Редакција

Проф. др Бабић Миланка, Универзитет у Источном Сарајеву, БиХ
Проф. др Бањанин Милорад, Универзитет у Источном Сарајеву, БиХ
Проф. др Вуковић Мирјана, Универзитет у Сарајеву, БиХ
Проф. др Говедарица Видан, Универзитет у Источном Сарајеву, БиХ
Доц. др Кнежевић Саша, Универзитет у Источном Сарајеву, БиХ
Проф. др Печенцов Александар, Државни универзитет Ломоносов, Русија
Проф. др Пикула Миленко, Универзитет у Источном Сарајеву, БиХ
Академик проф. др Пилиповић Стеван, Универзитет у Новом Саду, Србија
Проф. др Томић Милош, Универзитет у Источном Сарајеву, БиХ
Проф. др Црњац Миљенко, Универзитет у Осијеку, Хрватска
Проф. др Шпијуновић Крстивоје, Универзитет у Крагујевцу, Србија
Проф. др Шћепановић Радоје, Универзитет Црне Горе, Црна Гора

Радове у овој књизи су рецензирали:

Проф. др Бањанин Милорад
Проф. др Вуковић Мирјана
Проф. др Говедарица Видан
Проф. др Диковић Љубица
Проф. др Живаљевић Раде
Проф. др Јовановић Бошко
Проф. др Јовановић Владимир
Доц. др Јокановић Душан
Проф. др Кешељ Владо
Проф. др Липковски Александар
Проф. др Милошевић Радослав
Проф. др Пикула Миленко
Академик проф. др Пилиповић Стеван
Доц. др Станимировић Зорица
Проф. др Фаткић Хусе
Проф. др Шпијуновић Крстивоје
Проф. др Шћепановић Радоје

Зборник је штампан уз финансијску подршку
Министарства науке и технологије Владе Републике Српске.

Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале

Посебна издања
НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига 6
том 3

НАУКА И ИДЕНТИТЕТ

ПРВА МАТЕМАТИЧКА КОНФЕРЕНЦИЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

ЗБОРНИК РАДОВА СА НАУЧНОГ СКУПА
(Пале, 21 - 22. мај 2011.)

Пале, 2012

НАУЧНИ СКУП

НАУКА И ИДЕНТИТЕТ

Књига 6
том 3

ПРВА МАТЕМАТИЧКА КОНФЕРЕНЦИЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Издавач:
Филозофски факултет Универзитета у Источном Сарајеву

За издавача:
Проф. др Миланка Бабић

Главни уредник:
Проф. др Миленко Пикула

Секретар редакције:
Доц. др Саша Кнежевић

Технички уредник и компјутерски слог:
Властимир Пантић

Лектура и коректура:
Јадранка Регоје

Штампа:
"DIS COMPANY" д.о.о. Пале

Тираж:
300 примјерака

Пале, 2012

COBISS.BH-ID 2760216

Секција за анализу

Миленко Т. Пикула*
Владимир В. Владичић
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за математику и рачунарство

Оригинални научни рад

О ЈЕДНОМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОМ ОПЕРАТОРУ И ЊЕГОВИМ СВОЈСТВЕНИМ ВРИЈЕДНОСТИМА

1. *Увод*

У овом раду посматраћемо диференцијални оператор

$$Ly = -y'' + q(x)y(x-\tau)$$

при чему је $q \in C\left(-\infty, \pi\right]$ позната реална функција коју ћемо звати потенцијал, и $\tau \in \left(0, \pi\right)$ позната величина коју ћемо звати кашњење. Овај оператор припада класи Штурм-Лиувилових оператора другог реда са кашњењем. Посматраћемо овај оператор на домену:

$$C^{03} = \left\{ f : (-\infty, \pi] \to C \,\middle|\, f''' \in C(-\infty, \pi];\ f(x) = 0 \forall x \in (-\infty, 0] \right\}$$

при чему је на овом домену норма уведена на познат начин:

$$\left\| f \right\| = \max_{x\in(-\infty,\pi]} \left| f'''(x) \right| + \max_{x\in(-\infty,\pi]} \left| f''(x) \right| + \max_{x\in(-\infty,\pi]} \left| f'(x) \right| + \max_{x\in(-\infty,\pi]} \left| f(x) \right|$$

са нормом дефинисаном на овај начин C^{02}, C^{03} постају Банахови простори.

Кодомен овог оператора је

$C' = \left\{ f \in C(-\infty, \pi] \,\middle|\, f(x) = 0 \ \forall x \in (-\infty, 0] \right\}$ са стандардном нормом.

Уколико за неки комплексан број λ постоји нетривијално рјешење једначине $Ly = \lambda y$ тада кажемо „“да је λ својствена вриједност оператора L.

Циљ нам је да покажемо да је овај оператор линеаран и ограничен и да је скуп његових својствених вриједности празан.

2. *Линеарност и ограниченост оператора* L

Став1: *Оператор* L *дефинисан у уводу је линеаран и ограничен.*

Доказ: Нека су α, β произвољни комплексни бројеви и нека су f, g произвољне функције из C^{03} тада је

$$L(\alpha f + \beta g) = -(\alpha f(x) + \beta g(x))'' + q(x)(\alpha f(x-\tau) + \beta g(x-\tau))$$

* mpikula@paleol.net

$$L(\alpha f+\beta g)=-\alpha f''(x)-\beta g''(x)+\alpha q(x)f(x-\tau)+\beta q(x)g(x-\tau)$$
$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g)$$

чиме смо доказали да је оператор L линеаран. Докажимо још да је овај оператор ограничен, означимо $m=\max\limits_{x\in[0,\pi]}|q(x)|$ имамо

$$\|L(f)\|=\|-f''(x)+q(x)f(x-\tau)\| \quad \text{даље}$$
$$\|L(f)\|=\max_{x\in[-\infty,\pi]}|-f''(x)+q(x)f(x-\tau)|$$

с обзиром на структуру домена имамо

$$\|L(f)\|=\max_{x\in[0,\pi]}|-f''(x)+q(x)f(x-\tau)|$$
$$\|L(f)\|\le\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)|+\max_{x\in[0,\pi]}|q(x)f(x-\tau)|$$
$$\|L(f)\|\le\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)|+\max_{x\in[0,\pi]}|f'(x)|+\max_{x\in[0,\pi]}|f(x)|+m\max_{x\in[0,\pi]}|f(x-\tau)|$$
$$\|L(f)\|\le\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f'''(x)|+\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f''(x)|+\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f'(x)|+\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f(x)|+$$
$$+m\left(\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f'''(x-\tau)|+\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f''(x-\tau)|+\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f'(x-\tau)|+\max_{x\in[-\infty,\pi]}|f(x-\tau)|\right)$$
$$\|L(f)\|\le\|f\|+m\|f\|\le(1+m)\|f\|$$

па је оператор L ограничен.

3. *Својствене вриједности оператора* L

Прво ћемо доказати сљедећу лему:

Лема 1: *За сваку функцију* $f\in C^{03}$ *вриједи* $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$.

Доказ: Нека је f произвољна функција из C^{03}. По дефиницији имамо да је

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$$

С обзиром да је $f(x)=0,\forall x\in(-\infty,0)$, закључујемо да је $f'(x)=0,\forall x\in(-\infty,0]$,

па на основу тога добијамо $f''(0)=0$ и $f'''(0)=0$.

Став 2: *Својствене вриједности оператора* L *су реални бројеви.*

Доказ: Нека је λ својствена вриједност оператора L, претпоставимо супротно $\operatorname{Im}\lambda\neq0$.

Ако је λ својствена вриједност оператора L тада постоји нетривијално рјешење диференцијалне једначине

$$-y''(x)+q(x)y(x-\tau)=\lambda y(x)$$

на сегменту $[0,\pi]$ које задовољава на основу леме 1 и структуре домена услове:

$y(x)=0, \forall x \in (-\infty,0), y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$.

Посматрајмо ову једначину на сегменту $[0,\tau]$, она на овом сегменту има облик

$-y''(x)=\lambda y(x)$,

нека је $y(x)=u(x)+iv(x), \lambda=a+ib$ пошто је q функција са реалним вриједностима ова једначина са наведеним условима је еквивалентна сљедећем систему диференцијалних једначина:

$u''(x)+au(x)-bv(x)=0$

$v''(x)+bu(x)+av(x)=0$

када из прве једначине израчунамо $v(x)$ и уврстимо у другу добијамо

$u^{IV}(x)+2au''(x)+b^2u(x)+a^2u(x)=0$.

Означимо $|\lambda|=r, Arg\lambda=\varphi$, пошто је $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ онда је $\sin\varphi \neq 0$. Рјешење ове хомогене линеарне диференцијалне једначине са константним коефицијентима је

$$u(x)=e^{x\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\left(C_1\sin\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+C_2\cos\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)+$$

$$+e^{-x\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\left(C_3\sin\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+C_4\cos\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

искористимо сада услове $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)$.

Из $y(0)=0$ имамо:

$C_2+C_4=0$,

из $y'(0)=0$ имамо:

$$C_1\sin\frac{\varphi}{2}+C_2\cos\frac{\varphi}{2}+C_3\sin\frac{\varphi}{2}-C_4\cos\frac{\varphi}{2}=0,$$

из $y''(0)=0$ имамо:

$C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi-C_3\sin\varphi+C_4\cos\varphi=0$.

Под претпоставком $\sin\varphi\neq 0$ имамо

$C_3=C_1, C_2=-C_1tg\frac{\varphi}{2}, C_4=C_1tg\frac{\varphi}{2}$, па је

$$u(x)=C_1e^{x\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)-tg\,\frac{\varphi}{2}\cos\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)+$$

$$+C_1e^{-x\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+tg\,\frac{\varphi}{2}\cos\left(x\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

из $y'''(0)=0$ имамо:

$$4C_1r\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}=0\,.$$

Пошто $\sin\varphi\neq 0$ имплицира $\cos\frac{\varphi}{2}\neq 0$ имамо да је $C_1=0$ па је $u(x)=0,\forall x\in[0,\tau]$, слично се показује да је $v(x)=0,\forall x\in[0,\tau]$ па је $y(x)=0,\forall x\in[0,\tau]$. Слично сада посматрајмо једначину $-y''(x)+q(x)y(x-\tau)=\lambda y(x)$ на сегменту $[\tau,2\tau]$ добијамо да је $y(x)=0,\forall x\in[\tau,2\tau]$. Пошто постоји $k\in N$ такво да је $\pi\in(k\tau,(k+1)\tau]$ понављајући горе наведени поступак добијамо $y(x)=0,\forall x\in[0,\pi]$, па λ није својствена вриједност оператора L. Према томе λ је реалан број.

Став 3: *Скуп својствених вриједности оператора L је празан*

Доказ: У ставу 2 смо доказали да својствене вриједности овог оператора морају бити реални бројеви, посматрајмо сада диференцијалну једначину

$$-y''(x)+q(x)y(x-\tau)=\lambda y(x)\,,$$

при чему је λ реалан број, заједно са условима:

$$y(x)=0,\forall x\in(-\infty,0),y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0\,.$$

Нека је $\lambda>0$ тада на сегемнту $[0,\tau]$ ова једначина има облик

$$-y''(x)=\lambda y(x)$$

ако је $y(x)=u(x)+iv(x)$ имамо двије једначине:

$$u''(x)+\lambda u(x)=0$$

$$v''(x)+\lambda v(x)=0$$

чија су рјешења

$u(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,v(x)=C_3\cos\sqrt{\lambda}x+C_4\sin\sqrt{\lambda}x$ па из услова $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$ лако слиједи да је $y(x)=0,\forall x\in[0,\tau]$. $y(x)=0,\forall x\in[0,\tau]$. Сада као у овом случају слично посматрамо једначину $-y''(x)+q(x)y(x-\tau)=\lambda y(x)$ на сегменту $[\tau,2\tau]$ добијамо да је $y(x)=0,\forall x\in[\tau,2\tau]$. Пошто постоји $k\in N$ такво да је $\pi\in(k\tau,(k+1)\tau]$ понављајући горе наведени поступак добијамо

$y(x)=0, \forall x \in [0,\pi]$ па овај оператор нема својствених вриједности за које важи $\lambda > 0$.

Нека је $\lambda < 0$ тада на сегемнту $[0,\tau]$ ова једначина има облик:

$-y''(x)=\lambda y(x)$,

ако је $y(x)=u(x)+iv(x)$ имамо двије једначине:

$u''(x)+\lambda u(x)=0$

$v''(x)+\lambda v(x)=0$

чија су рјешења $u(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}, v(x)=C_3e^{\sqrt{\lambda}x}+C_4e^{-\sqrt{\lambda}x}$ па из услова $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$ лако слиједи да је $y(x)=0, \forall x \in [0,\tau]$. $y(x)=0, \forall x \in [0,\tau]$. Сада као у овом случају слично посматрамо једначину $-y''(x)+q(x)y(x-\tau)=\lambda y(x)$ на сегменту $[\tau,2\tau]$ добијамо да је $y(x)=0, \forall x \in [\tau,2\tau]$. Пошто постоји $k \in N$ такво да је $\pi \in (k\tau,(k+1)\tau]$ понављајући горе наведени поступак добијамо $y(x)=0, \forall x \in [0,\pi]$ па овај оператор нема својствених вриједности за које важи $\lambda < 0$. Пошто је лако показати да $\lambda = 0$ није својствена вриједност овог оператора, закључујемо даје скуп својствених вриједности оператора празан.

Литература

Левитан, Саргсян 1988: Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*, Москва, Наука.

Норкин 1965: С. Б. Норкин, *Дифференциалъные уравнения второго порядка с запаздываюшим аргументом*, Москва, Наука.

Садовничый 1979: В. А. Садовничый, *Теория операторов*, МТУ, Москва.

