо ученике да сами себи одаберу проблемске задатке који им одговарају, уз услов да их претходно оспособимо да правилно процјењују ниво тежине.

Понекада се ученицима може допустити да сами формулишу проблем (проблемско питање) на основу дате ситуације и познатих података у задатку. Они се могу подстицати да и сами постављају проблеме и размишљају о њима када им се изложи два крајња стања неког процеса, појаве или догађаја. Упоредивањем крајњих стања настаје потреба за истраживањем процеса који је водио од почетног ка крајњем стању.

Може се поставити и захтјев да ученици при рјешавању постављених задатака примјењују различите начине и путеве. Овај облик рада је важан зато што омогућава ученицима да се сами увјере у тачност рјешења, да открију зависности између података у задацима и да их на различите начине искажу.

„Интересантан и веома користан рад, везан за ријешене задатке је и састављање и рјешавање задатака супротних ријешеном задатку. Самостално састављање супротних задатака корисно је исто као и рјешавање постављеног задатка. Због тога је неопходно, паралелно са рјешавањем задатака, оспособљавати ученике да самостално састављају супротне задатке“ (Радојевић 1984: 167).

Значајно и занимљиво ученицима је и састављање задатака и формулисање проблема према унапријед датој схеми која доприноси схватању суштине задатка и упознавању његових елемената. Тематику и начин исказивања ученик бира потпуно слободно, али у избору бројевних података мора водити рачуна о изводљивост рачунских операција. Уз то, корисне су и вјежбе самосталног састављања схема, а потом и задатака чији јој текст и бројевни подаци одговарају.

Проблемска ситуација се може створити и у случајевима када постоји противрјечност између откривеног рјешења и недостатка знања ученика за његово објашњење.

Уопштено гледано, ученике привлаче и мотивишу проблемски задаци који описују неке динамичке процесе и акције које су везане за активности људи, начин њиховог живота и рада, проблеме и тешкоће са којима се сусрећу, последице које су њима проузроковане.

„Аналогно томе, проблемска ситуација се најчешће ствара реалном и занимљивом причом при чему треба имати у виду да у том добу није акценат на сложености у математичком проблему, већ на нечему корисном, непознатом, а истовремено занимљивом“ (Петровић: 1997).

Закључак

Рјешавање проблема у почетној настави математике, као тип учења или врста наставе, представља један од најзначајнијих чинилаца у превазилажењу недостатака данашње школе и подизању исхода наставе на виши ниво, од стицања знања ка развоју ученичких стваралачких способности. Очекује се да измијењена улога наставника у том систему отклони слабости које стално репродукује традиционална настава; да механичко памћење уступи мјесто мишљењу, репродукција продукцији, опонашање стваралаштву; да ученици рјешавају проблеме, уочавају односе између датог и траженог, познатог и непознатог, откривеног и неоткривеног, старог и новог, да пронађу нове путеве рјешавања проблема, да долазе до нових појмова и правила, нових знања, закључака и генерализација. Тиме би васпитно-образовни рад у почетној настави математике учинили рационалнијим, квалитетнијим и ефикаснијим.

Литература

- Дејић 2000: Дејић, М., *Методика наставе математике (разредна настава)*, Универзитет у Крагујевцу, Учитељски факултет у Јагодини.
- Eigler, Judith 1973: Eigler, G., Judith, H. u. a., *Grundkurs Lehren und Lernen*, Weinheim/ Basel.
- Zech 1999: Zech, F., *Grundkurs Mathematikdidaktik - Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, Beltz Verlag - Weinheim und Basel.
- Милинковић 2006: Милинковић, Д., *Геометријско моделовање проблемских задатака путем образовног софтвера* – докторска дисертација, Педагошки факултет, Бијељина.
- Петровић 1997: Петровић, Н., *Модели диференциране наставе математике и успјех ученика*, у: Ђурић, Ђ.: *Особине ученика и модели диференциране наставе – чиниоци ефикасности основног образовања I*, Учитељски факултет, Сомбор.
- Радојевић, Радојевић 1984: Радојевић, П., Радојевић, В., *Методика наставе математике за IV годину педагошке академије*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.
- Roth 1976: Roth, H., *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens*, Hannover.

ФОРМУЛИСАЊЕ ПРОБЛЕМА КАО КОМПОНЕНТА КРИТИЧКОГ МИШЉЕЊА УЧЕНИКА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

У савременим тенденцијама образовања апострофира се личност која уме критички да мисли, а од образовних система свих земаља очекује се васпитање и образовање такве личности. Од школе се очекује да образује ученике који ће поседовати компетенције неопходне за живот у савременом друштву, међу којима способности критичког мишљења заузимају централно место. То је и логично, када се има у виду да савремени човек живи у времену интензивног и бурног развоја, у коме имамо нагли пораст информација, знања, интензиван развој науке и технике, велики утицај пропаганде, медија, тако да се способност појединца мери по томе колико он уме да ствара, одабира, вреднује информације, продукте и друго, једном речју критички мисли.

Развијање критичког мишљења истакнуто је као важан задатак васпитања и образовања у Србији у свим званичним документима који се одnose на васпитање и образовање. Задатак је експлицитно истакнут и у *Наставном програму математике за основну школу у Републици Србији* и он обавезује учитеља „да развија ученикову способност посматрања, опажања и логичког, *критичког* (подвукао С. М.), стваралачког и апстрактног мишљења“ (1996: 3, *Правилник о наставном програму* 2004, 2005, 2006).

Прво питање које се намеће при реализацији овог важног задатка почетне наставе математике је *Шта је то критичко мишљење?*

Пишући о проблему дефинисања критичког мишљења, Ј. Пешић запажа: „Појам критичко мишљење недвосмислено је ’у моди’. Сам појам је врло фреквентан, заступљен је у свим сферама друштвеног живота. Срећемо га и преко бројних сродних појмова, као што су критичност, рационалност, рефлексивно просуђивање, контекстуално мишљење и др. или преко појединих његових конституената (аспеката) као што су критичка рецепција, аналитичка способност, вештине аргументовања и дебатована и сл.“ (2003: 411). И други теоретичари који се баве критичким мишљењем слажу се да је реч о веома комплексном и недовољно јасно дефинисаном појму (McPeck 1981, Siegel 1988, Paul 1982, 1995).

Педагошка, дидактичка и методичка литература намењена учитељима сам појам ближе не одређује. У *Упутству за реализацију програма математике*, као и у приручницима намењеним учитељима појам *критичко мишљење* се ближе не одређује нити се дају упутства за његово развија-

* sanjamaricic10@gmail.com

ње, што све ствара проблеме у његовој реализацији, тако да, упркос важно-сти постављеног задатка и захтева да се критичко мишљење развија у на-стави математике реализацију овако формулисаног захтева прате бројни проблеми који се пре свега односе на „јасно дефинисање појма *критичко мишљење*“ (Шпијуновић, Маричић 2007: 117).

У литератури срећемо велики број одређења појма *критичко ми-шљење*, као и теоријских концепција које покушавају теоријски да заснују овај сложен појам. У тим одређењима постоји велико термилошко шаре-нило, како у употреби термина којима се појам жели дефинисати, тако и у различитим контекстима навођења. Готово да је свако од одређења критич-ког мишљења настало имајући у виду специфичан контекст употребе.

Први и неопходан корак у реализацији овог задатка почетне наста-ве математике „представља операционализација појма која подразумева од-ређивање садржине појма *критичко мишљење*“ (Маричић 2009а: 484). Са-му операционализацију отежава чињеница да не постоји јединствено слага-ње међу ауторима у дефинисању појма критичког мишљења и одређивању способности и вештина које би чиниле његову садржину, упркос великом броју одређења. На основу анализе теоријских концепција, одређења кри-тичког мишљења и проучавања феномена критичког мишљења, може се за-кључити да је критичко мишљење сложен феномен који се не може одре-дити једнозначно, издвајањем једне способности, већ сложена интелекту-ална активност чију садржину чини више способности и чија операциона-лизација мора бити усклађена са специфичностима садржаја почетне наста-ве математике и узрастом ученика.

На основу проучавања постојећих одређења и теоријских концеп-ција критичког мишљења, а имајући у виду специфичност математике као предметног подручја, узраст ученика на коме се тежи развијању критичког мишљења, специфичност математичких садржаја, критичко мишљење мо-жемо да дефинишемо као „сложену интелектуалну активност која обухвата следеће способности: формулисање проблема, реформулисање проблема, евалуацију, осетљивост за проблеме, закључивање и вредновање закључака (Маричић 2009а: 485).

Свака од наведених компонената је сложена и подразумева више различитих способности, а ми ћемо пажњу посветити *формулисању про-блема*.

Посебну улогу и значај у почетној настави математике представља-ју задаци формулисани у виду математичких *проблема*. За њих С. Првано-вић каже да представљају покретачку снагу мисаоног рада, а „формулиса-ње проблема, стварање проблемске ситуације је основни задатак наставни-ка, ако жели да успешно води ученике путем математичког образовања“ (1970: 64).

Под појмом проблем, у најширем смислу речи, у почетној настави математике подразумевамо сваки задатак који је у стању да покрене учени-ково мишљење, да активира сазнајне структуре, опажаје, представе, раније

формиране појмове, све што има неке везе са циљем коме проблем тежи. Решавање проблема захтева уочавање тананих и скривених релација међу раније формираним појмовима, повезивање и употребу познатих чињеница на нов начин, успостављање и комбиновање мисаоних операција, упорност у раду и слично. Једном речју, проблем управља мисаоним радом.

Улога проблема у почетној настави је вишеструка. Преко проблема учитељ уводи ученике у нове садржаје, проширује, утврђује, систематизује и проверава усвојеност наставних садржаја. Основно је да ученик разуме проблем, његову структуру, односе који постоје у њему, однос између траженог и задатог, услове и потребне елементе за његово решавање. Разумевање и уочавање наведених елемената обезбеђује *проблемска ситуација*.

Полазну тачку сваког мисаоног рада представља одређена реална проблемска ситуација, на основу које ученици формулишу проблем. Према речима совјетског психолога С. Л. Рубинштајна права одлика човека који мисли је способност да види или уочи проблеме тамо где они постоје (Рубинштајн 1981). Неспособност ученика да уочи проблем и да га формулише, указује на формализам у усвајању садржаја и њихово неразумеваше.

Поједини аутори не праве разлику између проблема и проблемске ситуације. Други, пак, проблемску ситуацију посматрају као почетну фазу у решавању проблема. Проблемска ситуација изражава биполарност између: датог и траженог, познатог и непознатог, јасног и нејасног, откривеног и неоткривеног, експлицитног и имплицитног, извесног и неизвесног, што у основи представља уочавање или виђење проблема.

Нажалост, питања везана за уочавање проблема и његово формулисање нису довољно проучена. Методичаре наставе математике интересује и како се проблеми решавају, али и како се они откривају и постављају. Шта се то дешава у глави ученика када формулише проблем, које захтеве треба да задовољи његово формулисање, какве се грешке при томе дешавају, само су нека од бројних питања која нису разјашњена.

Један од показатеља разумевања проблема јесте његово формулисање на основу проблемске ситуације. Да би ученик формулисао проблем мора најпре да увиди шта му је дато и шта се од њега тражи, шта све може да израчуна на основу дате проблемске ситуације. При томе се од ученика захтева флексибилност, флуентност, оригиналност, прецизност и јасноћа у изражавању идеја и критичност у мишљењу.

Поред формулисања проблема на основу проблемске ситуације ученици у почетној настави математике формулисане проблеме изражавају математичким језиком, језиком симбола, али и исто тако проблеме изражене симболиком формулишу речима. Процес формулисања проблема на основу проблемске ситуације у почетној настави математике за ученика представља чин стваралаштва, који никада није комплетан и завршен ако није прожет критичношћу мишљења. То значи да ученик сваки формулисани проблем мора да провери, процени да ли задовољава све захтеве одређене проблемске ситуације, да ли су исправно, јасно и прецизно исказане везе

и релације међу подацима, симболима и исказима у проблему. Управо је то и разлог због којег издвајамо формулисање проблема као способност критичког мишљења ученика у почетној настави математике.