Пикула, Лазович, Владичич: М. Т. Пикула, Р. П. Лазович, В. М. Владичич, Обратные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, Споменица Веселину Перићу, Анурс, 343–360.

Пикула 1990: М. Т. Пикула, О регуляризованных следах дифференциалного оператора типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом, Дифф. Уравнения 1(1990) 103–10.

Miloš Ž. Tomić*
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Tehnološki fakultet Zvornik

Originalni naučni rad

ON THE CONVERSE THEOREM OF APPROXIMATION IN VARIOUS METRICS FOR NON-PERIODIC FUNCTIONS

1. *Introduction and Preliminaries*

The converse theorem of approximation in various metrics for 2π periodic functions of several variables was proved in [5]. In this paper we prove the theorem of representation for the derivative of a function, and then we prove the analogous converse theorem for non-periodic functions defined on the space R^n. In this way we generalize and improve the converse theorem from [4], 6.4.

As usual we say that a function $f(x_1,...,x_n) \in L_p(R^n), 1 \le p < \infty$, if

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f|^p dx_1...dx_n \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{R^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad x = (x_1, x_2,..., x_n) \ .$$

The notions of the best approximation and of the modulus of smoothness are given in [2] and [4].

Let $g_\nu = g_{\nu_1...\nu_n}(x_1,...,x_n)$, $\nu = (\nu_1,...,\nu_n)$, $(g_\nu \in L_p)$, be an entire function of exponential type ν_i with respect to the variable x_i, $(i = 1,2,...,n)$.

The best approximation $E_{\nu_1,...,\nu_n}(f)_p$ of a function $f \in L_p(R^n)$ by entire functions of exponential type is the quantity

$$E_{\nu_1,...,\nu_n}(f)_p = \inf_{g_\nu} \| f - g_{\nu_1,...,\nu_n} \|_p \ .$$

The modulus of smoothness of order k of a function f with respect to the variable x_i is the quantity

$$\omega_k(f;\delta_i)_p = \omega_k(f;0,...,0,\delta_i,0,...,0)_p = \sup_{|h_i| \le \delta_i} \| \Delta_{h_i}^k f \|_p$$

where

$$\Delta_{h_i}^k f = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x_1,..., x_{i-1}, x_i + jh_i, x_{i+1},..., x_n).$$

The derivative of a function f is denoted by symbol

$$f^{(r_1,...,r_n)} = \frac{\partial^{r_1+...+r_n} f}{\partial x_1^{r_1} ... \partial x_n^{r_n}} \ .$$

* milostomic@yahoo.com

Lemma 1.1. If $A_i \downarrow 0$ as $i \to \infty$ then inequalities hold

$$2^{(\lambda-1)s} A_{2^\lambda} \le \sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^\lambda} i^{s-1} A_i \ , \tag{1.1}$$

$$2^{(\lambda+1)s} A_{2^\lambda} \le 2^{2s} \sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^\lambda} i^{s-1} A_i \tag{1.2}$$

for $\lambda = 1,2,...$ and $s \ge 1$.

Proof. We have

$$\sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^\lambda} i^{s-1} = \left(2^{\lambda-1}+1\right)^{s-1} + ... + \left(2^\lambda\right)^{s-1} \ge \left(2^{\lambda-1}+1\right)^{s-1} \cdot 2^{\lambda-1} \ge \left(2^{\lambda-1}\right)^s .$$

Therefore

$$2^{(\lambda-1)s} \le \sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^\lambda} i^{s-1} \ . \tag{1.3}$$

Since the sequence A_i is monotonic, (1.1) follows from (1.3).

Multiplying the inequality (1.1) by 2^{2s} we get the inequality (1.2). Lemma1.1. has been proved.

Lemma 1.2. If $A_i \downarrow 0$ as $i \to \infty$, and $s \ge 1$, then the following inequality holds

$$\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} i^{s-1} A_i \le 2^{2s-1} \sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} i^{s-1} A_i \ , \quad m = 2,3,.... \tag{1.4}$$

Proof. The following inequalities hold because the sequence A_i is monotonic

$$\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} i^{s-1} A_i \le A_{2^{m-1}} \sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} i^{s-1} \ , \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} i^{s-1} A_i \ge A_{2^{m-1}} \sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} i^{s-1} \ . \tag{1.6}$$

We have

$$\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} i^{s-1} \le \left(2^m\right)^{s-1} \cdot 2^{m-1} \ ,$$

$$\sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} i^{s-1} \ge \left(2^{m-2}\right)^{s-1} \cdot 2^{m-2} = 2^{1-2s} \cdot \left(2^m\right)^{s-1} \cdot 2^{m-1} .$$

From the above two inequalities it follows

$$(1.7) \qquad \sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m} i^{s-1} \le 2^{2s-1} \sum_{i=2^{m-2}+1}^{2^{m-1}} i^{s-1} .$$

Multiplying the inequality (1.7) by $A_{2^{m-1}}$ and in view of (1.5) and (1.6), we get (1.2). Lemma 1.2. has been proved.

Remark 1.1. Lemmas 1.1. and 1.2. are valid for $0 < s < 1$ also, with different constants $C = C(s)$. So the inequality (1.1) becomes

$$(1.1`) \qquad 2^{(\lambda-1)s} A_{2^\lambda} \le 2^{s-1} \sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^\lambda} i^{s-1} A_i \ , \ (0 < s < 1) .$$

2. *Theorem of representation*

Let $g_\nu = g_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1,\ldots,x_n)$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$, $(g_\nu \in L_p)$, be an entire function of exponential type ν_i with respect to the variable x_i , $(i = 1,2,\ldots,n)$, by which the best approximation $E_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(f)_p$ is achieved, i.e. let

$$(2.1) \qquad E_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(f)_p = \left\| f - g_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \right\|_p .$$

From these entire functions $g_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1,\ldots,x_n)$, we create entire functions

$$(2.2) \qquad \xi_\lambda = g_{2^{(\lambda+1)l_1} \ldots 2^{\lambda+1} \ldots 2^{(\lambda+1)l_n}} - g_{2^{\lambda l_1} \ldots 2^\lambda \ldots 2^{\lambda l_n}} \ , \ \lambda = 0,1,2,\ldots$$

for given natural numbers l_j , $(j = 1,2,\ldots,n)$, where $l_i = 1$ for a chosen number $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

The function ξ_λ is entire of exponential type $2^{(\lambda+1)l_j}$ with respect to the x_j .

Theorem 2.1. Let a function $f \in L_p(R^n)$ and r_j be non-negative integer numbers, and l_j, $(j = 1,\ldots,n)$, be natural numbers, where $l_i = 1$ for some $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

If the following inequality holds for the best approximation of function f

$$(2.3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{q\sigma-1} E^q_{\lambda^{l_1} \ldots \lambda \ldots \lambda^{l_n}}(f)_p < \infty \ ,$$

where

(2.4) $$\sigma = \sum_{j=1}^{n} l_j \left(r_j + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right), \ 1 \le p \le q < \infty ,$$

then the function f *has derivative* $f^{(r_1,\dots r_n)}$ belonging to the space L_q and in the sense of L_q the equality

(2.5) $$f^{(r_1,\dots r_n)} \overset{(q)}{=} g_{1\dots 1}^{(r_1,\dots r_n)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \xi_\lambda^{(r_1,\dots r_n)} .$$

holds.

Proof. For the sum

(2.6) $$G_m = g_{1\dots 1} + \sum_{\lambda=0}^{m} \xi_\lambda \quad , m = 0,1,2,\dots$$

the equality

(2.7) $$G_m = g_{2^{(m+1)l_1}\dots 2^{m+1}\dots 2^{(m+1)l_n}} .$$

holds. In view of (2.1) and (2.7) we conclude that

$$\left\| f - G_m \right\|_p = E_{2^{(m+1)l_1}\dots 2^{m+1}\dots 2^{(m+1)l_n}} \left(f \right)_p$$

hence, it follows that

(2.8) $$\left\| f - G_m \right\|_p \to 0 \ \text{ as } \ m \to \infty .$$

This means that the equality

(2.9) $$f \overset{(p)}{=} g_{1\dots 1} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \xi_\lambda$$

holds in L_p.

In the next step we prove that the equality (2.9) holds in L_q. For ξ_λ we have

(2.10) $$\left\| \xi_\lambda \right\|_p \le 2 E_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}} \left(f \right)_p .$$

Applying the inequality of various metrics of S. M. Nikolsky, ([2],3.3.5.), we obtain

$$\left\| \xi_\lambda \right\|_q \le 2^n \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\lambda+1)l_j} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left\| \xi_\lambda \right\|_p$$

hence, in view of (2.10), it follows

(2.11) $$\left\| \xi_\lambda \right\|_q << 2^n \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\lambda+1)l_j} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}} \left(f \right)_p .$$

We will estimate the sum

$$G_t - G_m = \sum_{\lambda=m+1}^{t} \xi_\lambda \ , \ \ m < t \, , \tag{2.12}$$

in the norm L_q.

With the aim of estimating quantity $A = \left\| G_t - G_m \right\|_q^q$ we will apply a method which has been used in several papers. For example, the method was applied in papers [3] and [1] (see the estimate of quantity A in Lemma 1). The method was also applied in paper [6] to estimate quantity A from (2.6) to (2.45). Therefore, taking into account (2.11), from (2.12), we get

$$\left\| G_t - G_m \right\|_q << \left\{ \sum_{\lambda=m+1}^{t} 2^{\lambda q \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{j=1}^{n} l_j} E^q_{2^{\lambda l_1} .. 2^{\lambda} .. 2^{\lambda l_n}} \left(f \right)_p \right\}^{\frac{1}{q}} . \tag{2.13}$$

Following the proof in [6] and starting from equality (2.12), we will now prove inequality (2.13).

Denote

$$A = \left\| G_t - G_m \right\|_q^q = \left\| \sum_{\lambda=m+1}^{t} \xi_\lambda \right\|_q^q \ , \ \ m < t \, . \tag{2.14}$$

For a given number q denote $[q]+1 = k$. This means that $k \in \{2,3,...\}$ and that $\frac{q}{k} < 1$. From (2.14) it follows that

(2.15)

$$A = \int_{R_n} \left| \sum_{\lambda=m+1}^{t} \xi_\lambda \right|^q dx = \int_{R_n} \left| \sum_{\lambda=m+1}^{t} \xi_\lambda \right|^{\frac{q}{k} k} dx \le \int \left(\sum_{\lambda=m+1}^{t} \left| \xi_\lambda \right|^{\frac{q}{k}} \right)^k dx \quad , \int = \int_{R_n} \ .$$

Denote

$$\delta_\lambda = \left| \xi_\lambda \right|^{\frac{q}{k}} . \tag{2.16}$$

We get

$$A \le \int \left(\sum_{\lambda=m+1}^{t} \delta_\lambda \right)^k dx \, . \tag{2.17}$$

As $k = k(q)$ is an integer, then

$$\left(\sum_{\lambda=m+1}^{t} \delta_\lambda \right)^k = \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} ... \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} \prod_{j=1}^{k} \delta_{\lambda_j} \, . \tag{2.18}$$

Now from (2.17) based on (2.18) we get

(2.19) $$A \le \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \dots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} \int \prod_{j=1}^{k} \delta_{\lambda_j} dx .$$

Using the equality

(2.20) $$\prod_{j=1}^{k} D_j = \left(\prod_{\substack{r,s=1 \\ r<s}}^{k} D_r D_s \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

for $D_j = \delta_{\lambda_j}$ from (2.19) we get

(2.21) $$A \le \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \dots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} \int \left(\prod_{\substack{r,s=1 \\ r<s}}^{k} \delta_{\lambda_r} \delta_{\lambda_s} \right)^{\frac{1}{k-1}} dx .$$

Applying Hölder's integral inequality to a product of $\frac{k(k-1)}{2}$ factors, from (2.21) we get that

(2.22) $$A \le \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \dots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} \prod_{\substack{r,s=1 \\ r<s}}^{k} \left[\int \left(\delta_{\lambda_r} \delta_{\lambda_s} \right)^{\frac{k}{2}} dx \right]^{\frac{2}{k(k-1)}} .$$

Based on (2.16) we get that

(2.23) $$\Gamma_{rs} = \int \left(\delta_{\lambda_r} \delta_{\lambda_s} \right)^{\frac{k}{2}} dx = \int \left(\left| \xi_{\lambda_r} \right|^{\frac{q}{2}} \left| \xi_{\lambda_s} \right|^{\frac{q}{2}} \right) dx .$$

For numbers $\alpha = \frac{p+q}{p}$, $\alpha` = \frac{p+q}{q}$ equality $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha`} = 1$ holds. Therefore by applying Hölder's inequality we get

(2.24) $$\Gamma_{rs} \le \left(\left\| \xi_{\lambda_r} \right\|_{\frac{q\alpha}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\left\| \xi_{\lambda_s} \right\|_{\frac{q\alpha`}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} .$$

Function ξ_λ is entire of exponential type $2^{(\lambda+1)l_j}$ with respect to x_j, $j = 1,2,...,n$. Therefore applying the inequality of S.M. Nikolsky ([2],3.3.5.) we get

(2.25) $$\left(\left\| \xi_{\lambda_r} \right\|_{\frac{q\alpha}{2}} \right)^{\frac{q}{2}} << 2^{\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_r l_j \right) \left(\frac{q}{2p} - \frac{1}{\alpha} \right)} \left(\left\| \xi_{\lambda_r} \right\|_p \right)^{\frac{q}{2}} .$$

(2.26) $$\left(\left\|\xi_{\lambda_s}\right\|_{\frac{q\alpha'}{2}}\right)^{\frac{q}{2}} << 2^{\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_s l_j\right)\left(\frac{q}{2p}-\frac{1}{\alpha'}\right)}\left(\left\|\xi_{\lambda_s}\right\|_p\right)^{\frac{q}{2}} .$$