То је истовремено и разлог што су први тестови критичког мишљења садржавали способност названу способност „дефинисања проблема“ (P. L. Dressel 1954) која је блиска нашем схватању формулисања проблема. Суштина захтева у том тесту се огледала у томе да је у сваком задатку описана ситуација за коју се нуди пет могућих становишта са којих се може третирали дати проблем у задатку. Захтев који се поставља пред испитаника је да одабере један одговор који дати проблем третира на шири и обухватнији начин.

Једна од група вежби које је Р. Квашчев (1969) користио у свом истраживању развијања критичког мишљења ученика у настави историје и физике односила се на формулисање проблема. Под формулисањем проблема Р. Квашчев подразумева уочавање проблема и његово исказивање речима. За успешно формулисање проблема, како то истиче Р. Квашчев, потребно је да „апстрахујемо небитне податке, да значајне везе градива уопшtimo и да откријемо ново значење релевантних чињеница“ (1969: 158). Формулисање проблема за аутора захтева да у процесу апстракције и генерализације критички процењујемо значајност чињеница и да изводимо закључке на основу критичког проверавања постављених хипотеза. Ученици приликом формулисања проблема морају да трагају за суштинским својствима проблема, уочавају веома мале нијансе и служе се прецизним језиком. Они морају да уоче проблемску ситуацију и дате елементе, уоче односе унутар дате проблемске ситуације и на основу тога формулишу проблем (чак са више становишта и начина) а затим их критички вреднују (Квашчев 1969: 158).

Формулисање проблема као способност критичког мишљења у почетној настави математике захтева висок ниво мисаоне активности ученика, а с обзиром на специфичност садржаја и узраст ученика подразумева следеће способности:

1) Способност ученика да уочи проблем и да га формулише на основу проблемске ситуације, формулисање већег броја проблема на основу проблемске ситуације и критичко вредновање формулисаних проблема;

2) Откривање значења математичке симболике и превођење те симболике на говорни језик, уочавање веза међу симболима и испољавање критичности у исказивању тих веза речима;

3) Трагање за суштинским својствима у формулацији проблема, уочавање нијанси у формулацији проблема и служење прецизним језиком.

Да би ученик формулисао проблем на основу проблемске ситуације мора да уочи везу између датих података и јасним формулацијама исказе шта све може да израчуна на основу датих података. Формулисање проблема захтева јасно и прецизно уочавање веза између датог и траженог, екс-

плицитног и имплицитног, могућег и немогућег, познатог и непознатог, јасног и нејасног (пример 1).

Пример 1. *Базен се пуни помоћу две цеви. За један минут из једне цеви се улије 116 литара воде, а из друге 123 литра. После 4 минута нестало је воде. Шта све можеш да израчунаш?*

На пример, на основу дате проблемске ситуације могуће је формулисати следеће проблеме:

- 1) *Колико је укупно литара воде наливено у базен из обе цеви?*
- 2) *Колико је литара воде наливено у базен из прве цеви?*
- 3) *Колико је литара воде наливено у базен из друге цеви?*
- 4) *За колико литара воде је више наливено из друге цеви него из прве цеви у базен?*
- 5) *За колико литара воде је мање наливено из прве цеви него из друге цеви у базен?*

Наравно, приликом формулисања проблема могуће су грешке тако да се сваки формулисани проблем треба критички вредновати, тако што се утврђује да ли сви елементи из формулације проблема одговарају полазним, датим елементима и из њега следе.

Друга способност формулисања проблема односи се на откривање значења симбола и превођења симбола на говорни језик, уочавање веза међу симболима и испољавање критичности у исказивању тих веза речима (пример 2).

Пример 2. *Заокружи слово испред формулације за коју мислиш да одговара датом запису:*

$$700 + (700 - 470) =$$

а) *Када је Урош прешао 700m од куће, до школе му је остало 470m више него што је прешао. Колика је дужина Урошевог пута од куће до школе?*

б) *Када је Урош прешао 700m од куће, до школе му је остало да пређе још 470m. Колика је дужина Урошевог пута од куће до школе?*

в) *Када је Урош прешао 700m од куће, до школе му је остало да пређе 470m мање него што је прешао. Колика је дужина Урошевог пута од куће до школе?*

г) *Када је Урош прешао 700m од куће и још 470m стигао је у школу. Колика је дужина Урошевог пута од куће до школе?*

Као што се види на основу датог записа формулисана су четири проблема од којих је само један одговара датом запису. Критичко мишљење долази до изражаја у уочавању односа који постоје међу математичким симболима на основу таквог којих ученик треба да пронађе формулацију која одговара датом симболичком запису.

Способност трагања за суштинским својствима у формулацији проблема, уочавање малих нијанси у формулацији проблема и служења прецизним језиком илуструје пример 3.

Пример 3. Једно село има 758 становника. Деце је 121. Шта можеш да израчунаш? (Заокружи слово и израчунај).

- а) Колико у селу има жена?*
- б) Колико укупно становника има село?*
- в) За колико у селу има мање одраслих него деце?*
- г) За колико у селу има више одраслих него деце?*
- д) Колико је мушкараца у селу?*

За разлику од захтева којим се од ученика тражи да формулише проблем на основу проблемске ситуације, ова способност подразумева да ученик одабере формулацију проблема која одговара датој проблемској ситуацији. Критичност мишљења се испољава у језичкој прецизности која долази као последица јасног сагледавања проблемске ситуације.

Овде су наведени само неки примери који илуструју способности формулисања проблема као компоненте критичког мишљења ученика. Критичко мишљење у процесу формулисања проблема долази до изражаја и на почетку и на крају тог процеса. Наиме, да би ученик успешно формулисао проблем на основу проблемске ситуације, ма како да је она представљена, мора најпре јасно да уочи све везе и односе међу подацима у садржају проблема, критички процени односе, уочи имплицитно на основу експлицитно датог, одабере оно што је могуће од немогућег, јасно од нејасног, дато од траженог, реално од иреалног и на основу тога прецизно и јасно формулише проблем. Формулисани проблем се мора критички вредновати, мора се утврдити да ли су сви односи из проблемске ситуације јасно, добро и прецизно уочени, да ли су могући и реални за решавање. Чињеница да ученик уме јасно, прецизно и тачно да формулише проблем на основу проблемске ситуације, показује да он схвата и разуме садржај који је усвојио у почетној настави математике.

Улога учитеља у почетној настави математике, када је у питању формулисање проблема, је да:

- свакодневно ставља ученике у ситуацију да формулишу проблеме, а то може бити израз, једнакост, проблемска ситуација, започето питање и слично, јер су то ситуације које постоје у почетној настави математике од којих се полази у раду;
- захтева од ученика да формулишу реалне проблеме;
- захтева од ученика да формулише што већи број проблема, на основу датог захтева који може бити израз, једнакост, слика, проблемска ситуација;
- критички са ученицима вреднује формулисане проблеме уз јасну и разложну аргументацију;

- захтева од ученика прецизност и јасноћу у изражавању приликом формулисања проблема;
- ствара ситуације у којима ће ученици да вреднују своје и туђе формулације проблема;
- даје ученицима готове формулације са малим нијансама у изражавању односа који чак могу бити и погрешни како би ученици схватили значај прецизности и критичности приликом формулисања проблема.

Формулисање проблема готово је немогуће без стваралачког мишљења ученика које се испољава у оригиналности идеја за формулисање проблема, флексибилности у приступу формулисању проблема и флуентности идеја. Критичко мишљење је у оваквом ставалачком раду, као и у сваком другом, неопходно, јер ученик, уколико жели да формулише проблем мора јасно и прецизно да уочи везе и односе међу подацима који му се нуде као дати, увиди однос између датог и траженог, уочи и искаже имплицитне податке у експлицитној форми, осмисли, пре свега, реалну ситуацију и односе изрази реално, а све са великом прецизношћу у изражавању. Да би се критичко мишљење ученика у почетној настави математике успешно развијало, потребан је стучан, креативан и мотивисан учитељ који ће имати снаге, жеље и воље да ствара проблемске ситуације и ставља ученике у ситуације да формулишу проблеме, али исто тако и да вреднују формулисане проблеме.

Литература

- Квашчев 1969: Квашчев, Р., *Развијање критичког мишљења код ученика*; Београд: Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије.
- Липман 1988: Lipman, M., *Critical Thinking – What Can It Be?*; Educational Leadership, vol 467, str. 38–43.
- Маричић 2009а: Маричић, С., Операционализација критичког мишљења као услов његовог развијања у настави математике, у: *Образовање и усавршавање наставника – циљеви и задаци васпитно-образовног рада*, Учитељски факултет, Ужице, стр. 479–488.
- Маричић, Шпијуновић 2009б: Маричић, С., Шпијуновић, К., Развијање критичког мишљења код ученика – стратегије, методе и фазе развоја, *Зборник радова*, бр. 11, Учитељски факултет, Ужице, стр. 61–72.
- Маричић 2010: Маричић, С., Оспособљеност учитеља за развијање критичког мишљења ученика у почетној настави математике, у: *Образовање и усавршавање наставника – дидактичко-методички приступ*; Учитељски факултет, Ужице, стр. 357–368.
- McPeck 1981: McPeck, J. E., *Critical Thinking and Education*; New York: St. Martin's Press.

- Наставни програм математике за основну школу у Републици Србији* (1996), Београд: Архимедес.
- Пешић 2006: Пешић, Ј.. *Једно схватање критичког мишљења и његова примена у конструкцији уџбеника*; докторска дисертација, скрипта.
- Првановић 1970: Првановић, С., *Методика савременог математичког образовања у основној школи*; Београд: Завод за уџбенике и наставна средства Србије.
- Правилник о наставном програму за први и други разред основног образовања и васпитања*, бр. 10, Службени гласник, Београд, 2004.
- Правилник о наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања*, бр. 1, Београд: Службени гласник, Београд, 2005.
- Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања*, бр. 3, Београд: Службени гласник, Београд, 2006.
- Рубинштајн 1981: Рубинштајн, С. Л., *О мишљењу и путевима његовог истраживања*; Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Vec, Kompare 2006: Rupnik Vec, T., Kompare, A., *Kritično mišljenje v šoli: strategije poučevanja kritičnega mišljenja*; Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Siegel 1988: Siegel, H., *Educating Reason: Rationality, Critical Thinking and Education*; New York: Routledge.
- Fisher 1995: Fisher, R., *Teaching children to Think*; United Kingdom: Stanley Thornes.
- Шпијуновић, Маричић 2007: Шпијуновић, К., Маричић, С., *Развијање критичког мишљења као циљ и задатак наставе математике*; *Зборник радова*, бр. 8, Учитељски факултет, Ужице, 2007, стр. 113–122.
- Шпијуновић, Маричић 2009: Шпијуновић, К., Маричић, С., *Реформулисање проблема као компонента критичког мишљења ученика потенцијално даровитих за математику*, у: *Зборник радова са Прве интернационалне конференције „Надарените и талентираните креатори на прогресот – теорија и пракса“*, Универзитет „Св. Климент Охридски“, Педагошки факултет, Битола, стр. 457–463.

ШКОЛЕ У СЕЛИМА СРБИЈЕ НА БЕСПУЋУ

*„Ако мислите да је образовање скупо,
размислите о његовој алтернативи“.*

Мало је у систему васпитања и образовања у Србији проблема који су толико актуелни као што је случај са малим школама у селима Србије. Та актуелност произлази из значајне друштвене и педагошке улоге коју мале школе имају, њихове заступљености у школској мрежи, традиције дуге колико и организовано школовање на нашим просторима, демографских и миграционих кретања становништва, потребе за рационализацијом мреже школа, незадовољавајућим успехом који ученици у тим школама постижу, недовољном пажњом која се посвећује припремању учитељског кадра за рад у тако сложеним условима и тако даље.

Исто тако, мало је области које су у тој мери запостављене, у којима има толико стихије, дилема и неспоразума, а тако мало конкретних истраживања и осмишљеног приступа, као што је то случај у области организације рада у тим школама. Отуда и потреба да се овај проблем актуелизује и да се на њега скрене пажња педагошке и укупне друштвене јавности.

Међутим, овај рад нема претензије да се бави проблемом у целини, већ само неким његовим аспектима од којих смо издвојили демографску слику Србије, мрежу школа, успех који ученици остварују у малим сеоским школама и начин припремања учитеља за рад у тим школама.

1. Економске, историјске и опште друштвене околности условиле су да демографска слика Србије последњих двадесетак година има изразито негативне карактеристике. Републички завод за статистику процењује да је 2008. године у Србији живело 7.350.222 становника, од којих је 3.074.977 (41,84%) живело у сеоским и приградским подручјима. Просечна жиботна доб становника у Србији 2008. године износи 41,1 годину, а индекс старења (однос између старих 65 и више година и младих до 15 година живота) је 1,12. Исти завод износи податак да Србија у периоду од 1991–2002. године бележи пад становника од 78.836, а да је природни прираштај 2008. године на 1000 становника био негативан и износио чак -4,6. На седници Националног просветног савета Републике Србије у мају 2010. године могло се чути да је у Србији сваке године преко 30 000 становника мање, што

* kspijun@ptt.rs

значи да сваке године са географске карте Србије нестане град величине Пожеге, Параћина или Ћуприје.

За разлику од просечног стања, стопа природног прираштаја (%) 2008. године позитивна је само у неколико општина у Србији и примера ради у Тутину износи 11,8, Новом Пазару 11,0, а у Прешеву 9,6 (Рашевић, Пенев 2010: 2).

Смањивање броја становника посебно је карактеристично за сеоска насеља и одвија се све бржим темпом. То ће, према неким прогнозама, утицати да се убрзо број сеоских насеља у Србији смањи чак три пута. Већ сада у Србији постоји велики број села у којима се одавно није чуо плач детета нити се заљуљала колевка.

Посебно забрињава ниво образовања сеоског становништва који је, према процени Републичког завода за статистику за 2008. годину, знатно нижи од нивоа образовања градског становништва. Тако је, као што се види из табеле 1, проценат становника без завршене школе у селу скоро три пута већи од процента одговарајућег становништва у граду, а истовремено је проценат становника са високом школом седам, а са вишом школом три пута већи у граду него у селу. Ако се томе дода и податак да је у Србији 2002. године 1,3 милиона људи било неписмено или недовољно образовано и да се ситуација до данашњих дана није битно променила, онда разлога за забринутост свакако има.

Табела 1: Ниво образовања становништва у Србији (%)

	Без школе	1-4 разреда	4-7 разреда	Основна школа	Средња школа	Виша школа	Висока школа
Град	3,3	0,9	7,2	21,1	50,4	6,5	10,6
Село	9,1	3,4	23,9	28,7	31,2	2,2	1,5

Све то чини да демографска слика у Србији изгледа прилично суморно и са јако израженом тенденцијом да се постојеће стање и даље погоршава. То, свакако, мора имати утицаја и на мрежу школа и у селима довести до драматичног смањења броја школских места.

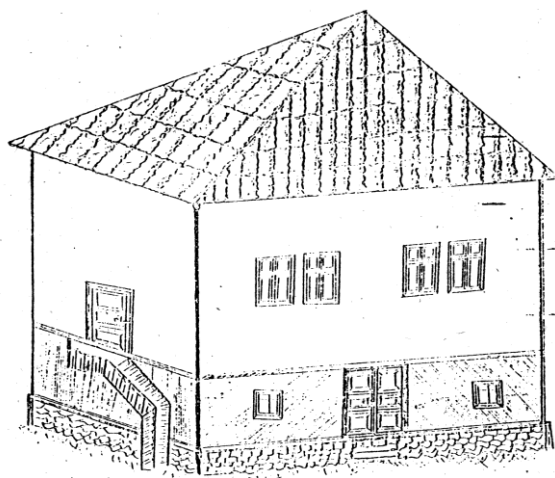
2. Основна карактеристика школске мреже у Србији данас је њена уситњеност и подела на мали број основних школа са великим бројем ученика и велики број школа са малим бројем ученика. Тако приближно 30% школа образује 90% ученика, док 70% школа образује свега 10% ученика. Ако се има у виду демографска ситуација, онда се природно намеће закључак да мрежа школа мора претрпети битне измене и да ће многе сеоске школе бити затворене. О ком броју школа је реч, није тешко претпоставити, јер је у сеоским срединама лоцирано око 80% од укупног броја школских места у Србији. Ово тим пре, што је у Србији 2007. године, како истиче министар З. Лончар, било 48 школских места са по једним ђаком. Само

у Златиборском округу у периоду од 1970. до 1995. године затворена је 51, а од 1995 до 2010. године још толико основних школа. Изгледа да ће генерације које у Србији живе у 21. веку затварати школе које су са пуно ентузијазма и у изузетно тешким условима градиле генерације које су живеле у 19. и 20. веку.

Говорећи о проблемима образовања сеоског становништва у Србији, на скупу *Образовање сеоског становништва* у организацији САНУ у Београду 12. новембра 2009. године И. Ивић је, између осталог, изнео и следеће податке:

- у Србији има 2.067 четвороразредних школа,
- у тим школама има 3.611 одељења,
- од тог броја одељења 3.068 су комбинована одељења,
- просечан број ученика у комбинованом одељењу је 9,8.

Ове податке употпуњује изјава министра просвете Републике Србије Ж. Обрадовића у којој истиче да у 2009. години у Србији постоје 182 одељења у којима се број ученика креће од 1–5, а да преко 200 школа има мање од 10 ђака.



Слика 1: Школа у Лопижама, општина Сјеница. Отворена је по одобрењу турске управе 1855. године, а затворена 1990. године



Слика 2: Школа у Рачунићима, општина Бајина Башта, отворена 1948, а затворена 1982. године.

Представници Међународног монетарног фонда стално истичу захтев да се мрежа школа у Србији рационализује, да се школе у Србији финансирају према броју ученика, односно, да се број запослених сведе на „оптималну“ меру. Захтеви су толико гласни да задиру чак у државни суверенитет. Последица тих захтева је *Стручно упутство о формирању одељења у основним и средњим школама* Србије из 2010. године које, између осталог, предвиђа да комбиновано одељење од два разреда може да има до 20, комбиновано одељење од три или четири разреда може да има до 15 ученика, што само по себи и није неки проблем, али је проблем у томе што се за свако одступање од овог броја мора добити посебна сагласност министра просвете, а она мора бити у складу са захтевима Фонда.

Свакако да се рационализацијом, односно затварањем школа у селима широм Србије добија јефтинија школска мрежа. Поставља се, међутим, питање да ли је наш циљ да имамо што јефтинију школску мрежу или да имамо школску мрежу која ће у васпитном, образовном, културном, социолошком и сваком другом погледу бити што рационалнија и продуктивнија.

2. Квалитет образовања у сеоским школама често је изложен критици. Тако је Н. Трнавац (1992: 142), упоређујући успех ученика на тестовима знања из математике, познавања природе, познавања друштва и српског језика у малим сеоским школама са успехом ученика из републичког узорка дошао до података да је успех ученика из малих сеоских школа из наведених наставних предмета скоро за 50 одсто мањи у односу на успех ученика из републичког узорка (табела 2).

Табела 2: Успех ученика на тестовима знања (%)

	Математика	Познавање природе	Познавање друштва	Српски језик
Мале сеоске школе	36	33	38	25
Републички узорак	68	57	72	57

У истраживању Уницефа (2005), како наводи И. Ивић, ученици четвртог разреда који су наставу похађали у комбинованим одељењима остварили су 387 поена из српског језика и 400 поена из математике, док је републички просек био 500 поена. У истом истраживању нађене су и значајне разлике на различитим нивоима постигнућа ученик четвртог разреда који су наставу похађали у комбинованим одељењима у односу на национални ниво. Изузетно лоша постигнућа остварило је чак 51% ученика комбинованих одељења, за разлику од националног нивоа где је иста постигнућа имало само 14% ученика. Овде је интересантно напоменути да је да је највиши ниво постигнућа остварио приближно исти проценат ученика на националном нивоу (7%) и у оквиру комбинованих одељења (6%) (табела 3).

Табела 3: Успех ученика према нивоима (%). (Ниво Е представља изузетно лоша постигнућа, а ниво А је највиши ниво)

	Национални ниво	Комбинована одељења
Испод нивоа Е	14	51
Ниво Е	16	18
Ниво D	28	13
Ниво C	23	7
Ниво B	12	5
Ниво A	7	6

Национално тестирање ученика четвртог разреда основне школе из српског језика и математике спроведено у Србији 2007. године, такође, је показало да ученици сеоских школа постижу значајно слабије резултате од ученика градских школа. Међутим, у овом случају разлике нису тако драстичне, јер у сеоским срединама, осим комбинованих, постоји и релативно велики број чистих одељења у којима је успех ученика, по правилу, бољи од успеха ученика у комбинованим одељењима (табела 4).

Табела 4: Резултати националног тестирања ученика (%)

	Српски језик	Математика
Град	70	61
Село	59	52

Наведени подаци су веома индикативни и недвосмислено указују на потребу превазилажења раскорака у погледу успеха између ученика који наставу похађају у чистим и успеха ученика који наставу похађају у комбинованим одељењима. Да је то могуће учинити сведоче појединачни примери који показују да је и у условима рада у комбинованом одељењу могуће остварити исте, па чак и боље резултате него у чистим одељењима.

4. Потребно је истаћи и чињеницу да се на учитељским школама и педагошким академијама некада, а на учитељским факултетима у Србији сада, мало пажње посвећује припремању и оспособљавању учитеља да раде у сеоским школама, односно комбинованим одељењима.

Анализа планова и програма поменутих школа и факултета у Србији након Другог светског рата показује да у њима нема ниједног наставног предмета у оквиру кога би учитељи стицали знање неопходно за рад у комбинованом одељењу. Изузетак, у позитивном смислу, је Учитељски факултет у Ужицу на коме се, уназад неколико година, као изборни предмет изучава *Методика рада у комбинованом одељењу*.

У уџбеницима педагогије, дидактике и методика појединих наставних предмета скоро да нема ни речи о раду у комбинованом одељењу, а уколико таквих садржаја има они су веома уопштени и на нивоу информативности.

Студентска пракса, односно хоспитовање у комбинованим одељењима скоро да се и не организује.

Мало је и наменске литературе, а радови који се баве проблемима рада у комбинованом одељењу у педагошким листовима и часописима су права реткост.

Једном речју, не постоји теоријска основа за организацију наставе у комбинованом одељењу, а без ње је настава пропуштена случају и слепој емпирији.

Осим тога, округли столови, семинари, саветовања и огледни часови са овом тематиком права су реткост.

Методичко усавршавање учитеља за рад у комбинованом одељењу је отежано и због тога што већина од њих има малу или никакву помоћ од стране стручних служби и директора школа.

Ако се томе дода неповољан средински фактор и изолованост од колега и информација из струке, онда постоји реална опасност да учитељ који ради у комбинованом одељењу у стручном погледу стагнира, па чак и назадује, да његов стваралачки потенцијал из године у годину опада и да резултати које постиже у раду буду све слабији.

Зато су уласком у комбиновано одељење учитељи често збуњени и у недостатку сигурнијег ослонаца принуђени да следе свој дидактички и методички интуиционизам у тражењу решења за конкретне методичке проблеме, да непотребно „лутају“, импровизују и расипају своју и енергију ученика, да свој пут траже на путу којим су многи пре њих прошли, а нису

имали прилике или храбрости да стечено знање и искуство пренесу онима који долазе иза њих.

Отуда извесно охрабрење представљају напори које чини Министарство просвете Републике Србије да акредитованим програмом под називом *Рад у комбинованом одељењу* (аутори К. Шпијуновић и Ј. Продановић) обухвати што већи број учитеља који раде у таквим одељењима и на тај начин им помогне да што рационалније и ефикасније организују васпитно-образовни рад у тако сложеним условима..