Using the equality

(2.27) $$\frac{q}{2p}-\frac{1}{\beta}=\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}, \quad \beta\in\left\{\alpha,\alpha'\right\},$$

from (2.24) based on (2.25), (2.26) and (2.10) we get

(2.28) $$\Gamma_{rs} << 2^{\left[\lambda_r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)+\lambda_s\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha'}\right)\right]\sum_{j=1}^{n}l_j} \cdot \left\{2^{\left[(\lambda_r+\lambda_s)q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right]\sum_{j=1}^{n}l_j} E^q_{2^{\lambda_r l_1}\ldots 2^{\lambda_r}\ldots 2^{\lambda_r l_n}}(f)_p E^q_{2^{\lambda s l_1}\ldots 2^{\lambda s}\ldots 2^{\lambda s l_n}}(f)_p\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Denote

(2.29) $$H_i = 2^{iq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{n}l_j} E^q_{2^{il_1}\ldots 2^{i}\ldots 2^{il_n}}(f)_p .$$

Then

(2.30) $$\Gamma_{rs} << 2^{\left[\lambda_r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)+\lambda_s\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha'}\right)\right]\sum_{j=1}^{n}l_j} H^{\frac{1}{2}}_{\lambda_r} H^{\frac{1}{2}}_{\lambda_s} .$$

Since $\frac{1}{\alpha`}=1-\frac{1}{\alpha}$ it holds that

$$\lambda_r\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)+\lambda_s\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha'}\right)=-\left(\lambda_s-\lambda_r\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Therefore from (2.30) it follows

(2.31) $$\Gamma_{rs} << 2^{-\left(\lambda_s-\lambda_r\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{n}l_j} H^{\frac{1}{2}}_{\lambda_r} H^{\frac{1}{2}}_{\lambda_s} .$$

If we apply Hölder's inequality so that α' is with respect to the first factor, and α is with respect to the second factor, then in the same way we conclude that the following inequality holds

(2.32) $$\Gamma_{rs} << 2^{-\left(\lambda_r-\lambda_s\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{n}l_j} H^{\frac{1}{2}}_{\lambda_r} H^{\frac{1}{2}}_{\lambda_s} .$$

Based on (2.31) and (2.32) we conclude that

(2.33) $$\Gamma_{rs} << 2^{-|\lambda_r-\lambda_s|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j} H_{\lambda_r}^{\frac{1}{2}} H_{\lambda_s}^{\frac{1}{2}} .$$

Denote

(2.34) $$a(\lambda_s,\lambda_r)=2^{-|\lambda_r-\lambda_s|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j} ,$$

(2.35) $$Q=\prod_{\substack{r,s=1\\ r<s}}^{k}\left\{a(\lambda_s,\lambda_r)H_{\lambda_r}^{\frac{1}{2}} H_{\lambda_s}^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{2}{k(k-1)}} .$$

From (2.22), based on (2.23), (2.33), (2.34) and (2.35), it follows

(2.36) $$A \le \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \ldots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} Q .$$

We will now estimate product Q. Based on (2.20) it holds that

$$\prod_{\substack{r,s=1\\ r<s}}^{k}\left\{H_{\lambda_r}^{\frac{1}{2}} H_{\lambda_s}^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{k-1}} = \prod_{j=1}^{k} H_{\lambda_j}^{\frac{1}{2}}$$

and then, using (2.35), we get

(2.37) $$Q=\prod_{j=1}^{k} H_{\lambda_j}^{\frac{1}{k}} \prod_{\substack{r,s=1\\ r<s}}^{k}\{a(\lambda_s,\lambda_r)\}^{\frac{2}{k(k-1)}} .$$

It holds

$$a(\lambda_s,\lambda_r)=a(\lambda_r,\lambda_s) \text{ and } a(\lambda_r,\lambda_r)=1.$$

Therefore

(2.38) $$\prod_{\substack{r,s=1\\ r<s}}^{k} a(\lambda_r,\lambda_s)=\prod_{r=1}^{k}\prod_{s=1}^{k} a^{\frac{1}{2}}(\lambda_r,\lambda_s).$$

From (2.37) based on (2.38) it follows

(2.39) $$Q=\prod_{r=1}^{k} H_{\lambda_r}^{\frac{1}{k}}\left\{\prod_{s=1}^{k}\left[a(\lambda_s,\lambda_r)\right]^{\frac{1}{k-1}}\right\}^{\frac{1}{k}} .$$

Now from (2.36) based on (2.39) we get

(2.40) $$A << \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \ldots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} \prod_{r=1}^{k} H_{\lambda_r}^{\frac{1}{k}}\left\{\prod_{s=1}^{k}\left[a(\lambda_r,\lambda_s)\right]^{\frac{1}{k-1}}\right\}^{\frac{1}{k}} .$$

In the inequality (2.40) the product has k factors

$$L_r = H_{\lambda_r}^{\frac{1}{k}} \prod_{s=1}^{k} \left[a(\lambda_r, \lambda_s)\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

with the exponent $\frac{1}{k}$. The sum of these exponents is 1. Therefore we can apply Hölder's inequality based on which we get

$$A << \prod_{r=1}^{k} \left\{ \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \ldots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} H_{\lambda_r} \prod_{s=1}^{k} \left[a(\lambda_r, \lambda_s)\right]^{\frac{1}{k-1}} \right\}^{\frac{1}{k}} . \tag{2.41}$$

Denote

$$M_r = \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} \ldots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} H_{\lambda_r} \prod_{s=1}^{k} \left[a(\lambda_r, \lambda_s)\right]^{\frac{1}{k-1}}, \; r = 1,2,\ldots,k . \tag{2.42}$$

Since $\lambda_r = m+1,\ldots,t$ for every $r = 1,\ldots,k$, then

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_k = M . \tag{2.43}$$

We will estimate, for example, $M_1 = M$. Since $a(\lambda_1, \lambda_1) = 1$, then from (2.42) after the calculation we get

$$M = M_1 = \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} H_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2=m+1}^{t} \left[a(\lambda_1, \lambda_2)\right]^{\frac{1}{k-1}} \ldots \sum_{\lambda_k=m+1}^{t} \left[a(\lambda_1, \lambda_k)\right]^{\frac{1}{k-1}} . \tag{2.44}$$

Based on (2.34) we conclude that

$$\sum_{\lambda_r=m+1}^{t} \left[a(\lambda_1, \lambda_r)\right]^{\frac{1}{k-1}} \le C(p,q), \; r = 2,3,\ldots,k . \tag{2.45}$$

Now from (2.44) based on (2.45) it follows

$$M << \sum_{\lambda_1=m+1}^{t} H_{\lambda_1} . \tag{2.46}$$

From (2.41), using (2.42), (2.43) and (2.46), we get that

$$A << \prod_{r=1}^{k} M^{\frac{1}{k}} = M << \sum_{i=m+1}^{t} H_i . \tag{2.47}$$

Based on (2.47) and (2.29) we conclude that

$$A << \sum_{i=m+1}^{t} 2^{iq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j} \; E^q_{2^{il_1}\ldots 2^{i}\ldots 2^{il_n}}(f)_p . \tag{2.48}$$

Finally, from (2.48), based on (2.14), the inequality (2.13) follows.

If $r_j = 0$ then $\sigma = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j$, therefore in view of (2.3) and (2.13) we deduce that the sequence $\{G_m\}$ is a Cauchy sequence in the space L_q and therefore it tends to a function f in L_q ([2], 1.3.9.). Thus, we have the equality

$$f \overset{(q)}{=} g_{1\ldots1} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \xi_\lambda \,. \tag{2.49}$$

In the next step we prove the equality (2.5). To prove (2.5) we estimate the quantity

$$B = \left\| G_t^{(r_1,\ldots,r_n)} - G_m^{(r_1,\ldots,r_n)} \right\|_q^q = \left\| \sum_{\lambda=m+1}^{t} \xi_\lambda^{(r_1,\ldots,r_n)} \right\|_q^q \,. \tag{2.50}$$

Applying the inequality of Bernstein type ([2] ,3.2.2.) we get

$$\left\| \xi_\lambda^{(r_1,\ldots,r_n)} \right\|_q \le \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{l_j r_j} \right) 2^{\lambda\left(l_1 r + \ldots + l_n r_{n1}\right)} \left\| \xi_\lambda \right\|_q$$

hence, in view of (2.11), it follows

$$\left\| \xi_\lambda^{(r_1,\ldots,r_n)} \right\|_q << 2^{\lambda\sigma} E_{2^{\lambda l_1}\ldots 2^{\lambda}\ldots 2^{\lambda l_n}}(f)_p \,. \tag{2.51}$$

Now, using the same procedure by which we estimated the quantity A, for the quantity B we get (see estimation of quantity B in [6] from (2.50) to (2.65))

$$\left\| G_t^{(r_1,\ldots,r_n)} - G_m^{(r_1,\ldots,r_n)} \right\|_q << \left\{ \sum_{\lambda=m+1}^{t} 2^{\lambda q \sigma} E^q_{2^{\lambda l_1}\ldots 2^{\lambda}\ldots 2^{\lambda l_n}}(f)_p \right\}^{\frac{1}{q}} . \tag{2.52}$$

In view of the condition (2.3) and inequality (2.52) we conclude that the sequence $\{G_m^{(r_1,\ldots,r_n)}\}$ is a Cauchy sequence in L_q . If we denote that $G_m^{(r_1,\ldots,r_n)} \to h,\ m \to \infty$, then we conclude (see [2], 4.4.7. or [4], 6.3.31) that $h = f^{(r_1,\ldots,r_n)}$. This means that the equality (2.5) holds. Theorem 2.1. has been proved.

3. *The converse theorem of approximation*

Now we are going to prove the converse theorem of approximation analogously to the result in [5] and give some consequences of the theorem.

Theorem 3.1. Let the conditions of theorem 2.1. be satisfied (the condition (2.3) where σ is given by (2.4)), and let k and m_i be given natural numbers. Then the inequality

$$(3.1)\qquad \omega_k\left(f^{(r_1,\dots,r_n)};0,\dots,0,\frac{1}{m_i},0,\dots,0\right)_q$$

$$\le C\left\{\frac{1}{m_i^k}\left[\|f\|_p^q+\sum_{\lambda=1}^{m_i}\lambda^{q(\sigma+k)-1}E^q_{\lambda^{l_1}\dots\lambda\dots\lambda^{l_n}}(f)_p\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\sum_{\lambda=m_i+1}^{\infty}\lambda^{q\sigma-1}E^q_{\lambda^{l_1}\dots\lambda\dots\lambda^{l_n}}(f)_p\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

holds, where constant C does not depend on either f nor $m_i=1,2,\dots$.

Proof. For the modulus of smoothness ω_k of the derivative $f^{(r_1,\dots,r_n)}$ of the function f we have

$$(3.2)\qquad \begin{aligned}\omega_k\left(f^{(r_1,\dots,r_n)};\frac{1}{m_i}\right)_q &\le \omega_k\left(f^{(r_1,\dots,r_n)}-G_m^{(r_1,\dots,r_n)};\frac{1}{m_i}\right)_q\\ &+\omega_k\left(G_m^{(r_1,\dots,r_n)};\frac{1}{m_i}\right)_q = I_1+I_2.\end{aligned}$$

For the quantity I_1 we obtain

$$(3.3)\qquad I_1 << \left\| f^{(r_1,\dots,r_n)}-G_m^{(r_1,\dots,r_n)}\right\|_q=\left\|\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}\xi_\lambda^{(r_1,\dots,r_n)}\right\|_q$$

In the same way by which the inequality (2.17) was established, in view of (3.3), we conclude that

$$(3.4)\qquad I_1 << \left\{\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}2^{\lambda q\sigma}E^q_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}}(f)_p\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

In virtue of the properties of the modulus of smoothness ([2], 4.4.4. (2)) we have

$$(3.5)\qquad I_2=\omega_k\left(G_m^{(r_1,\dots,r_n)};\frac{1}{m_i}\right)_q\le\frac{1}{m_i^k}\left\|G_m^{(r_1,\dots,r_i+k,\dots,r_n)}\right\|_q.$$

In the same way by which the inequality (2.17) was established, putting r_i+k instead of r_i ,

and since $l_i=1$, we get the estimate

$$(3.6)\qquad \left\|G_m^{(r_1,\dots,r_i+k,\dots,r_n)}\right\|_q << \left\{\|f\|_p^q+\sum_{\lambda=0}^{m}2^{\lambda q(\sigma+k)}E^q_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}}(f)_p\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Now, in view of (3.2), (3.4), (3.5) and (3.6), we obtain

$$\omega_k\left(f^{(r_1,\dots,r_n)};\frac{1}{m_i}\right)_q << \left\{\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}2^{\lambda q\sigma}E^q_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}}(f)_p\right\}^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{m_i^k}\left\{\|f\|_p^q+\sum_{\lambda=0}^{m}2^{\lambda q(\sigma+k)}E^q_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}}(f)_p\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.7}$$

Denote

$$q(\sigma+k)=s\,,\quad E^q_{2^{\lambda l_1}\dots 2^{\lambda}\dots 2^{\lambda l_n}}(f)_p=A_{2^{\lambda}}\,. \tag{3.8}$$

Then, using the inequality (1.1), (lemma 1.1.), we get

$$\sum_{\lambda=0}^{m}2^{\lambda s}A_{2^{\lambda}}=A_1+2^sA_2+2^s\sum_{\lambda=2}^{m}2^{(\lambda-1)s}A_{2^{\lambda}}$$

$$\le A_1+2^sA_2+2^s\sum_{\lambda=2}^{m}\sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^{\lambda}}i^{s-1}A_i$$

$$=A_1+2^sA_2+2^s\left\{\sum_{i=3}^{2^{m-1}}i^{s-1}A_i+\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m}i^{s-1}A_i\right\}.$$

Using the lemma 1.2. from the previous inequality, it follows

$$\sum_{\lambda=0}^{m}2^{\lambda s}A_{2^{\lambda}}<<\sum_{i=1}^{2^{m-1}}i^{s-1}A_i\,. \tag{3.9}$$

Choosing m so that $2^{m-1}\le m_i<2^m$, from (3.9) it follows

$$\sum_{\lambda=0}^{m}2^{\lambda s}A_{2^{\lambda}}<<\sum_{i=1}^{m_i}i^{s-1}A_i\,,$$

i.e.

$$\sum_{\lambda=0}^{m}2^{\lambda q(\sigma+k)}A_{2^{\lambda}}<<\sum_{i=1}^{m_i}i^{q(\sigma+k)-1}A_i\,. \tag{3.10}$$

To estimate the first sum in the inequality (3.7) we use the inequality (1.2), (lemma 1.1.), and get

$$\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}2^{\lambda q\sigma}A_{2^{\lambda}}=2^{-q\sigma}\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}2^{(\lambda+1)q\sigma}A_{2^{\lambda}}\le 2^{-q\sigma}2^{2q\sigma}\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}\sum_{i=2^{\lambda-1}+1}^{2^{\lambda}}i^{q\sigma-1}A_i$$

$$=2^{q\sigma}\left\{\left(2^m+1\right)^{q\sigma-1}A_{2^m+1}+\dots+\left(2^{m+1}\right)^{q\sigma-1}A_{2^{m+1}}+\dots\right\},$$

hence, using that $m_i<2^m$, it follows

$$\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}2^{\lambda q\sigma}A_{2^{\lambda}}\le 2^{q\sigma}\sum_{\lambda=m_i+1}^{\infty}i^{q\sigma-1}A_i\,. \tag{3.11}$$

Putting $A_i = E_i^q$ (the equality (3.8)), from (3.7) and (3.11), it follows (3.1). Theorem 3.1. has been proved.