* * *

Очигледно је, дакле, да велики број школа у селима Србије има неизвесну будућност и да се просветне власти морају без одлагања суочити са изазовом да конципирају рационалнију мрежу школа, водећи при томе рачуна и о економским параметрима, али пре тога и више од тога о негативним последицама које гашење школа у сеоским срединама собом носи. У сваком случају, тако значајна делатност, као што је основно образовање и васпитање и тако осетљив проблем какав је мрежа школа, не могу се посматрати искључиво кроз призму економских параметара. Ако то учинимо онда одустајемо од материјализације идеје о демократизацији образовања и једнаким шансама за све грађане, занемарујемо прокламовано право да се основно образовање стиче у месту живљења, релативизујемо идеју о равномерном развоју свих крајева, убрзавамо миграционе токове из иначе празних села у градове, доводимо у питање и успоравамо ревитализацију села и тако даље.

Уколико овај проблем будемо посматрали само са економског становишта, онда Србију очекује тотална ерозија школске мреже и затварање великог броја школа у сеоским срединама, а „одлазак учитеља и гашење школе је“, како истиче Н. Трнавац, „знак да је селу, као друштвеној заједници, крај близу и да га је друштвена заједница препустила на милост и немилост тихог умирања“ (1992: 54). Крајње је време да постанемо свесни да док има школе, без обзира на број ученика у њој, има и наде да ће село живети и да га је могуће обновити. Човек је пролазан, али ако се гаси школа и село, онда је то заиста тужно.

С друге стране, морају се предузети мере да се школа у сеоској средини трансформише у комплекснију друштвену институцију која ће значити, не само својим постојањем и традицијом, већ и атмосфером, богатством садржаја и квалитетом рада који ће обезбедити да и успех ученика у тим школама буде на знатно вишем нивоу.

Оно што може да охрабри је чињеница да се у светским размерама предузимају мере како би се зауставило демографско пражњење села и да те мере дају конкретне резултате. Долази време, како то најављује и Американац А. Тофлер (Toffler) у *Трећем таласу*, стагнације градова и пресељавања људи у већи број мањих насеља, превазилажења кризе у којој се се-

ло налази и време његове ревитализације. Реално је очекивати да ће се такви процеси, пре или касније, одвијати и у Србији. Сачувајмо зато школе у селима Србије и скренимо их са беспућа.

Литература

- Ивић 2009: Ивић, И., *Проблеми образовања сеоског становништва у Србији*, Материјал са скупа Образовање сеоског становништва у Србији, Београд.
- Каталог програма стручног усавршавања запослених у образовању за школску 2009/2010. годину* (2009): Београд, Завод за унапређивање образовања и васпитања, 386. стр.
- Процена становништва*, Републички завод за статистику Републике Србије, (2010), Београд, <http://webzhs.stat.gov.rs/axd/stanovnistvo/izbor.htm#>
- Рашевић, Пенев 2010: Рашевић, М. и Пенев, Г., *Демографски показатељи: картографски приказ по општинама*, Београд, Министарство рада и социјалне политике у сарадњи са Центром за демографска истраживања Института друштвених наука и Друштвом демографа Србије, 4. стр.
- Стручно упутство о формирању одељења у основним и средњим школама Србије* (2010), Београд, Министарство просвете.
- Тофлер 1983: Тофлер, А., *Трећи талас*, Београд, Југославија, 272. стр.
- Трнавац 1992: Трнавац, Н., *Мале сеоске школе*, Београд Институт за педагогију и андрагогију Филозофског факултета, Горњи Милановац, Дечје новине, -217 стр.
- Шпијуновић 1998: Шпијуновић, К., Методичко образовање учитеља за рад у комбинованом одељењу, у: *Методика научна и наставна дисциплина*, Јагодина, Учитељски факултет, стр. 215–222.
- Шпијуновић 1998: Шпијуновић, К., *Организација рада у комбинованом одељењу*, Београд, Институт за педагогију и андрагогију Филозофског факултета, 308. стр.
- Шпијуновић 2003: Шпијуновић, К., *Рационализација рада у комбинованом одељењу*, Ужице, Учитељски факултет, 189. стр.

Наташа М. Павловић*
Универзитет у Источном Сарајеву
Електротехнички факултет
Миленко Т. Пикула
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за математику и рачунарство

Оригинални научни рад

РЕГУЛАРИЗОВАНИ ТРАГОВИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА КАШЊЕЊЕМ

1. Увод

Регуларизоване суме (трагови) својствених вриједности линеарних диференцијалних оператора, односно њихово изучавање, развија се као самостална дисциплина у спектралној теорији линеарних диференцијалних оператора. Сваки резултат из те области је и прилог теорији сумабилности дивергентних редова. Та изучавања имају не само теоретски него и практични значај, нпр. код рачунања својствених вриједности са мањим модулума. Њихове вриједности добијене помоћу асимптотских формула су веома грубе, јер асимптотске формуле дају добру тачност само за довољно велике својствене вриједности. Изучавање диференцијалних оператора са отклоњеним аргументом, гдје је отклоњеност константна или промјенљива, од великог практичног значаја. Тако нпр. једначине са кашњењем, описују процес у аутоматском управљању, у теорији самоосцилирајућих система, ракетној техници, у низу разних економских проблема. Једначине са кашњењем јављају се увијек када у неком техничком или физикалном систему сила која дјелује на материјалну тачку зависи од положаја и брзине тачке не само у датом моменту него и у неком временском тренутку, или читавом ранијем временском интервалу.

2. Први и други регуларизовани траг оператора типа Штурма-Лиувиле

Посматраћемо линеарни диференцијални оператор генерисан диференцијалним изразом другог реда с константним кашњењем и граничним условима на крајевима сегмент $[0, \pi]$

* natasa_pavl@yahoo.com

$$-y''(x) + q(x)y(x-\tau) = \lambda y(x), \quad (1.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (1.3)$$

$$y(x-\tau) = y(0)\varphi(x-\tau); x \in [0, \tau]; \varphi(0) = 1. \quad (1.4)$$

$q(x)$ и $\varphi(x)$ унапријед задате функције ($q(x)$ и $\varphi(x)$ су довољно глатке функције).

Параметар λ је спектрални параметар, а H и h су реални бројеви (могу бити и бесконачни).

Кашњење τ претпостављамо константним и при томе $\tau \in (0, \pi]$.

Оператор (1.1)-(1.4) називамо оператором типа Штурма-Лиувилеа.

Користећи услов (1.3) формираћемо карактеристичну функцију оператора $F(z, \tau)$, тј.

$$F(z, \tau) = y'(\pi, z, \tau) + Hy(\pi, z, \tau).$$

Добили смо да је карактеристична функција

$$\begin{aligned} F(z, \tau) = & \left(-z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \frac{\alpha_3}{z^5}\right) \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_3}{z^4}\right) \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{2} + \\ & + \left(\frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^3} + \frac{\gamma_3}{z^5}\right) \frac{e^{iz(\pi-\tau)} - e^{-iz(\pi-\tau)}}{2i} + \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\delta_3}{z^4}\right) \frac{e^{iz(\pi-\tau)} + e^{-iz(\pi-\tau)}}{2} + \\ & + \left(\frac{\eta_1}{z} + \frac{\mu_2}{z^3} + \frac{\eta_3}{z^5}\right) \frac{e^{iz(\pi-2\tau)} - e^{-iz(\pi-2\tau)}}{2i} + \left(\frac{\xi_1}{z^2} + \frac{\xi_2}{z^4}\right) \frac{e^{iz(\pi-2\tau)} + e^{-iz(\pi-2\tau)}}{2} + O\left(\frac{1}{z^6}\right), \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} F(z, \tau) = & \frac{e^{i\pi z}}{2} \left(-\frac{z}{i} + \beta_1 + \frac{\alpha_1}{iz} + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\alpha_2}{iz^3} + \frac{\beta_3}{z^4} + \frac{\alpha_3}{iz^5}\right) + \frac{e^{-i\pi z}}{2} \left(\beta_1 + \frac{z}{i} - \frac{\alpha_1}{iz} + \frac{\beta_2}{z^2} - \frac{\alpha_2}{iz^3} + \frac{\beta_3}{z^4} - \frac{\alpha_3}{iz^5}\right) + \\ & + \frac{e^{iz(\pi-\tau)}}{2i} \left(\delta_1 + \frac{\gamma_1}{iz} + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\gamma_2}{iz^3} + \frac{\delta_3}{z^4} + \frac{\gamma_3}{iz^5}\right) + \frac{e^{-iz(\pi-\tau)}}{2} \left(\delta_1 - \frac{\gamma_1}{iz} + \frac{\delta_2}{z^2} - \frac{\gamma_2}{iz^3} + \frac{\delta_3}{z^4} - \frac{\gamma_3}{iz^5}\right) + \\ & + \frac{e^{iz(\pi-2\tau)}}{2} \left(\frac{\eta_1}{iz} + \frac{\xi_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{iz^3} + \frac{\xi_2}{z^4} + \frac{\eta_3}{iz^5}\right) + \frac{e^{-iz(\pi-2\tau)}}{2} \left(-\frac{\eta_1}{iz} + \frac{\xi_1}{z^2} - \frac{\mu_2}{iz^3} + \frac{\xi_2}{z^4} - \frac{\eta_3}{iz^5}\right) + O\left(\frac{1}{z^6}\right). \end{aligned}$$

Уопштено можемо писати

$$F(z, \tau) = \sum_{l=0}^{k_0} \left\{ e^{i(\pi-l\tau)z} \cdot P_l^{(1)}(z, \tau) + e^{-i(\pi-l\tau)z} \cdot P_l^{(2)}(z, \tau) \right\}.$$

Дефиниција 1.

За фамилију свих цијелих функција $f(z)$, које се, кад $z \rightarrow \infty$, могу представити у облику $f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_k(z)$, гдје су α_k комплексне константе, а функције $P_k(z)$ у области $|z| > R$

(R - реалан број), такве да је z -раван могуће покрити коначним бројем отворених сектора који садрже координатни почетак и да су $P_k(z)$ аналитичке функције $P_k(z) = z^{m_k} \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v^{(k)} z^{-v}$ ($\forall k$), кажемо да чини класу функција коју називамо класа- K .

Функција $F(z, \tau)$ при сваком фиксном $\tau \in (0, \pi]$ такође припада таквој класи.

За асимптотику нула функције $F(z, \tau)$ суштинску улогу игра конвексно затворење тачака $\pm i(\pi - l\tau)$, , које представља сегмент $[-i\pi, i\pi]$.

Ово конвексно затворење ћемо називати индикаторним дијаграмом функције $F(z, \tau)$.

Потребна нам је асимптотика карактеристичне функције оператора $F(z, \tau)$, када $z \rightarrow \infty$, $\tau \in [0, \pi]$.

Нуле $z_n(\tau)$ функције $F(z, \tau)$ имају следећу асимптотику:

$$z_n(\tau) = n + \frac{\bar{C}_{01} + \bar{C}_{11} \cos n\tau}{n} + \frac{\bar{C}_{12} \sin n\tau + \bar{C}_{22} \sin 2n\tau}{n^2} + \frac{\bar{C}_{03} + \bar{C}_{13} \cos n\tau + \bar{C}_{23} \cos 2n\tau + \bar{C}_{33} \cos 3n\tau}{n^3} + \frac{\bar{C}_{14} \sin n\tau + \bar{C}_{24} \sin 2n\tau + \bar{C}_{34} \sin 3n\tau + \bar{C}_{44} \sin 4n\tau}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Из тога и на основу $\lambda_n(\tau) = z_n^2(\tau)$ слиједи:

$$\lambda_n(\tau) \sim n^2 + C_{00} + C_{10} \cos n\tau + \frac{C_{11} \sin n\tau + C_{21} \sin 2n\tau}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Значи да ред чији је општи члан $\lambda_n(\tau) - n^2 - C_{00} - C_{10} \cos n\tau$ конвергира.

Први регуларизовани траг посматраног оператора је:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\tau) - n^2 - C_{00} - C_{10} \cos n\tau) = \omega_3 - \Phi_2.$$

Одредимо ω_3 и Φ_2 .

$$\begin{aligned}
 F(z, \tau) = & \frac{e^{i\pi z}}{2} \left(-\frac{z}{i} + \beta_1 + \frac{\alpha_1}{iz} + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\alpha_2}{iz^3} + \frac{\beta_3}{z^4} + \frac{\alpha_3}{iz^5} \right) + \frac{e^{-i\pi z}}{2} \left(\beta_1 + \frac{z}{i} - \frac{\alpha_1}{iz} + \frac{\beta_2}{z^2} - \frac{\alpha_2}{iz^3} + \frac{\beta_3}{z^4} - \frac{\alpha_3}{iz^5} \right) + \\
 & + \frac{e^{iz(\pi-\tau)}}{2i} \left(\delta_1 + \frac{\gamma_1}{iz} + \frac{\delta_2}{z^2} + \frac{\gamma_2}{iz^3} + \frac{\delta_3}{z^4} + \frac{\gamma_3}{iz^5} \right) + \frac{e^{-iz(\pi-\tau)}}{2} \left(\delta_1 - \frac{\gamma_1}{iz} + \frac{\delta_2}{z^2} - \frac{\gamma_2}{iz^3} + \frac{\delta_3}{z^4} - \frac{\gamma_3}{iz^5} \right) + \\
 & + \frac{e^{iz(\pi-2\tau)}}{2} \left(\frac{\eta_1}{iz} + \frac{\xi_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{iz^3} + \frac{\xi_2}{z^4} + \frac{\eta_3}{iz^5} \right) + \frac{e^{-iz(\pi-2\tau)}}{2} \left(-\frac{\eta_1}{iz} + \frac{\xi_1}{z^2} - \frac{\mu_2}{iz^3} + \frac{\xi_2}{z^4} - \frac{\eta_3}{iz^5} \right) + O\left(\frac{1}{z^6}\right) \\
 & (z \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Ставимо $z = -iy$, како $z \rightarrow +\infty$, онда $y \rightarrow +\infty$.

Уврштавањем у претходну формулу $z = -iy$ добијамо:

$$\begin{aligned}
 F(-iy, \tau) & \approx \frac{e^{\pi y}}{2} \left(\beta_1 + y + \frac{\alpha_1}{y} - \frac{\beta_2}{y^2} - \frac{\alpha_2}{y^3} + \frac{\beta_3}{y^4} + \frac{\alpha_3}{y^5} + O(e^{-\tau y}) \right), \\
 F'_y(-iy, \tau) & \approx \frac{e^{\pi y}}{2} y \left(\pi + \frac{1 + \pi\beta_1}{y} + \frac{\alpha_1\pi}{y^2} + \frac{-\beta_2\pi - \alpha_1}{y^3} + \frac{2\beta_2 - \alpha_2\pi}{y^4} + \frac{3\alpha_2 + \beta_3\pi}{y^5} + O(e^{-\tau y}) \right), \\
 \frac{F'_y(-iy, \tau)}{F(-iy, \tau)} & \approx \pi + \frac{1}{y} + \frac{-\beta_1}{y^2} + \frac{2\pi\alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1 + \beta_1^2}{y^3} + \frac{3\beta_2 + 3\alpha_1\beta_1 - \beta_1^3}{y^4} + \\
 & + \frac{3\pi\beta_1\beta_2 + 4\alpha_2 - 4\beta_1\beta_2 + 2\alpha_1^2 - 4\alpha_1\beta_1^2 + \beta_1^4 - 3\pi\beta_1^2\beta_2}{y^5}
 \end{aligned}$$

Тиме смо добили:

$$\omega_0 = \pi;$$

$$\omega_1 = 1;$$

$$\omega_2 = -(H + h);$$

$$\omega_3 = H^2 + h^2 - 2q_1(0);$$

$$\omega_4 = -3q'_1(0) + 3hq_1(0) - H^3 - h^3;$$

$$\omega_5 = q(\tau)q_1(\tau) + q'_1(0)(3H + 4h) - 4q''_1(0) + 2Hhq_1^2(0) - 4h^2q_1(0) + H^4 + h^4;$$

$$\Phi_2(-2, \tau) = \zeta(-2) + C_{00}\zeta(0) + C_{10}\zeta_{\cos}(0, \tau).$$

А како су:

$$\zeta(-2) = 0, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta_{\cos}(0, \tau) = -\frac{1}{2},$$

$$C_{00} = 2\frac{H+h}{\pi}, \quad C_{10} = 2\frac{J_1(\tau)}{2\pi},$$

Добијамо:

$$\Phi_2(-2, \tau) = -\frac{H+h}{\pi} - \frac{J_1(\tau)}{2\pi}.$$

Одавде је први регуларизовани траг

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\tau) - n^2 - C_{00} - C_{10} \cos n\tau) = H^2 + h^2 - 2q_1(0) + \frac{H+h}{\pi} + \frac{J_1(\tau)}{2\pi}.$$

На основу:

$$\begin{aligned} \lambda_n^2(\tau) &\sim n^4 + n^2(d_{01} + d_{11} \cos n\tau) + n(d_{12} \sin n\tau + d_{22} \sin 2n\tau) \\ &+ d_{03} + d_{13} \cos n\tau + d_{23} \cos 2n\tau + d_{33} \cos 3n\tau + \frac{d_{14} \sin n\tau + d_{24} \sin 2n\tau + d_{34} \sin 3n\tau + d_{44} \sin 4n\tau}{n} + \\ &+ O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

слиједи да је ред чији је општи члан:

$$\begin{aligned} \lambda_n^2(\tau) &- n^4 - d_{01}n^2 - d_{11}n^2 \cos n\tau - d_{11}n \sin n\tau - d_{22}n \sin 2n\tau - d_{03} - d_{13} \cos n\tau - \\ &- d_{23} \cos 2n\tau - d_{33} \cos 3n\tau \end{aligned}$$

конвергентан, па добијамо други регуларизовани траг на основу следеће формуле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2(\tau) - n^4 - d_{01}n^2 - d_{11}n^2 \cos n\tau - d_{11}n \sin n\tau - d_{22}n \sin 2n\tau - d_{03} - d_{13} \cos n\tau - d_{23} \cos 2n\tau - d_{33} \cos 3n\tau)$$

$$= \omega_5 - \Phi_4,$$

гдје је:

$$\Phi_4(-4, \tau) = \zeta(-4) + d_{01}\zeta(-2) + d_{11}\zeta_{\cos}(-2, \tau) + d_{12}\zeta_{\sin}(-1, \tau) + d_{22}\zeta_{\sin}(-1, 2\tau) + d_{03}\zeta(0) +$$

$$+ d_{13}\zeta_{\cos}(0, \tau) + d_{23}\zeta_{\cos}(0, 2\tau) + d_{33}\zeta_{\cos}(0, 3\tau),$$

$$\zeta(-4) = \zeta(-2) = 0, \quad \zeta_{\cos}(-2, \tau) = \frac{1}{2(1 - \cos \tau)},$$

$$\zeta_{\sin}(-1, \tau) = \frac{-\sin \tau}{2(1 - \cos \tau)}, \quad \zeta_{\sin}(-1, 2\tau) = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \tau,$$

$$\zeta_{\cos}(0, \tau) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta_{\cos}(0, 2\tau) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta_{\cos}(0, 3\tau) = -\frac{1}{2},$$

$$d_{11} = 2C_{10} = \frac{2J_1(\tau)}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= 2C_{11} = \frac{2(H+h)(\pi-\tau)J_1(\tau)}{\pi^2} + \frac{4q_1(\tau)-q(\pi)-q(\tau)-2(H+h)J_1(\tau)}{\pi}, \\
 d_{22} &= 2C_{21} = \frac{(\pi-\tau)J_1^2(\tau)}{2\pi^2} - \frac{J_2(\tau)}{\pi}, \\
 d_{03} &= 2C_{02} + C_{00}^2 + \frac{C_{10}^2}{2} = \frac{2(H+h)^2}{\pi^2} + \frac{J_1^2(\tau)}{4\pi^2} + \frac{4(H+h)(Hh+q_1(0))}{\pi} - \frac{4(H+h)^3}{3\pi} - \\
 &\quad - \frac{4(q_1'(0)+Hq_1(0))}{\pi} - \frac{(H+h)J_1^2(\tau)(\pi-\tau)^2}{2\pi^2} + \frac{(H+h)J_1^2(\tau)(\pi-\tau)^2}{2\pi^3}, \\
 d_{13} &= 2C_{12} + 2C_{00}C_{10} = \frac{2J_1(\tau)q_1(0)-(H+h)^2J_1(\tau)}{\pi} + \frac{J_1^3(\tau)-J_1^3(\tau)(\pi-\tau)^2}{16\pi} - \\
 &\quad - \frac{(H+h)^2J_1(\tau)(\pi-\tau)^2}{\pi^3} + \frac{8q_1'(\tau)+q'(\pi)-q'(\tau)-2h(q(\pi)-q(\tau))+8Hq(\tau)-4J_5(\tau)}{2\pi} + \\
 &\quad + \frac{2(H+h)J_1(\tau)-(H+h)(\pi-\tau)(4q_1(\tau)-q(\pi)-q(\tau))+2(H+h)^2J_1(\tau)(\pi-\tau)}{\pi^2} + \\
 &\quad + \frac{J_1(\tau)J_2(\tau)(2\pi-3\tau)}{4\pi^2}, \\
 d_{23} &= 2C_{22} + \frac{C_{10}^2}{2} = \frac{4J_5(\tau)-q(\pi)J_6(\tau)-J_3(\tau)-q(\tau)J_4(\tau)-2J_2(\tau)(h+H)}{2\pi} + \\
 &\quad + \frac{J_1(\tau)(\pi-\tau)(q(\pi)+q(\tau)-4q_1(\tau))+(H+h)J_1^2(\tau)(\pi-\tau)}{2\pi^2} + \frac{J_1^2(\tau)+4(H+h)J_2(\tau)(\pi-2\tau)}{4\pi^2} - \\
 &\quad - \frac{(h+H)(\pi-\tau)^2J_1^2(\tau)}{2\pi^3}, \\
 d_{33} &= 2C_{32} + \frac{C_{10}^2}{2} = \frac{J_1^3(\tau)}{48} - \frac{3J_1^3(\tau)(\pi-\tau)^2}{16\pi^3} + \frac{J_1(\tau)J_2(\tau)(2\pi-3\tau)}{4\pi^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_4(-4, \tau) = & \frac{J_1(\tau)}{\pi(1-\cos \tau)} - \frac{\sin \tau}{1-\cos \tau} \left[\frac{2J_1(\tau)(H+h)(\pi-\tau)}{\pi^2} + \frac{4q_1(\tau)-q(\pi)-q(\tau)-2J_1(\tau)(H+h)}{\pi} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \tau \left[\frac{J_1^2(\tau)(\pi-\tau)}{2\pi^2} - \frac{J_2(\tau)}{\pi} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{4(H+h)^2 + J_1^2(\tau) - (H+h)J_1^2(\tau)(\pi-\tau)^2 + 4(H+h)J_1(\tau)}{2\pi^2} + \right. \\
 & + \frac{4(H+h)(Hh-H^2-h^2) + 12(hq_1(0)-q_1'(0)) + 6J_1(\tau)q_1(0) - 3(H+h)^2J_1(\tau)}{3\pi} + \\
 & + \frac{2(H+h)^2J_1(\tau)(\pi-\tau) - (H+h)(\pi-\tau)(4q_1(\tau)-q(\pi)-q(\tau))}{\pi^2} + \frac{J_1^3(\tau)}{12\pi} - \\
 & - \frac{J_1^3(\tau)(\pi-\tau)^2}{16\pi} - \frac{16(H+h)^2J_1(\tau)(\pi-\tau)^2 + 3J_1^3(\tau)(\pi-\tau)^2}{16\pi^3} - \frac{J_2(\tau)(H+h)}{\pi} + \\
 & + \frac{J_1(\tau)J_2(\tau)(2\pi-3\tau) + J_1(\tau)(\pi-\tau)(q(\pi)+q(\tau)-4q_1(\tau))}{2\pi^2} + \\
 & + \frac{8q_1'(\tau)+q'(\pi)-q'(\tau)-2h(q(\pi)-q(\tau))+8Hq(\tau)-q(\pi)J_6(\tau)-J_3(\tau)-q(\tau)J_4(\tau)}{2\pi} - \\
 & - \frac{(H+h)J_1^2(\tau)(\pi-\tau)^2 + 2(H+h)J_2(\tau)(\pi-2\tau)}{2\pi^2}.
 \end{aligned}$$