Corollary 3.1. For $n=1$ it holds that $l_j = 1, r_j = r, \sigma = r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ and we get the corresponding theorems and inequalities for a function of one variable.

Corollary 3.2. If $l_j = 1,\ j = 1,2,...,n$ and $r_j = 0,\ j \neq i,\ r_i = r$, then $\sigma = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + r$.

Therefore, the condition

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{q\left[r+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right]-1} E^q_{\lambda\ldots\lambda\ldots\lambda}(f)_p < \infty$$

implies that the function f has derivative $\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}$ with respect to any variable x_i belonging to space L_q. For the modulus of smoothness the corresponding inequality holds.

Corollary 3.3. Applying the inequality

$\left(\sum a_k\right)^s \le \sum (a_k)^s,\ a_k \ge 0,\ 0 < s \le 1$, for $s = \frac{1}{q}$,

from the inequality (3.7) it follows

$$\omega_k\left(f^{(r_1,\ldots,r_n)}; \frac{1}{m_i}\right)_q << \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} 2^{\lambda\sigma} E_{2^{\lambda l_1}\ldots 2^{\lambda}\ldots 2^{\lambda l_n}}(f)_p + \frac{1}{m_i^k}\left\{\|f\|_p + \sum_{\lambda=0}^{m} 2^{\lambda(\sigma+k)} E_{2^{\lambda l_1}\ldots 2^{\lambda}\ldots 2^{\lambda l_n}}(f)_p\right\} \tag{3.12}$$

From (3.12) it follows

$$\omega_k\left(f^{(r_1,\ldots,r_n)}; \frac{1}{m_i}\right)_q << \sum_{\lambda=m_i+1}^{\infty} \lambda^{\sigma-1} E_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p + \frac{1}{m_i^k}\left\{\|f\|_p + \sum_{\lambda=1}^{m_i} \lambda^{\sigma+k-1} E_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p\right\}. \tag{3.13}$$

For $n=1$ the inequality (3.13) implies the inequality 6.4.1. (3) in [4].

For $r_j = 0,\ j \neq i,\ r_i = r, (j = 1,\ldots,n)$ it holds that

$\sigma = r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j$, and from (3.13) it follows

$$\omega_k\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}; \frac{1}{m_i}\right)_q << \sum_{\lambda=m_i+1}^{\infty} \lambda^{r-1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j} E_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p + \tag{3.14}$$

$$+ \frac{1}{m_i^k}\left\{\|f\|_p + \sum_{\lambda=1}^{m_i} \lambda^{r+k-1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{n} l_j} E_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p\right\}.$$

This is the inequality 6.4.3. (8) in [4].

Corollary 3.4. For $p = q$ it holds that $\sigma = \sum_{j=1}^{n} l_j r_j$, and from (3.13) we get

$$\omega_k\left(f^{(r_1,\ldots,r_n)}; \frac{1}{m_i}\right)_p << \sum_{\lambda=m_i+1}^{\infty} \lambda^{\sum_{j=1}^{n} l_j r_j - 1} E_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p + \tag{3.15}$$

$$+ \frac{1}{m_i^k}\left\{\|f\|_p + \sum_{\lambda=1}^{m_i} \lambda^{k-1+\sum_{j=1}^{n} l_j r_j} E_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p\right\}.$$

References

N. A. Ilyssov 1991: *Obratnaya teorema teorii priblizenij* (Russian), Mat. zam. 50, 57-65. [*The Converse Theorem of Theory of Approximation in Various Metrics*].

S. M. Nikol'skij 1977: *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems.* (Russian), (Second edition, revised and supplemented), Nauka, Moscow.

M. K. Potapov 1980: Teoremy vlozeniya v smeshannoy metrike (Russian), Trudy Matematicheskogo institute AN SSSR, tom 156, 143 – 156. [Imbedding theorems in the mixed metric].

A.F.Timan 1960: *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable* (Russian), Gos.Izdat. FM , Moscow.

Miloš Tomić 2000: *On Converse Theorem of Approximation in Various Metrics for Periodic Functions of Several Variables,* Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform. 15, 49-56.

Miloš Tomić 2010: On representation of derivatives of functions in Lp , Matematički vesnik, 62, 3, 235 – 250.

Nebojša K. Elez*
Univerzitet u Istočnom Sarajavu
Filozofski fakultet Pale
Katedra za matematiku i računarstvo Kratko saopštenje

POLINOMI BLISKI POLINOMIMA ČEBIŠEVA

U radu su definisana dva niza polinoma. Date su njihove eksplicitne formule, rekurentne formule, funkcije generatrise, njihova veza sa trigonometrijskim funkcijama, veza sa polinomima Čebiševa i druge osobine.

Neka su $C_n(x)$ i $S_n(x)$ polinomi koji zadovoljavaju uslov

$C_n(x) + iS_n(x) = (x+i)^n$

gdje je i imaginarna jedinica.

Tada važi $C_n(x) - iS_n(x) = (x-i)^n$ i

$C_n(x) = \frac{1}{2}((x+i)^n + (x-i)^n)$

$S_n(x) = \frac{1}{2i}((x+i)^n - (x-i)^n)$

C_n je polinom stepena n , a polinom S_n stepena $n-1$ i važi

$C_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}$

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1}$

tj.

$C_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{4}x^{n-4} - + \cdots$

$S_n(x) = nx^{n-1} - \binom{n}{3}x^{n-3} + \binom{n}{5}x^{n-5} - + \cdots$

Prvih nakoliko članova nizova polinoma $C_n(x)$ su

$C_0(x) = 1$
$C_1(x) = x$
$C_2(x) = x^2 - 1$
$C_3(x) = x^3 - 3x$
$C_4(x) = x^4 - 6x^2 + 1$
$C_5(x) = x^5 - 10x^3 + 5x$
$C_6(x) = x^6 - 15x^4 + 15x^2 - 1$
$C_7(x) = x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 7x$

Prvih nakoliko članova nizova polinoma S_n su

$S_0(x) = 0$
$S_1(x) = 1$
$S_2(x) = 2x$
$S_3(x) = 3x^2 - 1$
$S_4(x) = 4x^3 - 4x$
$S_5(x) = 5x^4 - 10x^2 + 1$

* matematika@filozof.org

$S_6(x) = 6x^5 - 20x^3 + 6x$
$S_7(x) = 7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1$

T e o r e m a 1. *Za* $n \geq 0$ *važi*
$C_n(x)^2 + S_n(x)^2 = (x^2+1)^n$

Specijalno $|C_n(x)| \leq (x^2+1)^{\frac{n}{2}}$ i $|S_n(x)| \leq (x^2+1)^{\frac{n}{2}}$.

Dokaz.

$C_n(x)^2 + S_n(x)^2 = \big(C_n(x) + iS_n(x)\big)\big(C_n(x) - iS_n(x)\big) = (x+i)^n(x-i)^n$
$= (x^2+1)^n$

Adicione trigonometrijske formule imaju svoj analogn za date polinome.

T e o r e m a 2. *Za nizove polinoma* C_n *i* S_n *važe formule:*
$C_{m+n} = C_m C_n - S_m S_n$
$S_{m+n} = S_m C_n + C_m S_n$

Dokaz. Tvrđenja slijede iz identiteta
$C_{m+n}(x) + iS_{m+n}(x) = (x^2+1)^{m+n} = (x^2+1)^m(x^2+1)^n$
$= \big(C_m(x) + iS_m(x)\big)\big(C_n(x) + iS_n(x)\big)$
$= (C_m(x)C_n(x) - S_m(x)S_n(x)) + i(S_m(x)C_n(x) + C_m(x)S_n(x))$

Stavljajući u prethodnim formulama $m = 1$, dobijamo

P o s l e d i c a 3. *Za* $n \geq 0$ *važe rekurentne formule:*
$C_{n+1}(x) = xC_n(x) - S_n(x)$
$S_{n+1}(x) = xS_n(x) + C_n(x)$

T e o r e m a 4. *Polinomi* C_n *i* S_n *određeni su rekurentnim relacijama*

$C_0(x) = 1$ $\qquad$ $S_0(x) = 0$
$C_1(x) = x$ $\qquad$ $S_1(x) = 1$
$C_{n+1}(x) = xC_n(x) - (x^2+1)C_{n-1}(x)$ $\qquad$ $S_{n+1}(x) = xS_n(x) - (x^2+1)S_{n-1}(x)$

Dokaz. Rekurentna formula slijedi iz identiteta
$(x+i)^2 = 2x(x+i) - (x^2+1)$
$(x+i)^{n+1} = 2x(x+i)^n - (x^2+1)(x+i)^{n-1}$
$C_{n+1}(x) + iS_{n+1}(x) = 2x\big(C_n(x) + iS_n(x)\big) - (x^2+1)\big(C_{n-1}(x) + iS_{n-1}(x)\big)$

T e o r e m a 5. *Funkcije generatrise za polinome* C_n *i* S_n *su sledeće*
$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)t^n = \frac{1-xt}{(1-xt)^2+t^2}$
$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)t^n = \frac{t}{(1-xt)^2+t^2}$

Dokaz. Za $|t| < 1$ imamo
$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)t^n + i\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(C_n(x) + iS_n(x))t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x+i)^n t^n$
$= \frac{1}{1-(x+i)t} = \frac{1-xt}{(1-xt)^2+t^2} + i\frac{t}{(1-xt)^2+t^2}$

Koristeći trigonometrijske funkcije, polinomi C_n i S_n se mogu definisati na sledeći način.

T e o r e m a 6. *Za* $n \geq 0$ *važi:*

$$S_n(\cot x) = \frac{\sin nx}{(\sin x)^n}$$

$$C_n(\cot x) = \frac{\cos nx}{(\sin x)^n}$$

Dokaz.

$$C_n(\cot x) + iS_n(\cot x) = (\cot x + i)^n = \frac{(\cos x + i \sin x)^n}{(\sin x)^n} = \frac{\cos nx}{(\sin x)^n} + i\frac{\sin nx}{(\sin x)^n}.$$

Prethodna i sledeća teorema pokazuje bliskost između polinoma Čebiševa prve i druge vrste T_n i U_n i polinoma C_n i S_n.

T e o r e m a 7. . *Za* $n \geq 0$ *važi:*

$$C_n(x) = (x^2+1)^{\frac{n}{2}} T_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$S_n(x) = (x^2+1)^{\frac{n}{2}} U_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$T_n(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} C_n\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$U_n(x) = (x^2+1)^{\frac{n}{2}} S_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Dokaz. Neka je $x = \cot u$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Tada je

$\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\sin u = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Koristeći prethodnu teoremu imamo

$$C_n(x) = C_n(\cot u) = \frac{\cos nu}{(\sin u)^n} = \left(\frac{1}{\sin u}\right)^n T_n(\cos u) = (x^2+1)^{\frac{n}{2}} T_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Druga formula se analogno dokazuje. Stavljajući

$x = \cos v$, $v \in (0, \pi)$, imamo

$$T_n(x) = T_n(\cos v) = \cos nv = (\sin v)^n C_n(\cot v) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}} C_n\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

T e o r e m a 8. *Polinomi* C_n *i* S_n *imaju jednostruke realne nule i važi:*

$$C_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x - \cot\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

$$S_n(x) = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - \cot\frac{k}{n}\pi\right)$$

Dokaz. Za $k = 1,2,\dots,n$ je

$$C_n\left(\cot\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \frac{\cos n\frac{2k-1}{2n}\pi}{\left(\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^n} = \frac{\cos\frac{2k-1}{2}\pi}{(\sin u)^n} = 0$$

Za $k = 1,2,\dots,n-1$; $S_n\left(\cot\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{\sin n\frac{k}{n}\pi}{\left(\sin\frac{k}{n}\pi\right)^n} = \frac{\sin k\pi}{(\sin u)^n} = 0$

Literatura

Philips 2003: G.M. Philips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer-Verlag New York. Inc

Секција за алгебру, геометрију и дискретну математику

Rade T. Živaljević*
Dušan R. Živaljević
Mathematical Institute of the
Serbian Academy of Sciences and Arts

Originalni naučni rad

ICOSAHEDRON AND A PAPER DRAGON

Introduction

Make a triangulated tape („paper dragon“) following the pattern depicted in Figure 1. Start bending the tape simultaneously at each edge connecting two adjacent triangles.