Други регуларизовани траг је дат са

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2(\tau) - n^4 - d_{01}n^2 - d_{11}n^2 \cos n\tau - d_{11}n \sin n\tau - d_{22}n \sin 2n\tau - \\
 & - d_{03} - d_{13} \cos n\tau - d_{23} \cos 2n\tau - d_{33} \cos 3n\tau) = q(\tau)q_1(\tau) + q_1'(0)(3H + 4h) - 4q_1''(0) + \\
 & + 2Hhq_1^2(0) - 4h^2q_1(0) + H^4 + h^4 - \frac{J_1(\tau)}{\pi(1 - \cos \tau)} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \tau \left[\frac{J_1^2(\tau)(\pi - \tau)}{2\pi^2} - \frac{J_2(\tau)}{\pi} \right] + \\
 & + \frac{\sin \tau}{1 - \cos \tau} \left[\frac{4q_1(\tau) - q(\pi) - q(\tau) - 2J_1(\tau)(H + h)}{\pi} + \frac{2J_1(\tau)(H + h)(\pi - \tau)}{\pi^2} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{192(hq_1(0) - q_1'(0) + q_1^2(\tau) + Hq(\tau)) + 96q_1(0)J_1(\tau) + 64(H + h)(Hh - h^2 - H^2)}{48\pi} + \right. \\
 & + \frac{4J_1^3(\tau) - 48(J_2(\tau)(H + h) + h(q(\pi) - q(\tau))) + 24(q'(\pi) - q'(\tau) - q(\pi)J_6(\tau))}{48\pi} - \\
 & - \frac{24(J_3(\tau) + q(\tau)J_4(\tau)) + 3J_1^3(\tau)(\pi - \tau)^2}{48\pi} + \\
 & + \frac{4((H + h)^2 + (H + h)J_1(\tau) + (H + h)^2J_1(\tau)(\pi - \tau)) + 2(H + h)J_2(\tau)(\pi - 2\tau)}{2\pi^2} + \\
 & + \frac{J_1^2(\tau) - 2(H + h)(\pi - \tau)(4q_1(\tau) - q(\pi) - q(\tau)) - (H + h)J_1^2(\tau)(\pi - \tau)^2}{2\pi^2} + \\
 & + \frac{J_1(\tau)J_2(\tau)(2\pi - 3\tau) + J_1(\tau)(\pi - \tau)(q(\pi) + q(\tau) - 4q_1(\tau)) + (H + h)J_1^2(\tau)(\pi - \tau)}{2\pi^2} - \\
 & \left. - \frac{16(H + h)^2J_1(\tau)(\pi - \tau)^2 + 3J_1^3(\tau)(\pi - \tau)^2}{16\pi^3} \right].
 \end{aligned}$$

Литература

- Садовничј 1979: Садовничий В. А. *Теория операторов*, Москва: Издательство Московского университета.
- Садовничј 1973: Садовничий В. А. *Регуляризование суммы полуцелых степеней оператора Штурма-Лувилля*, Мат. заметки 14 №2 , 279–290.
- Пикула 1982: М. Пикула, *О регуляризованных следах дифференциального оператора типа Штурма-Лувилля с запаздывающим аргументом*, Дифф. Уравнения.
- Павловић 2008: Н. Павловић, *Асимптотика својствених вриједности линеарне диференцијалне једначине са каињењем*, Зборник радова Филозофског факултета Пале, књига 3, том 2, 591–604.

Сандра Б. Косић-Јерemiћ*
Универзитет у Бањој Луци
Архитектонско-грађевински факултет
Миленко Т. Пикула
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за математику и рачунарство

Оригинални научни рад

АНАЛИЗА СТАЊА У УЧЕЊУ МАТЕМАТИКЕ НА ТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА КРОЗ ПРИЗМУ ЕКСТРЕМАЛНИХ ЗАДАТАКА

„Математика и њен стил мишљења морају постати саставни дио опште културе савременог човјека, тј. човјека којег образују данашње школе, без обзира да ли ће он вршити посао који користи математику или не“.

КОНФЕРЕНЦИЈА УНЕСКО 1956.

„Математика је не само незамјенљиво средство васпитања и мишљења него основа цјелокупног научног, техничког и економског развоја“.

СВЈЕТСКИ КОНГРЕС МАТЕМАТИЧАРА 1966.

Данас се све више истиче значај математике у техници, економији, природним и друштвеним наукама. Управо зато један од важнијих циљева и задатака методике наставе математике треба да буде оспособљавање ученика и студената за примјену стечених математичких знања у другим наукама.

Данашња настава математике која се на нашим факултетима изводи, углавном припада фронталној настави, при чему су садржаји математике углавном класични (традиционални) и не разликују се пуно од факултета до факултета у БиХ, бар за прву годину и за техничке факултете.

Наставник фронтално изводи наставу, која се, осим појединих изузетака, своди на преписивање наставних садржаја са табле. Питање је колико је студена прве године способно да успјешно прати овакву наставу.

Савремена методика наставе математике пружа разне могућности за рјешавање проблема увођења ученика и студената у самосталан и истраживачки рад, развијања њихових способности за рјешавање проблема, те развоја њиховог стваралачког мишљења и стваралачких способности.

Тежиште се поставља на развијању умијећа самосталног и стваралачког проучавања математике од стране студента, те стварању предуслова за успјешну примјену стечених математичких знања и вјештина. Самосталност студената при учењу и проучавању математике остварује се у великој мјери примјереним избором и кориштењем математички задатака. На тај

* jeremic@bl.elta-kabel.com

начин задаци постају важно средство при формирању основних математичких знања, умијећа и навика код студената и доприносе развоју њихових математичких способности и стваралачког мишљења. Можемо рећи да рјешавање сваког математичког проблема има нешто откривачко и стваралачко.

У овом раду, кроз једно истраживање које је проведено у току школске 2009/2010. године на четири универзитета у БиХ, на студентима друге године најактуелнијих техничких факултета, дата је оквирна анализа стања у настави математике на техничким факултетима. Извршено је тестирање знања одговарајућег репрезентативног узорка студената друге године електротехничког, машинског и грађевинског факултета, те кроз добијене резултате покушали смо да дамо одговоре на нека питања и проблеме који се појављују у савременој настави математике, као што су: усвојеност елементарних математичких појмова који се уче на првој години факултета, успјешност у математичком моделовању, трајност и примјена стечених знања у појединим стручним предметима, висина корелације између математике и физике, као и математике и стручних предмета.

С обзиром да су наша истраживања била базирана на рјешавање проблема са екстремумима тј. екстремалних задатака, на основу теста који се састојао од 10 задатака (6 задатака из математике, 2 из физике и 2 из стручних предмета) добили смо одговоре на сљедећа питања:

1) Да ли студенти знају објаснити појам извода и његово геометријско значење, те на теоретски начин објаснити како се одређују локални екстремуми функција једне промјенљиве – 1 задатак;

2) Колико су студенти успјешни у рјешавању једноставнијих екстремалних задатака (примјена на одређивање локалних екстремума функција једне промјенљиве, задаци са тангентама и нормалама кривих у равни) – 3 задатка;

3) Колико су студенти успјешни у рјешавању екстремалних проблема у геометрији, гдје се проблеми своде на рјешавање екстремалних задатака у којима треба одредити максимум или минимум функција са једном или двије непознате – 2 задатка;

4) Колико су студенти успјешни у рјешавању екстремалних проблема који се појављују у физици – 2 задатка;

5) Колико су студенти успјешни у примјени стечених знања из диференцијалног рачуна у рјешавању екстремалних проблема који се појављују у неким стручним предметима – 2 задатка;

6) Да ли успјех у рјешавању екстремалних проблема под 1), 2), 3), 4) и 5) зависи од профила студија?

Задаци су бодовани на следећи начин:

2 бода за потпуно тачан задатак, 1 бод за половично ријешен задатак и 0 бодова за неријешен или нетачно ријешен задатак. Тестирано је укупно 236 студената.

Анализа резултата:

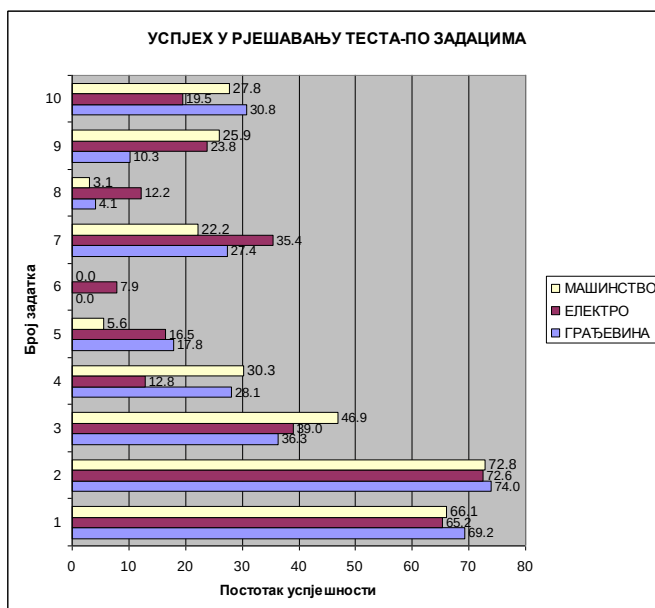
Статистичка обрада резултата урађена је примјеном програма SPSS (Statistical Package for Social Sciences) гдје су коришћени следећи тестови: једнофакторска ANOVA различитих група, χ^2 квадрат тест независности, Kruskal-Wallisov тест, Tukey-ev test.

РЕЗУЛТАТИ ТЕСТИРАЊА

	Ознака	Грађевина	Група	
			Електро	Машинство
Број испитаника	N	73	82	81
Аритметичка средина	$\bar{X}$	5,96	6,1	6
Постотак успјешности	p	29,79	30,49	30
Стандардна девијација	σ	3,69	3,70	3,24

Табл.

Уопштено гледано, студенти свих профила студија су постигли приближно исти коначан успјех у рјешавању теста. Такође, нема статистички значајне разлике између група у укупном успјеху (таб. 1).



Графикон 1

1) Иако је првих 6 задатака из математике, ипак смо и њих подијелили у двије групе:

1) прва група – задаци од 1 до 4 (сматрају се лакшим) – нижи ниво *MMNN*;

2) друга група – задаци 5 и 6 (проблеми у геометрији) – виши ниво *MMVN*.

Први задатак на тесту је био, у ствари, теоријско питање:

1. Одговори на питања:

а) Које је геометријско тумачење (значење) првог извода функције једне промјенљиве?

б) Како се одређују екстремне вриједности функција једне промјенљиве помоћу извода?

Од следећа три задатка, задаци 2 и 3 се сматрају једноставнијим екстремалним задацима, и заједно са задатком 4 чине обавезно градиво прве године свих техничких факултета:

2. Одредити локалне екстремуме функције:

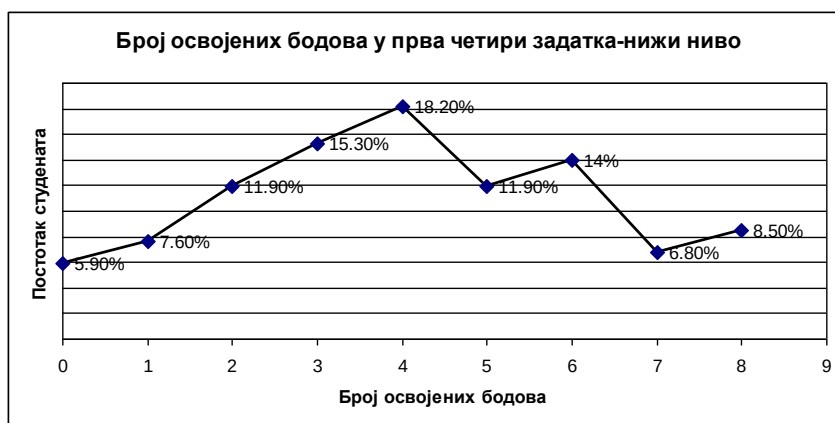
$$y = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x + 4$$

3. Одредити реалне бројеве a и b тако да функција

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + b} \text{ има максимум у тачки } T\left(\frac{3}{2}, -4\right).$$

4. Одредити угао под којим се сијеку криве: $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

Расподјела по броју освојених бодова у прва четири задатка:



Графикон 2

Test Statistics ^{a,b}		
	MMNN	MMVN
Chi-Square	2.000	11.405
df	2	2
Asymp. Sig.	.368	.003

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIJ

Таб. 2

Закључак 1: Из графикона 2 се види да је највећи број студената, њих 18,20% или 43 студента освојило 4 бода у прва четири задатка, док је нула бодова освојило свега 5,90% или 14 студената. Сва четири задатка је потпуно тачно ријешило 8,50% или укупно 20 студената.

Не постоји статистички значајна разлика између група, тј. студената сва три студијска профила на задацима који су на нижем нивоу, лакши задаци – прва 4 задатка (Kruskal-Wallisov тест – таб. 2). Иако је Kruskal-Wallisov тест показао да постоји статистички значајна разлика између група у успјеху рјешавања задатка 4 (таб.3). Студенти електротехнике су тај задатак најслабије урадили (графикон1).

Test Statistics^{a,b}

	ZAD4
Chi-Square	8.083
df	2
Asymp. Sig.	.018

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIJ

Таб. 3

2) Сљедећа два задатка су геометријски проблеми:

5. У кружницу полупречника $r=4$ cm треба уписати правоугаоник максималне површине. Одредити димензије траженог правоугаоника и максималну површину:

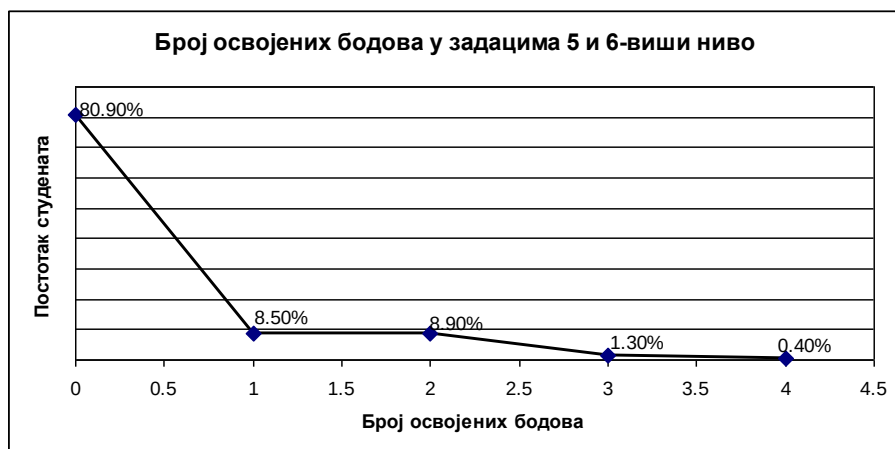
- без кориштења извода или
- користећи изводе

6. Од свих правоуглих паралелопипеда дате запремине $V=8$, одредити димензије оног паралелопипеда који има најмању површину. - (Упутство: формирај функцију од двије промјенљиве, па нађи екстремум те функције.)

У 5. задатку је требало изразити површину као функцију једне - промјенљиве, те наћи максимум те функције ($P = x \cdot \sqrt{64 - x^2}$, гдје је x основица правоугаоника).

У 6. задатку је дато и упутство да се формира функција од двије промјенљиве, те је након тога требало наћи екстремум тако добијене функције.

Расподјела броја освојених бодова у задацима 5 и 6:



Графикон 3

Закључак 2: Постоји статистички значајна разлика између група тј. студијских програма у постигнутим резултатима на задацима који су на вишем нивоу, геометријски задаци (таб.2) и то: између студената електротехнике и машинства. Студенти електротехнике су били успјешнији у рјешавању ових задатака. Kruskal-Wallisov тест, као и χ^2 квадрат тест, на нивоу значајности 0.05, су показали да су успјех рјешавања и профил студија зависне величине тј. да успјех у рјешавању задатака 5 и 6 зависи од профила студија.

Иако се из графикона 3 види да су студенти свих профила студија били неуспјешни тј. врло слаби у рјешавању геометријских задатака (80.9% студената је освојило 0 бодова у оба задатка). 6. задатак није ријешио ниједан студент грађевине и машинства, а само један студент електротехнике је ријешио оба задатка, па можемо закључити да се студенти нису сусрели са оваквим задацима у наставном процесу.

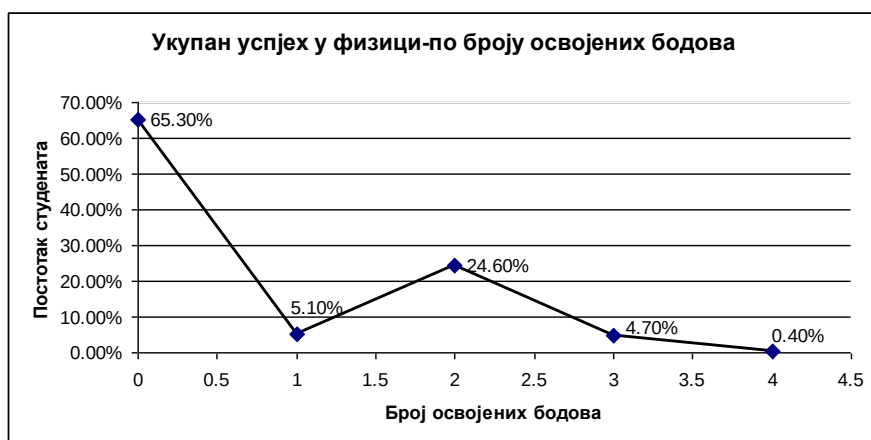
3) Задаци из физике:

7. Са висине од 10 м избачено је вертикално увис тијело са почетном брзином од $20 \frac{m}{s}$. На којој ће се висини налазити послје t секунди?

Послије колико секунди тијело достиже максималну висину и колика је та висина? (Висина тј. координата y у тренутку t за коси хитац:

$$y = v_0 \cdot t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2, \text{ гравитационо убрзање } g=9,81 - \text{ константа}).$$

8. Вертикално изнад тачке А, која лежи у хоризонталној равни стола, налази се сијалица S. На коликој висини $x = \overline{SA}$ изнад равни стола треба поставити сијалицу, да би освијетљеност у тачки В стола била највећа, ако је $\overline{AB} = 1,5 \text{ m}$? (освијетљеност E у тачки В: $E = \frac{I \cdot \cos \varphi}{R^2}$).



Графикон 4

Test Statistics^{a,b}

	FIZ1	FIZ2
Chi-Square	4.115	10.676
df	2	2
Asy mp. Sig.	.128	.005

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIЈ

Таб.4

Multiple Comparisons

Tukey HSD

Dependent Variable	(I) STUDIJ	(J) STUDIJ	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.
FIZ2	Gradjevina	Elektroteh.	-.16171*	.06440	.034
		Masinstvo	.02046	.06459	.946
	Elektroteh.	Gradjevina	.16171*	.06440	.034
		Masinstvo	.18217*	.06270	.011
	Masinstvo	Gradjevina	-.02046	.06459	.946
		Elektroteh.	-.18217*	.06270	.011

*. The mean difference is significant at the .05 level.

Таб.5

Закључак 3: Kruskal-Wallisov (таб. 4) и Tukey-ev тест(таб. 5) су показали да постоји статистички значајна разлика између група у рјешавању другог задатка из физике тј. задатка 8 и то: између студената електротехнике и машинства, као и између студената електротехнике и грађевине. Студенти електротехнике су били успјешнији у рјешавању задатка 8.

Из графикана 4 које показују укупну фреквенцију броја освојених бодова из физике закључујемо да су и из физике сви студенти постигли доста лоше резултате. Чак 65,30% студената је освојило 0 бодова, а само један студент је тачно ријешило оба задатка из физике, и то студент електротехнике.

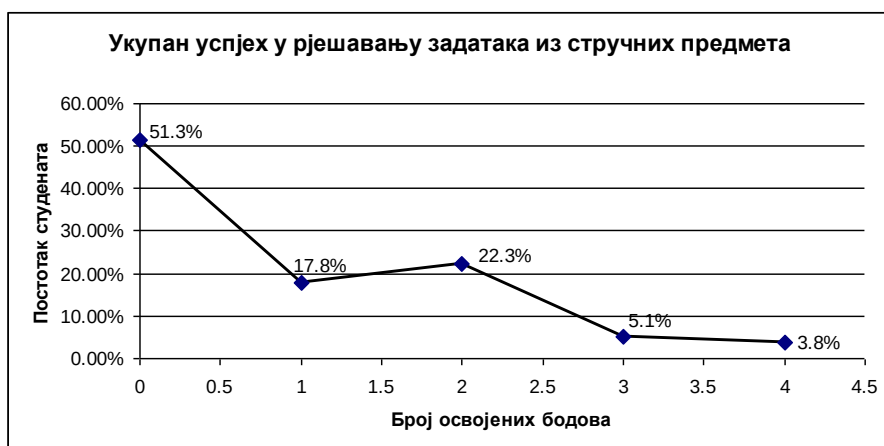
Први задатак из физике, задатак 7 је потпуно тачно ријешило 64 студента тј. 27,1%, а други задатак само 6 студената тј само 2,5% од укупног броја испитаника.

4) Задаци који су били везани за стручне предмете су за свако усмјерење били раличити. Нећемо их овдје све наводити, већ ћемо само дати примјер за студенте машинства:

9. Кретање материјалне тачке одређено је основним кинематичким једначинама $x = 8t - 4t^2$ и $y = 6t - 3t^2$, у којима је x и y дато у метрима, а t у секундама. Одредити једначину путање по којој се креће материјална тачка, њену резултујућу брзину v и резултујуће убрзање a . Колика је почетна брзина v_0 материјалне тачке?

10. На простој греди распона l дефинисана је функција момента савијања $M_x(z) = \frac{p_0 \cdot l}{6} \cdot z - \frac{p_0}{2l} \cdot \frac{z^3}{3}$. Одредити максималну вриједност момента. ($p_0, l - const$).

За студенте грађевине 10. задатак је био потпуно исти. Дати задаци припадају области техничке механике.



Графикон 5

Test Statistics^{a,b}

	Зад 9	Зад 10
Chi-Square	6.783	4.119
df	2	2
Asymp. Sig.	.034	.127

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIЈ

Таб.6

Закључак 4: Можемо рећи да су студенти били нешто бољи у рјешавању задатака везаних за стручне предмете, него у задацима из физике. Из графикона 5 се види да је 51,30% или 121 студент освојио 0 бодова из оба задатка, 2 бода је освојило 22% или 52 студента, а сва 4 бода је освојило 3,8% или 9 студената.

Резултат Kruskal-Wallis теста (на нивоу значајности 0.05) је показао да успјех у рјешавању задатка 9 (зависи од профила студија (таб. 6)). С обзиром да су задаци били различити, овај резултат можемо узети само као оријентациони показатељ. Иако, посматрајући цијели узорак, можемо рећи да су студенти неуспјешни у примјени стечених знања из математике у стручним предметима (само 28 студента тј. 11,9% је потпуно тачно ријешило овај задатак).