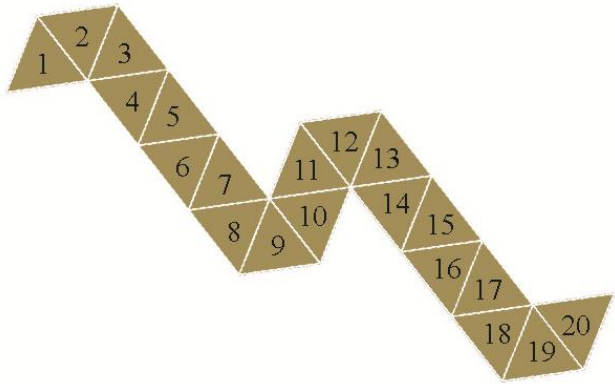


Figure 1.

More precisely, choose an angle a between 0 and 180 degrees and fold the tape along the edge connecting triangles 1 and 2 so that the associated dihedral angle is equal to a. Continue this process by folding the tape along the common edge of triangles 2 and 3 so that the dihedral angle determined by triangles 2 and 3 is equal to a, etc. It is assumed that folding is always on the same side i.e. that the edge forms a ridge from the reader's point of view. We stop when each of the 19 dihedral angles between adjacent triangles is equal to a.

Definition 1. The geometric shape (figure) obtained by the process of folding the triangulated tape depicted in Figure 1 along each of the edges connecting the consecutive triangles for a given angle a is denoted by D[a] and referred to as *a-paper dragon* or *a-dragon* for short.

The p-dragon $D[180^o] = D[p]$ is by construction (Definition 1) precisely the „paper dragon“ depicted in Figure 1. The 0-dragon D[0], arising as the

* rade@mi.sanu.ac.rs

opposite boundary case when a=0, is the case when the tape folds down to a triangle.

Question 1: What happens with the triangulated tape when the dihedral angle a is in between these two extremal cases!?

Problem 1. The general problem we study in this paper is the mathematical structure of objects D[a]. For this reason we allow self-intersections, i.e. the triangles freely move during the bending process uninterrupted by other triangles. We want to understand what are the most interesting shapes among the objects D[a] and how are they changing when the dihedral angle a is slowly decreasing from 180° to 0°. We want to determine how different objects D[a] are related to each other by tracking the numbering of the triangles during the different phases of the bending process.

Animation of the folding process

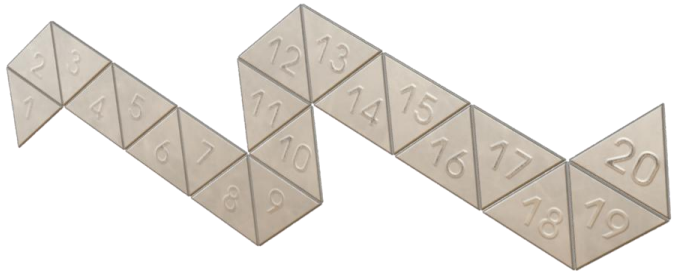


Figure 2: D[a] for a = 180°

We strongly recommend the reader to visit the address http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/, alternatively the addresses http://vimeo.com/35377694 or http://www.youtube.com/watch?v=IGmjTyAQccQ where an animation showing the metamorphosis of the object D[a] when a goes from 180° to 0°, can be found. For the reader who does not have these videos at hand we reproduce in the pages that follow some of the most interesting images from this animation. Figure 2 essentially reproduces the original triangulated tape, that is the object D[p]. The next image (Figure 3) depics the object $D[a_1]$ where $a_1 = 150.05^o$. This is the first moment when the triangulated tape makes a closed form (the paper dragon bites his tail).

Question 2: Determine the exact value of the angle a_1. Can it be a rational multiple of p !? How do we know that triangles 1 and 20 perfectly fit together!?

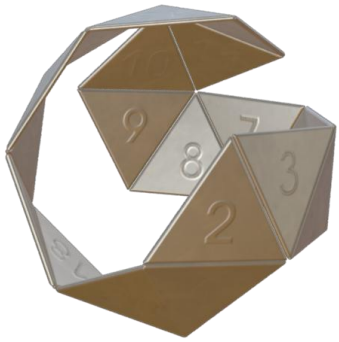


Figure 3: D[a] for a = 150.05°

The next, and the one of the most interesting phases in the bending process is when the dihedral angle reaches the value $a_2 = 138.19^o$ (Figure 4). The triangulated tape has formed an *icosahedron* with all 20 triangles in the role of faces. This is not really a surprise since the shape of the „paper dragon" depicted in Figure 1 was carefully chosen precisely to achieve this goal. For this purpose we used a

Figure 4: D[a] for a = 138.19°

Hamilton cycle of the graph of edges and vertices of the dodecahedron which is dual to the icosahedron depicted in Figure 4 (see the following section for the details). However, the bending process is continued. There is no apparent reason why there should be any regular or semi-regular form emerging from the cacophony of moving triangles for any of the subsequent dihedral angles. Nevertheless, for $a_3 = 109.47^o$ and $a_4 = 70.53^o$ two new regular forms suddenly emerge, the octahedron and the tetrahedron, Figure 4. Even greater surprise awaits when the dihedral angle reaches the value $a_5 = 41.81^o$. A wonderful shape emerges, Figure 5.

Figure 4: The cases $a_3 = 109.47^o$ and $a_4 = 70.53^o$

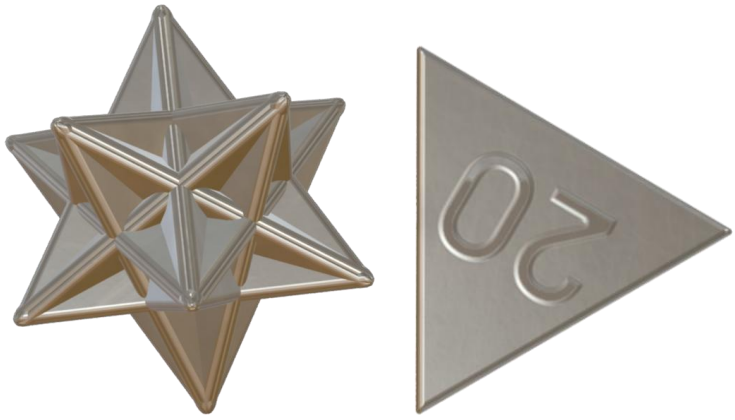


Figure 5: The cases $a_5 = 41.81^o$ and $a_6 = 0^o$

This is the so called *great icosahedron*, one of four Kepler-Poinsot polyhedra (nonconvex regular polyhedra), http://en.wikipedia.org/wiki/Great_icosahedron. It can be also described as one of *icosahedron stellations.* After passing through the great icosahedron stage there are no more surprises. The paper dragon curls into a triangular form (and „falls asleep“).

The origin of the paper dragon

As already mentioned in the previous section, the shape of the paper dragon depicted in Figure 1 was carefully chosen. We want to guarantee in advance that an icosahedron must appear as one of the shapes D[a] for an appropriate angle a. This is achieved by designing a path on the icosahedron that visits each face exactly once and returns to the beginning position (a closed Hamiltonian path). Figure 6 (A) is a accurate representation of mutual positions of faces of an icosahedron

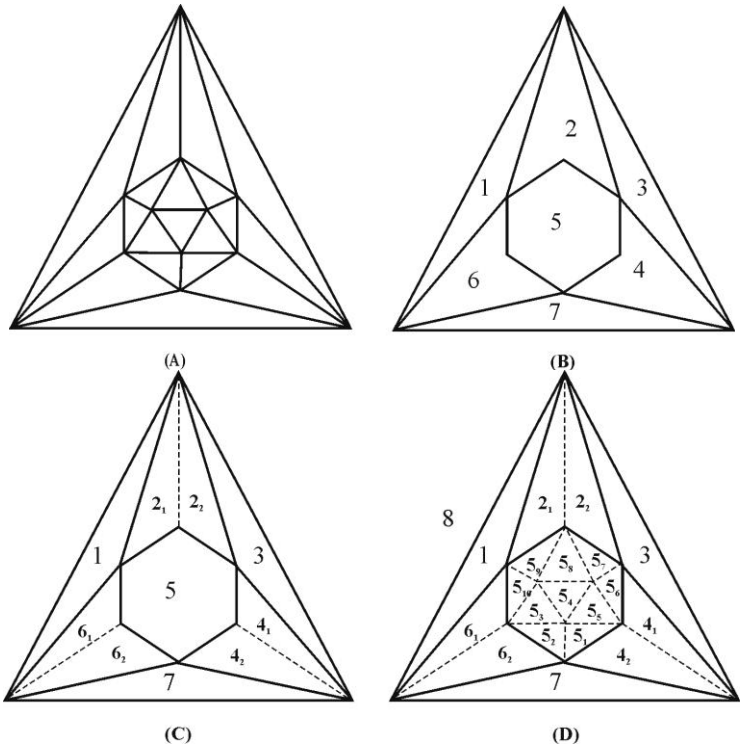


Figure 6: Hamiltonian path on the icosahedron

(Schlegel diagram) so the problem of designing such a path can be informally rephrased as follows. Suppose that Figure 6 (A) represents a plan of a castle which has 19 triangular rooms. Assume that there is a door at each wall; in particular one can go from each of the rooms to any of the adjacent rooms. Also one can enter the castle through the gates leading to rooms labeled by 1, 3 and 7. In order to describe (or memorize) a closed path visiting each room exactly once, we separate the rooms into 7 apartments (Figure 6 (B)) and design a closed path visiting each of these apartments exactly once. After that it is not difficult to see how this path can be refined to an actual path visiting each of the 19 rooms (Figure 6 (D)). Observe that when we enter a room, say we move from room 4 to the room labeled by 5_1 (Figure (6) (D)) then there are two possibilities how to continue. We can either move to the left (in our example to the room 5_2) or to the right (to the room labeled by 5_5). Consequently, the word recording the left-right movements of the path (assuming 1 is the initial position) is the following

L L L R L R L R R R L L L R L R L R R

Interchanging the letters L and D we obtain another word describing a Hamiltonian path on the icosahedron and this is precisely the code used to design the paper dragon depicted in Figure 1 (see Figure 7).

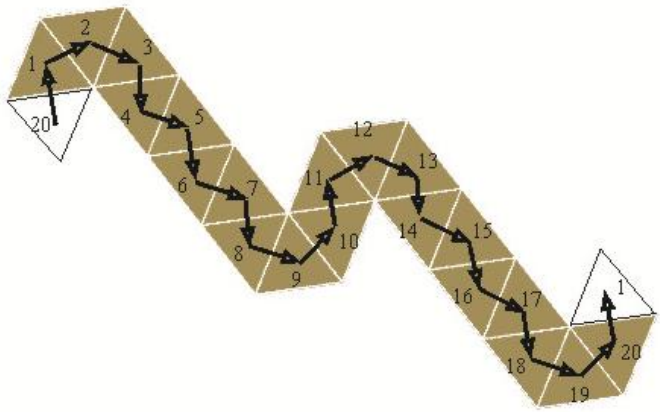


Figure 7: RRRLRLRLLLRRRLRLRLL

Motivation and further research

The animation used in this experiment was one of the videos created within the project „Živa matematika“ (Math Alive), a project for popularizing mathematics sponsored by the Belgrade *Center for the Promotion of Science.* For more details about this project see http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/. The sole designer of all animations was the second author while the general idea and the overall mathematical expertise were provided by the first author. The original motivation was to produce an attractive animation with rich mathematical content. However, it turned out to be a potentially interesting project in itself connecting problems of discrete and computational geometry with mathematical applications in biology and chemistry.

The references [1] and [2] address questions about regular polyhedra which are potentially amenable to the experimental approach utilized in our paper. The reference [3] illustrates the relevance of the question of studying combinatorial geometric blueprints based on Hamiltonian paths for the morphogenesis of icosahedra in viral capsides and related structures.

Bibliography

Fuchs, Fuchs 2007: D. Fuchs, E. Fuchs, Closed geodesic on regular polyhedra, *Moscow Mathematical Journal*, Vol. 7, Number 2, April-June, 265–279.

O’Rourke 2010: J. O’Rourke, *Flat Zipper-Unfolding Pairs for Platonic Solids*, preprint, October 13.

Rudnick, Bruinsma 2005: J. Rudnick, R. Bruinsma, Icosahedral Packing of RNA Viral Genomes, *Physical Review Letters*, PRL 94, 038101.

Milan R. Janjić*
University of Banja Luka
Faculty of Sciences
Department of Mathematics and Informatics

Originalni naučni rad

GENERALIZED COMPOSITIONS OF NATURAL NUMBERS

1. *Introduction*

Let $b = (b_1,b_2,\ldots)$ be a sequence of nonnegative integers. Compositions of n in which there are b_1 different type of 1's, b_2 different type of 2's, and so on, will be called the colored compositions of n. We let c(n, $\boldsymbol{b}$) denote its number. If all b_i equal 1, then the standard compositions are obtained. It is clear that the following recursion for c(n, b) holds

$$c(n,b)=b_1\,c(n-1,b)+b_2\,c(n-2,b)+\cdots+b_{n-1}\,c(1,b)+b_n,$$

having b_1 colored compositions ending by one of 1's, b_2 colored compositions ending by one of 2's, and so on. At the end, there are b_n generalized compositions consisting of one of n's.

We define the sequence $a = (a_1,a_2,\ldots)$ such that

$$a_1=1, a_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} b_{n+1-i}\,a_i\,. \tag{1}$$

It is clear that $a_{n+1}=c(n,b),(n=1,2,\ldots)$.

Equation (1) connects two sequences of nonnegative integers a and b. Obviously, for each sequence b we may form the sequence a. Conversely is not true. Namely, equation (1) may be regarded as a recurrence relation with respect to b's, but it does not ultimately produces nonnegative integers.

The paper is organized as follows. In this section we find a simple connection of colored compositions with Catalan numbers.

In Section 2 we consider the case when the b's make an arithmetical progression. We shall prove that then the numbers $c(n, b)$ satisfy a three terms homogenous recursion with constant coefficients. This means that a close formula for colored compositions may be obtained. In a particular case the number of colored compositions is a Pell-Lucas number.

In Section 3 we consider the case when b_i is a square function of i. Then the numbers c(n, b) satisfy a four terms homogenous recursion with constant coefficients. Thus, in this case also, we may derive an explicit formula for colored compositions. Several results will be obtained in the case when the b's are triangular numbers. Then the a's are sums of binomial coefficients. Some identities, concerning sums of binomial coefficients, will be derived by the the use of Zeilberger's algorithm, which is described by Petkovsek and all. [3].

* agnus@blic.net

In Section 4 we investigate the case when b_i is an exponential function of i. In Section 5 two result concerning the floor and the ceil functions will be proved.

We shall see, in Section 6, that the colored compositions are closely related with Fibonacci numbers, as is the case with the standard compositions. Several recurrence relations as well as some closed formulas for coloredcompositions will be proved. New relationships of Fibonacci numbers with Pell, Jacobsthal and other classes of numbers are derived.

Note that there is a significant number of sequences in Sloane's encyclopedia OIES, [4], which terms equal the number of generalized compositions. Comment of these sequences in OEIS offer other interpretations of colored compositions. Sequence A145839 connects colored compositions with the so called matrix compositions. Also A020729, A008776, A020698, A007484 connect colored compositions with Pisot sequences.

The next result shows that the Catalan numbers are the case when b's produce b's again.

Proposition 1. If $b = (C_0, C_1, \ldots)$, where C_i, (i=0,1,…) are Catalan numbers, then

$$c(n, b) = C_n, \ (n=1,2,\ldots).$$

Proof. In this case equation (1) has the form:

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} C_{n-i}\, a_i = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-i-1}\, a_{i+1}.$$

The equation $a_{n+1} = C_n$ follows by induction, using the well-known Segner's recurrence formula for Catalan numbers.

2. *Arithmetic Progressions*

In this section we consider the case when b_i is a linear function of i, that is, when the b's make an arithmetic progression. We shall prove that then the numbers of colored compositions satisfy a three terms recursion with constant coefficients, so that, there is an explicit formula for the number of compositions.

Proposition 2. Let n be a positive integer, let m, k be nonnegative integers, and let $b_i = (i-1)+k$, (i=1,2,…). Then

$$c(1,b)=k,\ c(2,b)=m+k+k^2\ ,$$
$$c(n+1,b)=(k+2)\,c(n,b)+(m-k-1)c(n-1,b).$$

Proof. Equation (1) takes the form: $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} [m(n-i)+k]a_i$. It is easy to see that $a_2 = k$,

$a_3=m+k+k^2$. Furthermore, for n>2 we have

$$a_{n+1} = ka_n + (m+k)a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} [m(n-1-i)+k]a_i + m\sum_{i=1}^{n-2} a_i .$$

We conclude that

$$a_{n+1} = (k+1)a_n + ma_{n-1} + m\sum_{i=1}^{n-2} a_i .$$

Replacing n by $n+1$ yields

$$a_{n+2} = (k+1)a_{n+1} + ma_n + m\sum_{i=1}^{n-1} a_i .$$

Subtracting the last two equation we obtain

$$a_{n+2} = (k+2)a_{n+1} + (m-k-1)a_n .$$

In the next corollary we give some particular cases which show that some well-known integer sequences count the number of colored compositions.

Corollary 1.

(i) If $m = 1, k = 0$ then $c(1, b) = 0, c(n, b) = 2^{n-2}, (n>1)$.

(ii) If $m = 2, k = 0$ then $c(n,b) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2i} 2^i$. (Pell - Lucas numbers)

(iii) If $m = 1, k=1$ then $c(n, b) = F_{2n}$. (Fibonacci numbers with even indices)

(iv) If $k = m-1$ then $c(1, b) = m-1, c(n, b)=m^2 (m+1)^{n-2}, (n>1)$.

Proof. (i) is obvious.

In the case (ii) the recurrence equation takes the form $c(1, b)=0, c(2, b)=2$,

$c(n+1,b) = 2c(n, b)+c(n-1,b)$,

which is the recurrence for Pell-Lucas numbers.

In the case (iii) the recurrence relation becomes $c(1, b) = 1, c(2, b)= 3$,

$c(n+1, b) = 3c(n, b)-c(n-1,b)$.

This is the recurrence equation for Fibonacci numbers with even indices by Identity 7 from [1].

Finally, for $k = m-1$ we have $c(1, b) = m-1, c(2, b) = m\text{^}2$,

$c(n+1,b) = (m+1)c(n, b)$,$(n>2)$,

and (iv) is true.

3. *Square functions*

In the case, b_i is a square function of *i*. We now obtain the four terms recurrence relation for c(n, b). This means that, in this case, we may also obtain a closed formula for generalized compositions.

Proposition 3. Let *n* be a positive integer, and let *k, m,p* be arbitrary (rational) numbers such that $b_i=ki^2+mi+p$, *(i=1,2, ...)* are nonnegative integers. Then

$c(1,b) = k+m+p$, $c(2,b) = k^2+m^2+p^2+2(km+mp+kp)+4k+2m+p$,

$c(3,b) = 8k+3m+p+2(4k^2+2m^2+p^2+6km+5kp+3mp)+k^3+m^3+p^3+3(km^2+kp^2+mp^2+2kmp)$,

$c(n+1, b) = (k+m+p+3)c(n, b)+(k-m-2p-3)c(n-1, b)+(p+1)c(n-2, b)$, $(n\geq 3)$.

Proof. We have $a_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}[k(n-i+1)+m(n-i+1)+p]a_i$. It is easy to obtain the value a_2, a_3 and a_4.

For $n>3$ we have

$$a_{n+1}=(k+p+m)a_n+\sum_{i=1}^{n-1}[k(n-i+1)^2+m(n-i+1)+p]a_i.$$ It follows that

$$a_{n+1}=(k+m+p+1)a_n+(3k+m)a_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}[k(2n-2i+1)+m]a_i.$$

Replacing *n* by *n+1* we obtain

$$a_{n+2}=(k+m+p+1)a_{n+1}+\sum_{i=1}^{n-1}[k(2n-2i+1)+m]a_i+2k\sum_{i=1}^{n-1}a_i.$$

By subtraction we obtain

$$a_{n+2}=(k+m+p+2)a_{n+1}+(2k-p-1)a_n+2k\sum_{i=1}^{n-1}a_i.$$

Replacing n by n+1 in this equation yields

$$a_{n+3}=(k+m+p+2)a_{n+2}+(2k-p-1)a_{n+1}+2k\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

It follows that $a_{n+3} = (k+m+p+3)a_{n+2} + (k-m-2p-3)a_{n+1} + (p+1)a_n$..

In the next corollary we give two particular cases.

Corollary 2. (i) If *k = 1, m = 0, p = -1* then *c(1, b) = 0, c(2,b) = 3,* $c(n,b)=8\cdot 3^{n-3}$ $(n\geq 3)$.

(ii) If *k = 1, m = 1, p= -1* then *c(1,b) = 1, c(2, b) = 6,c(3,b)=22,*

$$c(n,b)=\frac{9-5\sqrt{5}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\frac{9+5\sqrt{5}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Proof. The assertion (i) is true since, in this case, the recurrence equation becomes

$$c(n+1,b)=3\cdot c(n,b),\ (n\geq 2).$$

In the case (ii) the recurrence takes the form:

$$c(n+1,b)=4\cdot c(n,b)-c(n-1,b),\ (n\geq 3).$$

Solving the characteristic equation of this three terms recurrence equation we conclude that the assertion is true.

Since $\binom{n}{2}$ is a square function of *n* we may derive from the preceding proposition some formulas which connect triangular numbers with generalized compositions.

Corollary 3. (i) If $b_i=\binom{i-2}{2},(i=1,2,\ldots)$ then *c(1,b) = 1, c(2,b) =1, c(3,b) =1,*

c(n+1,b)=4c(n, b)-6c(n-1,b)+4c(n-2,), (n=3,4,…).

Explicitly,

$$c(n,b)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{4n-4i}.$$

(ii) If $b_i=\binom{i-1}{2},(i=1,2,\ldots),$ then *c(1,b) = 0, c(2, b) = 0, c(3,b) = 1,*

c(n+1, b) = 3c(n, b)-3c(n-1,b)+2c(n-2,b), (n=3,4,…).

(iii) If $b_i=\binom{i}{2},(i=1,2,\ldots),$ then *c(1,b) = 0, c(2, b) = 1, c(3,b) = 3,*

c(n+1,b)=3c(n, b)-2c(n-1,b)+c(n-2,b), (n=3,4,…).

Explicitly,

$$c(n,b)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{3i+2}.$$

(iv) If $b_i=\binom{i+1}{2},i=1,2,\ldots,$ *then c(1,b) = 1, c(2, b) = 4, c(3,b) = 13,*

c(n+1,b)=4c(n, b)-3c(n-1,b)+c(n-2,b), (n=3,4,…).

Explicitly,

$$c(n,b)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+2i-1}{n-i}.$$

Proof. The assertion (i) is obtained for $k=\frac{1}{2},m=-\frac{5}{2},.p=3$, (ii) for $k=\frac{1}{2},m=-\frac{3}{2},.p=1$,

(iii) for $k=\frac{1}{2},m=-\frac{1}{2},.p=0$, (iv) for $k=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2},.p=1$. The explicit formulas are obtained by the use of Zeilberger's algorithm, [3].

Remark 1. In the case $b_i=\binom{i+2}{2},i=1,2,\ldots,$ A145839 which counts the number of 3-compositions of *n*. This connects the colored compositions with the so called matrix compositions.

4. *Exponential functions*

The following result concerns the case when b_i is an exponential functions of *i*. Then, again, the numbers *c(n, b)* satisfy a three terms homogeneous recurrence relation with constant coefficients.

Proposition 4. Let *n* be a positive integer. If $b_i = k+pm^{i-1}$, *(i=1,2,...)*, then *c(1,b)=k+p, c(2,b) = k+pm+(k+p)*^{2}*, c(n, b) = (k+m+p+1)c(n-1,b)-(km+m+p)c(n-2),(n=3,4,...).*

Proof. Equation (1) has the form: $a_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}(k+pm^{n-i})\,a_i$. It follows that

$a_2 = k+p$, $a_3 = k+pm+(k+p)^2$.

Further we have $a_{n+1}=(k+p)a_n+\sum_{i=1}^{n-1}(k+pm^{n-i})\,a_i=(k+p)a_n+k\sum_{i=1}^{n-1}a_i+p\sum_{i=1}^{n-1}m^{n-i}a_i$. He nce,

$$a_{n+1}=(k+p)a_n+(k+p)a_{n-1}+k\sum_{i=1}^{n-2}a_i+pm\sum_{i=1}^{n-2}m^{n-1-i}a_i+p(m-1)a_{n-1},$$

that is, $a_{n+1}=(k+p+1)a_n+p(m-1)a_{n-1}+p(m-1)\sum_{i=1}^{n-2}m^{n-1-i}a_i$.

Replacing *n* by *n+1* we obtain

$$a_{n+2} = (k+p+1)a_{n+1} + p(m-1)a_n + pm(m-1)\sum_{i=1}^{n-1} m^{n-i-1}a_i .$$

Subtracting two last equation yields

$a_{n+2} = (k+p+m+1)\, a_{n+1} - (p+m+mk)\, a_n$.

Some particular cases of the preceding theorem follow.

Corollary 4. (i) If $k = 0$ then $c(n, b) = p(m+p)^{n-1}$.

(ii) If $k = 1, m = 2, p = 1$ then $c(1,b), c(2,b) = 7, c(n, b) = 5c(n-1, b)-5c(n-2,b), (n=3,3,\ldots)$.

(iii) If $k = -1, m = 2, p = 1$ then $c(n, b) = F_{2n-2}$.

Proof. (i) In the case $k = 0$ we have: $c(1,b) = p, c(2,b) = p(m+p)$,

$c(n, b) = (m+p+1)c(n-1,b)-(m+p)c(n-1,b), (n=3,4,\ldots)$.

The roots of the characteristic equation are $\alpha = 1, \beta = m+p$. Solving the system

$c_1 \alpha + c_2 \beta = p,\ c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2 = p(m+p)$, yields $c_1=0,\ c_2 = p/(m+p)$, and the assertion (i) is true.

In the case (ii) we have $c(1,b) = 2, c(2,) = 7, c(n, b)=5c(n-1,b)-5c(n-2,b), (n=3,4,\ldots)$.

Finally, in the case (iii) we have $c(1,b) = 0, c(2,b) = 1, c(n, b)=3c(n-1,b)-c(n-2,b), (n=3,4,\ldots)$.

The assertion now follows from Identity 7 in [1].

5. *Floor and Ceil functions*

Proposition 5. Let n be a positive integer, and $b_i = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, (i = 1,2,\ldots)$.

Then

$c(1,b) = 0, c(2,b) = 1, c(3,b) = 1,\ c(n, b) = c(n-1,b) + 2c(n-2,b) - c(n-3,b), (n>3)$.