У рјешавању задатка 10 студенти су били нешто успјешнији, иако је само 21,6% студената потпуно тачно ријешило овај задатак. Из табеле 6 -

је видљиво да успјех у рјешавању задатка 10 не зависи од профила студија. У задатку 10, за све студенте, је требало само препознати да је функција већ задата, те да примјеном извода треба наћи екстремум те функције.

Корелација

		MMUK	FIUK	STRUK
MMUK	Pearson Correlation	1	.251 **	.331 **
	Sig. (2-tailed)		.000	.000
	N	236	236	236
FIUK	Pearson Correlation	.251 **	1	.412 **
	Sig. (2-tailed)	.000		.000
	N	236	236	236
STRUK	Pearson Correlation	.331 **	.412 **	1
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	
	N	236	236	236

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Таб.7

(Легенда: MMUK-задачи из математике, FIUK-задачи из физике, STRUK-задачи из стручних предмета)

Из посљедње табеле, на основу Pearsonov-ог коефицијента корелације, видимо да постоји позитивна корелација између успјеха у математици и успјеха у физици и стручним предметима. Студенти који су добри у математици, бољи су и у физици и стручним предметима. Такође постоји позитивна корелација између физике и стручних предмета.

Дакле, на основу свега наведеног, закључујемо сљедеће:

Студенти свих профила студија су постигли натполовичан успјех само у прва два задатка, који су били и најлакши, елементарни. У свим осталим задацима студенти нису постигли задовољавајући успјех. Такође можемо рећи да трансфер знања из једне области у другу, тачније из математике у физику и стручне предмете није на задовољавајућем нивоу, као ни вјештина математичког моделовања различитих проблема који се појављују у другим наукама.

Можемо генерално закључити да постоје озбиљне тешкоће у учењу математике на техничким факултетима, као и у трајности и примјени наученог.

Закључци и смјернице за побољшање наставног процеса у циљу боље усвојености и примјенљивости стечених математичких знања

- Потребно је остварити бољу сарадњу наставника математике са наставницима стручних предмета на техничким, па и другим факултетима. Такође поменуте наставнике је потребно и неопходно укључити у израду наставних планова и програма математике на факултетима.
- Наставу треба организовати тако да се и на факултетима примјењује комбинација више наставних метода: фронтална настава, проблемска настава, интерактивна настава – обрада неких наставних јединица и помоћу рачунара или рјешавање неких задатака помоћу рачунара нпр. цртање графика функција.
- У оквиру вјежби давати студентима (или радити са њима) више проблемских задатака, као што су задаци са екстремумима, показати примјену математичког апарата у геометрији, у другим областима или стручним предметима – тиме се постиже и већа заинтересованост студената за математику, чиме се рјешава проблем мотивације.
- Научити студенте да уче.
- Поједине задатке ријешити на више начина. Чувени амерички математичар и методичар (мађарског поријекла) George Polya је још прије пола вијека рекао: *Корисније је један задатак ријешити самостално него стотину задатака репродуковати. Боље је један математички задатак ријешити на више начина различитим методама, него мноштво задатака ријешити истом методом.*

Најбоља мотивација ученицима и студентима је управо успјех при самосталном рјешавању проблемских задатака, а екстремални задаци управо припадају групи проблемских задатака.

- Обим теоријских предавања свести на разумну мјеру, избјегавати гломазне математичке доказе, који нису неопходни.
- Повећати креативност наставника, јер креативан и маштовит наставник ствара креативне младе људе. Самим тим, повећавањем заинтересованости студената повећава се и заинтересованост и воља наставника за даљим радом, напредовањем, истраживањем.
- Ускладити планове и програме математике на нивоу БиХ – по факултетима, тј. усмјерењима.

За правилно разумијевање математичких садржаја, потребно је прво савладати теоријске поставке, па тек онда таква знања примјенити у задацима. Међутим, већина студената иде обрнутим редослиједом, прво уче задатке, па тек онда теорију и углавном сматрају да им теорија није ни потребна (бар не у толикој мјери), што је потпуно погрешно схватање. Ту не-

миновно долази и до учења појединих задатака напамет или учења алгоритама рјешавања напамет, као и учења мноштва формула, управо због неразумијевања и несавладавања теоријских поставки.

Проблеми који се могу јавити приликом примјене свега наведеног су сљедећи:

временско ограничење, предвиђени број часова у семестру за планиране математичке програме (који су ионако превише захтјевни и обимни за савладавање у једном семестру), недостатак простора, опреме, превелик број студената на једног наставника или асистента, предзнање студената, тј. знање за које се претпоставља да студенти доносе из средње школе. У пракси се показало да студенти имају доста „рупа“ у раније стеченом знању, што додатно отежава редовну наставу и савладавање математике на факултету. Због тога би требало приступити и реформи и побољшању наставе у средњим школама, јер је и то један од основних предуслова за остваривање свега наведеног.

Препорука је да се на све техничке факултете уведе сљедећа пракса:

- 1) припрема студената за упис на факултет (припремна настава),
- 2) увођење курса елементарне математике у први семестар студија.

Резиме

Тротомни тематски зборник „Наука и политика“ настао је као резултат излагања поднесених на истоименом научном скупу одржаном 22-23. маја 2010. године на Филозофском факултету Универзитета у Источном Сарајеву. Први пут зборник је тротоман, због великог броја приспјелих и позитивно рецензираних радова. Овај том посвећен је темама из природно-математичких наука.

6 радова из области географије и сродних научних дисциплина доказују улоге политике у проучавању феномена везаних за економски развој и стабилност једног географског и политичког простора. Већина истраживача на овом пољу фокусира се на географски простор Републике Српске, односно Босне и Херцеговине, чија је специфичност умногоме представљала погодно тло за слојевито истраживање.

Радови, а у књизи их је објављено 17, из области математике баве се различитим областима које изучава ова наука. Радови из анализе, алгебре, геометрије, дискретне математике, примјењене математике, као и из методике наставе математике потврђују ширину интересовања истраживача који су презентовали радове на овом скупу.

Радови из области информатичких наука показују да се ова научна област све више инкорпорира у структуру овог научног скупа и да заузима своје мјесто у хијерархији научних дисциплина које се појављују у овом Зборнику.

Summary

The three volume collection of papers “Science and Politics” resulted from the papers exposed at the conference proceedings at the Faculty of Philosophy of the University of East Sarajevo held on the 21st-23rd may 2010. For the first time the collection of papers is published in three volumes because of the big number of accepted, reviewed papers. This volume is dedicated to the topics of natural and mathematical sciences.

The 6 papers dealing with geography and similar sciences represent a proof of the role of politics in the study of phenomena related to the economical development and stability of certain geographical and political area. The majority of researchers focused on the geographical area of the Republic of Srpska, that is Bosnia and Herzegovina, whose uniqueness represent a favourable researching material.

The 17 papers dealing with mathematics, published in the collection, analyze its numerous aspects. The papers on mathematical analysis, algebra, geometry, discrete mathematics, applied mathematics, and methodology of teaching mathematics, confirmed the huge interest of the researchers who contributed them.

The papers dealing with informatics showed that this science was incorporated in the structure of the conference proceedings and that it had its place in the scientific hierarchy of the collection.

Садржај

<i>Секција за географију</i>	5
Драгица М. Живковић, Јасмина М. Јовановић ИНФОРМАТИЧКО-ТЕХНОЛОШКА БАЗА – УСЛОВ ИНТЕГРАЦИЈА И ЕКОНОМСКОГ РАЗВОЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ	7
Стево Р. Пашалић и др. УТИЦАЈ ТУРИЗМА НА ДЕМОГРАФСКИ РАЗВИТАК РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ	13
Ђуро Марић, Жељко Лекић ГЕОПОЛИТИЧКИ И ГЕОЕКОНОМСКИ И ЗНАЧАЈ КОРИДОРА 5С	23
Јелена М. Пецељ, Мирољуб А. Милинчић ПРАВЦИ РАЗВОЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ У СКЛАДУ СА ЕВРОПСКОМ ЕНЕРГЕТСКОМ ПОЛИТИКОМ	39
Бранислав Ј. Драшковић УПРАВЉАЊЕ ВОДНИМ РЕСУРСИМА КАО КОМПОНЕНТА СТРАТЕГИЈЕ РАЗВОЈА ГРАДА ИСТОЧНОГ САРАЈЕВА	47
Милка А. Грмуша ВАСПИТНИ ЗАДАЦИ НАСТАВЕ ГЕОГРАФИЈЕ У КОНТЕКСТУ ДРУШТВЕНО-ПОЛИТИЧКИХ ПРОМЈЕНА У РС/БИХ	61
<i>Секција за математику и рачунарство</i>	69
Видан Говедарица, Валентина Коњокрад НИЗ ЦИКЛИЧНИХ ПОЛИНОМА И ГЕОМЕТРИЈСКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ	71
Алија Р. Мандак ЈЕДНА КОНСТРУКЦИЈА ПРОЈЕКТИВНЕ РАВНИ РЕДА ШЕСНАЕСТ	77
Милан В. Живановић ЈЕДНА КЛАСА ПОЛИНОМА БЕЗ ЦЕЛОБРОЈНИХ НУЛА	83
Katija Lonza DEFINIRANJE PRODUKTA MALJCEVA NA PROFINITNIM STRUKTURAMA POMOĆU PSEUDOIDENTITETA	89
Dragan Z. Đurčić et al A NOTE ON THE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE AND THE GENERALIZED INVERSE	101

Dušan S. Jokanović BAER PROPERTY AND NAGATA CONSTRUCTIONS OF ARMENDARIZ RINGS	105
Мирјана С. Вуковић ЧАСОВНИК СРПСКОГ МОНАХА ЛАЗАРА ПРЕТЕЧА КРЕМЉОВСКИХ КУРЕНТА	113
Anton V. Vrdoljak, Milorad K. Banjanin IMPLEMENTASIJA MULTIAGENTNIH SISTEMA U E-UČENJU MATEMATIKE	121
Кармелита Х. Пјанић ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ И ЊЕГОВО РАЗУМИЈЕВАЊЕ – СЛУЧАЈ СТУДЕНАТА РАЗРЕДНЕ НАСТАВЕ	131
Нела Т. Малиновић-Јовановић ПРИМЕНА ТАКСОНОМСКОГ МОДЕЛА НА ОДРЕЂИВАЊЕ РАЗЛИКЕ У КВАЛИТЕТУ ЗНАЊА УЧЕНИКА РАЗЛИЧИТИХ ОБРАЗОВНИХ УЗРАСТА	141
Радослав В. Милошевић „СТАРЕ“ И „НОВЕ“ ФИЛОЗОФИЈЕ БРОЈА	155
Ваит Д. Ибро, Еуген Љајко УЛОГА ЈЕЗИКА ПРИЛИКОМ УСВАЈАЊА МАТЕМАТИЧКИХ ПОЈМОВА И ПРАВИЛА	169
Драгица Ц. Милинковић ПРОБЛЕМСКИ ЗАДАЦИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	175
Сања Маричић ФОРМУЛИСАЊЕ ПРОБЛЕМА КАО КОМПОНЕНТА КРИТИЧКОГ МИШЉЕЊА УЧЕНИКА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	183
Крстивоје М. Шпијуновић ШКОЛЕ У СЕЛИМА СРБИЈЕ НА БЕСПУЋУ	191
Наташа М. Павловић, Миленко Т. Пикула РЕГУЛАРИЗОВАНИ ТРАГОВИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА КАШЊЕЊЕМ	199
Сандра Б. Косић-Јеремић, Миленко Т. Пикула АНАЛИЗА СТАЊА У УЧЕЊУ МАТЕМАТИКЕ НАТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА КРОЗ ПРИЗМУ ЕКСТРЕМАЛНИХ ЗАДАТАКА	209