Proof. It is easy to see that $a_2 = 0, a_3 = a_4 = 1$. For $n>3$ we have

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1}\left\lceil \frac{n-i+1}{2} \right\rceil a_i = a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2}\left\lceil \frac{n-i+1}{2} \right\rceil a_i = a_n + a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2}\left(\left\lceil \frac{n-i+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n-1+i+1}{2} \right\rceil\right) a_i .$$

It follows that $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1^{n-i+1}+1)}{2} a_i$.

Replacing *n* by *n+1* we obtain

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1^{n-i+1}+1)}{2} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i .$$

It follows that $a_{n+2} = 2a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. Replacing n by $n+1$ we have $a_{n+2} = 2a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Subtracting the last two equations yields

$a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$.

In a similar way the following result for the ceil function may be proved.

We let $cf\left(\frac{p}{q}\right)$ denote the ceil function of $\frac{p}{q}$.

Proposition 6. Let n be a positive integer, and $b_i = cf\left(\frac{i}{2}\right), (i = 1,2,\ldots)$. Then $c(1,b) = 1$, $c(2,b) = 2$, $c(3,b) = 5$, $c(n, b) = 2\,c(n-1,b) + c(n-2,b) - c(n-3,b)$, $(n>3)$.

6. *Fibonacci numbers*

In this section we prove several formulas in which the number of colored compositions is related with Fibonacci numbers. Our first result extends the result from [2], where compositions with two different types of 1 are considered.

Proposition 7. Let n be a positive integer, let p,q be a nonnegative integers, and let $b = (p,q,q,\ldots)$.

Then $c(1, b) = p$, $c(2, b) = p^2+q$, $c(n, b) = (1+p)c(n-1, b)+(q-p)c(n-2, b)$, $(n>2)$.

Explicitly, $c(n, b) = u\,\alpha^n + v\beta^n$, where $\alpha = \frac{1 + p + \sqrt{(p-1)^2 + 4q}}{2}$,

$$\beta = \frac{1 + p - \sqrt{(p-1)^2 + 4q}}{2},$$

$$u = \frac{4q - (p-1)^2 + (p-1)\sqrt{(p-1)^2 + 4q}}{2\sqrt{(p-1)^2 + 4q}},$$

$$v = \frac{4q + (p-1)^2 - (p-1)\sqrt{(p-1)^2 + 4q}}{2\sqrt{(p-1)^2 + 4q}}.$$

Proof. In this case equation (1) has the form: $a_{n+1} = pa_n + q\sum_{i=1}^{n-1} a_i$. We easily obtain that

$a_2 = p$, $a_3 = p^2 + q$. Next we have $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1} - pa_{n-1} + q\sum_{i=1}^{n-2} a_i$,

that is,

$a_{n+1} = (1+p)a_n + (q-p)a_{n-1}$.

The characteristic equation for this recurrence is $x^2 - (p+1)x - q + p = 0$. Solving this equation we obtain the explicit formula.

In the following corollary we shall state some particular cases of this theorem. The first is the well-known formula for the number of all standard compositions. In all stated results the number of colored compositions is a Fibonacci number.

Corollary (i) If $b = (0,1,\ldots)$ then $c(n, b) = F_n$. This is the well-known result that says that there are

F_n compositions of n in which each part is greater than 2.

(ii) If $b = (2,1,.1,\ldots.)$ then $c(n, b) = F_{2n+1}$. This is the result from \cite{eme}.

(iii) If $b = (3,4,4,\ldots)$ then $c(n, b) = F_{3n+1}$.

Proof. (i) In this case we have p = 0, q = 1. It follows that

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ u = \frac{5-\sqrt{10}}{10},\ v = \frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

and the assertion follows from Binet formula.

(ii). In this case we have $p = 2$, $q = 1$ and the recurrence relation has the form

$a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, $(n=3,4,\ldots)$.

The assertion follows by induction using Identity 17 from \cite{bk}.

(iii). The recurrence equation in this case has the form $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$. It is easy to prove that for Fibonacci numbers the following identity holds $F_{k+2} = 4F_{k-1} + F_{k-4}$. Using induction and this identity we conclude that the assertion holds.

The next result also generalizes a classical result for standard compositions.

Proposition 8. If $b = (p,1,0,0,\ldots)$ where m is a positive integer then

$$c(n,b) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-i}{i} p^{n-2i}.$$

Proof. The recurrence relation for Fibonacci polynomials is $F_{n+1}(x) = xF_n(x)+F_{n-1}(x)$. It follows that, for a positive integer p we have $F_{n+1}(p) = c(n, b)$. The required equation follows from the well-known formula for Fibonacci polynomials.

As an immediate consequence we obtain the following well-known result.

Corollary. The number of compositions of n in which each part is either 1 or 2 is F_{n+1}.

Proof. Take $p = 1$ in the preceding proposition and apply Identity 4 in \cite{bk}.

The following result also extends a well-known result for standard compositions.

Proposition 9. Let n be a positive integer, let p, q be nonnegative integers, and let $b = (p,q,p,q,\ldots)$.

Then $c(1,b) = p$, $c(2,b) = p^2+q$, $c(n, b)=pc(n-1,b)+(1+q)c(n-2,)$, $(n>2)$.

Proof. In this case we first have $a_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n} b_{2n-i+1}a_i$. Hence

$$a_{2m+1} = q(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + p(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) = pa_{2m} + (1+q)a_{2m-1},$$

and the assertion is true for even n.

Also, $a_{2n} = \sum_{i=1}^{2n-1} b_{2n-i}a_i$, that is,

$$a_{2m} = p(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + q(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2}) = pa_{2m-1} + (1+q)a_{2m-2}$$

.

Hence, the assertion is also true for odd n.

Corollary. Let n be a positive integer, and let b = (1,0,1,0,…). Then c(n, b) = F_n.

In other word, F_n is the number of compositions of n in which all parts are odd.

Proof. Since p = 1, q = 0 the assertion of the preceding theorem becomes recurrence relation for Fibonacci numbers.

In the last result the Fibonacci numbers play the role of the b's.

We prove that there are a closed formula for $c(n, b)$ in the case when $b_i = F_{m+k(i-1)}$ $(i=1,2,\ldots n)$, where $m \geq -1, k \geq 0$ are arbitrary integers. For this we need the following identities for Fibonacci numbers.

Identity 1. Let $m \geq -1, k \geq 0$ be integers. Then $F_{m+2k}+F_{m-2k} = F_m(F_{2k-1}+F_{2k+1})$.

Proof. The assertion is obviously true for $m = 0$. Since $F_{-(2k-1)} = F_{2k-1}$ it is also true for $m = 1$ and $m = -1$. Assume that it is true for m_1 such that $0 \leq m_1 < m$. Then, for $m. \geq 2$ we have

$F_{m+2k} + F_{m-2k} = F_{m-1+2k} + F_{m-1-2k} + F_{m-2+2k} + F_{m-2-2k}$.

Using the induction hypothesis yields

$F_{m+2k} + F_{m-2k} = (F_{m-1} + F_{m-2})(F_{2k-1}+ F_{2k+1}) = F_m (F_{2k-1}+ F_{2k+1})$.

In a similar way we may prove

Identity 2. Let $m \geq -1, k \geq 0$ be integers. Then

$F_{m+2k-1}+F_{m-2k+1} = F_m(F_{2k-2}+F_{2k})$.

Proposition 10. Let $m \geq -1$ be an integer, let k be a nonnegative integer, and let $b_i = F_{m+k(i-1)}$ $(i=1,2,\ldots n)$. Then, $c(1, b) = F_m$, $c(2, b) = F_{m+k} + F_m^2$,

$c(n+1,b) = (F_m + F_{k-1} + F_{k+1})\, c(n, b) + (-1)^{k-1}(F_{m-k} + 1)c(n-1, b)$, $(n>1)$.

Proof. We have $a_1 = 1, a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} F_{m+k(n-i)} a_i$. For $n = 1,2$ we easily obtain $a_2 = F_m$, $a_3 = F_{m+k} + F_m^2$ Assume that k is even and denote $k = 2p$. Then for $n>2$ we obtain $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} F_{m+2p(n-i)} a_i$. Applying Identity 1 yields

$$(F_{2p-1} + F_{2p+1})a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} F_{m+2p(n+1-i)} a_i + \sum_{i=1}^{n} F_{m+2p(n-1-i)} a_i = a_{n+2} - F_m\, a_{n+1} + a_n + F_{m-2k}\, a_n,$$

and the assertion holds

The proof in the case that k is odd follows similarly from Identity 2.

Remark. We state sequences in OIES which are generated by the results of this paper

A000079, A000129, A000244, A000302, A000351, A000400, A000420, A001018, A001019, A001020, A001021, A001022, A001023, A001024, A001025, A001026, A001027, A001029, A006053, A006054, A009964, A009965, A009966, A009967, A009968, A009969, A009970, A009971, A009972, A009973, A009974, A009975, A009976, A009977, A009978, A009979, A009980, A009981, A009982, A009983, A009984, A001045, A001076, A001333, A001353, A001519, A001653, A001906,

A002001, A002533, A002535, A003665, A003699, A003946, A004253, A005053, A005054, A006190, A007051, A007052, A007484, A008776, A011557, A013708, A013730, A018902, A018903, A018904, A020698, A020729, A024495, A026150, A028859, A030186, A033887, A034999, A038503, A046717, A052530, A052542, A052913, A052918, A052924, A052934, A052936, A052945, A054413, A054854, A055270, A055275, A055841, A055842, A055846, A055847, A055995, A055996, A056002, A056116, A067403, A067411, A078469, A081294, A083098, A083100, A083101, A083217, A084057, A090019, A090042, A093141, A095263, A100237, A103333, A104934, A105476, A109808, A118264, A120612, A122117, A122558, A125816, A125818, A133343, A133345, A133356, A147518, A147722, A158869,

Literature

Benjamin, Quinn2003: A. T. Benjamin and J. J. Quinn, *Proofs that Really Count*, MAA.

Deutsch 2006: E. Deutsch, Advanced exercise H-641, *Fibonacci Quart, (44), 188.*

Petkovsek, Wilf, Zeilberger 1996: M. Petkovsek, H. S. Wilf and D. Zeilberger, *A=B*, Peters.

Sloane: N. J. A. Sloane, Online Encyclopedia of Integer Sequences, <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.

Dušan S. Jokanović*
University of East Sarajevo
Production and Management Faculty Trebinje Originalni naučni rad

RICKART RINGS WITH INVOLUTION

1. *Preliminaries*

All rings considered in this paper are associative. A * - ring or a ring *with involution* R is a ring with unary operation $x \to x^*$ such that $(x^*)^* = x, (x+y)^* = x^* + y^*, (xy)^* = y^* x^*$, for all x, y in R. An element $e \in R$ is called a *projection* if it is self adjoint ($e^* = e$), and idempotent ($e^2 = e$). We write $\widetilde{R}$ for the set of all projections in R. If S is any subset of R we write $\widetilde{S} = S \cap \widetilde{R}$. For projections e, f we write $e \leq f$ in case $e = ef$ and see that relation $\leq$ is partial ordering on a set of projections. In general, extra conditions on R are needed to make $\widetilde{R}$ a lattice. ([1]) A drastic condition that works is commutativity. Projections e, f in R are *equivalent*, written $e \approx f$ if there exists $w \in R$ such that $w^* w = e,\ ww^* = f$. It is well known that this relation is equivalence relation. An element $w \in R$ such that $ww^* w = w$ is called a *partial isometry*. An element $w \in R$ is a *partial isometry* if and only if an element $e = ww^{=}$ is a projection such that $we = w$. Then $f = ww^*$ is also a projection and $fw = w$. Moreover e is the smallest projection such that $we = w$ and f is the smallest projection such that $fw = w$. With notation of previous statement e is called *initial projection* and f the *final projection* of the partial isometry w. It is easy to see that projections e, f are equivalent if and only if there exists a partial isometry with initial projection e and final projection f. Projections e, f are called orthogonal if $ef = 0$, equivalently $fe = 0$. If e, f are projections with $e \leq f$ then $f - e$ is a projection orthogonal to e.

* dusanjok@yahoo.com

1.1 *Some properties of equivalence of projections*

The next proposition shows that the equivalence is finitely additive.

Proposition 1.1.1 ([2]) If $e_1,...,e_n$ are orthogonal projections and $f_1,...,f_n$ are orthogonal projections such that $e_i \approx f_i$, for $i = 1,...,n$ then $\sum_{i=1}^{n} e_i \approx \sum_{i=1}^{n} f_i$.

Proof: Let w_i be a partial isometry with $w_i^* w_i = e_i, w_i w_i^* = f_i$. Let $w = \sum_{i=1}^{n} w_i$. It is routine to check that w is a partial isometry implementing the desired property.

For the projection e in ring R we call $e\mathrm{Re}$ a corner generated by a projection e. The next proposition shows that the equivalence of projections implies the isomorphism of the coresponding corners.

Proposition 1.1.2 If $e \approx f$ with partial isometry w then $e\mathrm{Re} \cong fRf$.

Proof: We define a function ϕ by $\phi(x) = wxw^*$, $x \in e\mathrm{Re}$. Since $x \in e\mathrm{Re}, \phi(x) \in fRf$. Obviously ϕ is additive which means $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$. If $x, y \in e\mathrm{Re}$ then:

$$\phi(xy) = wxyw^* = wxeyw^* = wxw^* wyw^* = \phi(x)\phi(y).$$

We also have ϕ is injective. If $x \in e\mathrm{Re}$ and $wxw^* = 0$ then $0 = w^*(wxw^*)w = exe = x$. If $y \in fRf$ then $w^* yw \in e\mathrm{Re}$ and $\phi(w^* yw) = y$ so ϕ is surjective. For all $x \in e\mathrm{Re}$ we have $\phi(x^*) = wx^* w^* = (wxw^*)^* = (\phi(x))^*$ which proves that ϕ is involutive isomorphism.

The clasification theory requires an ordering of projections more suitable then $\leq$. For projections $e, f \in R$ we write $e \prec f$, and say that e is *dominated* by f , in case there exists projection g such that $e \approx g \leq f$, that is e is equivalent to a subprojection of f . We use $r(X)$ to denote an annihilator of set X .

We say that R is *Rickart* ring with involution (*- ring) if for each $x \in R$ there exists $g \in \tilde{R}$ such that $r(\{x\}) = gR$. It is well known that *-regular rings, Boolean rings are Rickart rings.

Proposition 1.1.3 ([1]) If R is Rickart *- ring then R has a unity element and the involution of R is proper.

Proof: Write $r(\{0\}) = gR$. Since $r(\{0\}) = R$ we have $R = gR$, thus g is left unity for R. From the fact that R is ring with involution we obtain that g is two-sided unity element..

It is well known from that in a Rickart *- ring R for arbitrary $x \in R$ there exists $LP(x), RP(x)$ so called left and right projection respectively.

Although the projections of a Rickart *- ring need not form complete lattice, they always form a lattice by an supremum and infimum given with:

$$e \vee f = f + RP(e(1-f)), e \wedge f = e - LP(e(1-f)).$$

Proposition 1.1.4 ([3]) Let R be a Rickart *- ring and let B be a *-subring such that B has a unity and for all $x \in B, RP(x) \in B$. Then B is also Rickart *- ring. Moreover if $x \in B$ then:

$$RP_R(x) = RP_B(x).$$

Proof: Write e for the unity element. Let $x \in B$ and $g = RP(x)$. By assumption $g \in B$, since $xe = x$, we have $g \leq e$. If $y \in B$ then $xy = 0$ iff $gy = 0$ iff $(e-g)y = y$, so we have that the right annihilator of x in B $(e-g)B$.

A useful application of previous proposition is:

Corollary: If R is a Rickart *- ring and $e \in \tilde{R}$ .Then $e\mathrm{Re}$ is Rickart *-ring.

2. *Matrix representation of rings with involution*

It is generally quite hard to show that a ring with involution is isomorphic to some matrix ring. The question of when a Rickart ring is matrix ring is easier under some assumptions of projections. We begin this section with assumption on orthogonality of equivalent projections with sum 1.

Theorem 2.1 Let R be a *- ring with unity, $n \in N$, and suppose that R contains n orthogonal equivalent projections $e_1, e_2, ..., e_n$ with sum 1. Then R is isomorphic with the ring $(e_1 \operatorname{Re}_1)_n$, of all $n \times n$ matrices over $e_1 \operatorname{Re}_1$.

Proof: For all $i = 1,...n$ let w_i be a partial isometry such that $w_i^* w_i = e_1, w_i w_i^* = e_i$. We define mapping $\phi : R \to (e_1 \operatorname{Re}_1)_n$ with $\phi(a) = (w_i^* a w_j)_n$ which is involutive isomorphism.

If $a \in R$, then $w_i^* a w_j \in e_1 \operatorname{Re}_1$, for all i, j, thus $\phi(a) \in (e_1 \operatorname{Re}_1)_n$. Clearly:

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)\ ,\ \phi(a^*) = (\phi(a))^*.$$

Mappnig ϕ is injective. If $w_i a w_j = 0$ for all i, j then $e_i a e_j = w_i (w_i^* a w_j) w_j^* = 0$, for all i, j thus

$$a = 1a1 = (\sum_i e_i) a (\sum_j e_j) = \sum_{i,j} e_i a e_j = 0.$$

If $(a_{ij}) \in (e_1 \operatorname{Re}_1)_n$ we define $a = \sum_{i,j} w_i a_{ij} w_j^*$. Nothing that $w_i^* w_j = 0$ when $i \neq j$, we obtain

$$w_i^* a w_j = \sum_{k,l} w_i^* w_k a_{kl} w_i^* w_j = w_i^* w_i a_{ij} w^* w_j = e_1 a_{ij} e_1 = a_{ij},$$ which

shows that $\phi(a) = (a_{ij})$.

At the and we have that:

$$\varphi(ab) = \sum_k (w_i^* a w_k)(w_k^* b w_j) = (w_i^* a)(\sum_k w_k w_k^*)(b w_j) =$$

$$= (w_i^* a)(\sum_k e_k)(b w_j) = w_i^* (ab) w_j = \varphi(a)\varphi(b).$$

which completes the proof.

Next result is very important in theory of extension of ordering. ([2])

Lemma 2.1 Let R be a Rickart *- ring containing a projection e such that $e \approx 1 - e$. Then $2 = 1 + 1$ is invertibile in R.

Proof: Let w be a partial isometry such that $w^+ w = e, w w^* = 1 - e$. From the fact that R is Rickart ring we obtain there exists projection f such that $r(e - w^*) = fR$. From $(e - w^*) f = 0$ we have $fw = fe$. Since

$w \in (1-e)\mathrm{Re}$ it follows $(e-w^*)(e+w)=0$, and therefore $f(e+w)=e+w$. Noting that $fw=fe$, this yields to $e=2fe-w$, and after that $w^*=2fw^*-(1-e)$. Taking adjoints we obtain $1-e=2wf-w$. Then for $x=fe+wf-w$ we have $2x=1$ which completes the proof.

In our closing result we give an aplication of previous theorem which characterize equivalence of orthogonal projections in weakly Rickart ring with involution.

Let R be a *- ring, $x \in R$, e a projection in R. We say that e is an *annihilating right projection* (briefly, ARP) of x in case (i) $xe=x$ and (ii) $xy=0$ implies $ey=0$. We say that R is *weakly Rickart* *- ring if every $x \in R$ has ARP property.

Theorem 2.2 Let R be weakly Rickart *- ring and let e, f be projections such that $ef=0$. Then $e \approx f$ if and only if there exists a projection g such that $2ege=e, 2fgf=f, 2geg=2gfg=g$.

Proof: If such a projection g exists then, defining $w=2fge$ we have $ww^*=4egfge=2e(2gfg)e=2ege=e$, and similarly $ww^*=f$, thus $e \approx f$

Conversely, suppose $e \approx f$. Dropping down to $(e+f)R(e+f)$ we can suppose that R is Rickart *- ring and $e+f=1$. Let w be partial isometry such that $w^*w=e, ww^*=f=1-e$. Define $w_1=e, w_2=w$ and consider the *-isomorphism $\phi: R \to (e\mathrm{Re})_2$ given by $\phi(a)=(w^*aw_j)$.

For $a \in R$ we write $a_{ij}=w_i^*aw_j$ $(i,j=1,2)$. Since $w_{11}=ewe=0$, $w_{12}=eww^*=0$, $w_{21}=w^*we=e$, $w_{22}=w^*ww=ew=0$. Now we have $\phi(w)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & e\end{bmatrix}$.

The similar computations yields $\phi(e)=\begin{bmatrix}e & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\phi(f)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & e\end{bmatrix}$.

If we write 1 for the unity element of $e\mathrm{Re}$ and identify R with $(e\mathrm{Re})_2$ then:

$$e=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, w=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Note that if $a=(a_{ij})$, $faf=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}$. Since element $2=1+1$ is invertible in R we may define:

$$g=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Evidently, g is projection with desired property:
$2ege=e,\ 2fgf=f,\ 2geg=2gfg=g$.

3. *Baer rings as generalization of Rickart rings*

The definition of a Rickart *- ring involves the annihilator of singleton. For a Baer * - ring we consider arbitrary subset. A Baer *- ring is a *- ring R such that for every nonempty S of R $r(S)=gR$ for suitable projection g. The relation between Rickart *- rings is the relation between lattices and complete lattices.

Proposition 3.1 ([1]) The following conditions on *- ring R are equivalent:

(i) R is Baer *- ring.
(ii) R is Rickart *- ring whose projections form a complete lattice.
(iii) R is Rickart *- ring in which every orthogonal family of projections has a supremum.

Proof:
(i) implies (ii): Suppose that R is Baer *- ring and S is nonempty subset of projections in R. From the fact that R is Baer ring with involution we find projection e such that $r(S)=(1-e)R$. We will show that e is supremum for S. Since $1-e\in r(S)$ we have $f(1-e)=0$ for all $f\in S$. On the other hand, if g is a projection such that $f\le g$, for all $f\in S$, then $1-g\in r(S)=(1-e)R$, then $1-g\le 1-e, e\le g$. This shows that $\sup S$ exists and is equal to $1-\sup\{1-f, f\in S\}$.

(ii) implies (iii) trivialy.

(iii) implies (i). Let S be nonempty subset of R. Note that $x \in r(S)$ iff $LP(x) \in r(S)$. It follows that if the only projection in $r(S)$ is 0 then $r(S) = \{0\} = 0R$. Otherwise let $\{e_i\}$ be maximal orthogonal family of nonzero projections in $r(S)$. By hypothesis $e = \sup e_i$ exists, we conclude the proof by showing that $r(S) = gR$. At any rate $e \in r(S)$, so we obtain $eR \subset r(S)$. Conversely, assuming $x \in r(S)$ we assert that $x \in eR$. Setting $y = x - ex$ we will show that $y = 0$. Note that $y \in r(S)$, which implies $LP(y) \in r(S)$. Also for all i, we have $e_i y = e_i x - e_i ex = 0$, therefore $e_i LP(y) = 0$. The argument of maximality yields $LP(y) = 0$, that $y = 0$.

References

Berberian 1988: S. K. Berberian, *Baer rings and Baer * - rings*, University of Texas, <rene.ma.utexas.edu>.

Jokanović 2004: Dušan Jokanović, *Equivalency of projections and posibility of extending *- orderings*, Mathematica Montisnigri, Vol XVII, 5–10.

Jokanović 2005: Dušan Jokanović, *Matrična reprezentacija prstena sa involucijom*, Procedings of the Workshop devoted to Contemorary mathematics, physics and biology, Podgorica, 59–65.

Nenad U. Stojanović*
Visoka medicinska škola Prijedor

Originalni naučni rad

POLUPRAVILNI MNOGOUGLOVI NAD CJELOBROJNIM REŠETKAMA

1. *Uvod*

1.1. Tačkaste rešetke u ravni: Dvije familije paralelnih pravih koje „razbijaju“ ravan na jednake paralelograme formiraju mrežu u ravni. Skup L svih tačaka presjeka tih pravih linija nazivamo tačkasta rešetka ili jednostavno rešetka, a same tačke čvorovima rešetke. Svaki od tih paralelograma nazivamo fundamentalnim paralelogramom ili generatorom rešetke. Rešetka se sastoji od (tačaka) čvorova, a same prave to nisu. Od posebnog je interesa ortogonalna cjelobrojna rešetka $\mathbb{Z}^2$. Ona se sastoji od tačaka ravni Ox čije su koordinate cijeli brojevi u pravouglom koordinantnom sistemu. Jedna rešetka se može dobiti presjekom različitih familija paralelnih pravih koje nisu ortogonalne.

Tačke rešetke možemo posmatrati i kao čvorove kvadratne mreže čije su stranice dužine 1. Ako svi vrhovi mnogougla leže na čvorovima rešetke, kažemo da je on upisan u rešetku. Tačke rešetke nisu direktno vezane za familiju linija za razliku od svojih fundamentalnih paralelograma. Rešetke u ravni predstavljaju moćno sredstvo povezivanja analitičkih problema sa geometrijom i obrnuto. Kretanje na ovom jedinstvenom mostu povezivanja analize i geometrije je obostrano i vrlo intenzivno.

Prva istraživanja rešetke $\mathbb{Z}^2$ kao matematičkog objekta prema dostupnim informacijama vezana su za radove Gausa, koji se zainteresovao za pitanje: Kako brzo sa porastom R poluprečnika kružnice raste i broj $N(R)$ tačaka sa cijelim koordinatama u krugu? (Vavilov, Ustinov 2006a).

Na činjenicu da neke jednostavne geometrijske tvrdnje u ravni imaju čvrste i duboke veze sa aritmetičkim tvrdnjama među prvima je ukazao Minkovski, pokazujući da brojni teorijski problemi proizlaze iz gemetrijskih modela (Hilbert 1932: 36–47). Takođe, postojalo je i interesovanje za mogućnost upisivanja pravilnih mnogouglova u rešetki $\mathbb{Z}^2$. Prvi rezulatati se vežu za Lukasa koji je dokazao da se na toj rešetki ne može razložiti pravilni trougao (Lukas 1878). U osnovi tog dokaza leže elementarne osobine iz teorije brojeva.

Značajni su rezultati u razmatranju pitanja vezanih za odnos poligona i cjelobrojnih rešetki i sljedećih autora: Ball 1973:119–122, Hilbert, Cohn-Vossen 1932, Vavilov, Ustinov 2006a, 2006b, Egorov 1974, Robinowitz 1986, Govedarica 2005 i dr.

* nsnest1@gmail.com

Paralelogrami koji generišu rešetku L nazivamo fundamentalnim paralelogramima, čiju površinu označavamo sa $\Delta = \Delta(L)$. Za kordinantni početak na rešetki obično uzimamo jedan njen čvor. Rešetku možemo konstruisati za svaki paralelogram, paralelnim pomjeranjem prvo u jednom, a zatimu drugom pravcu, duž stranice paraelograma za dužinu tih stranica.

Drugi praktičan način zadavanja rešetke u ravni zasniva se u izboru bilo koja dva nekolinearna vektora a, b i tačke O koordinantnog početka. Tada skup $L(a,b)$ svih tačaka P takvih da je $\overrightarrow{OP} = m\vec{a} + n\vec{b}$ gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$ predstavlja rešetku. Na primjer $\mathbb{Z}^2 = L(i, j)$ gdje su i, j dva uzajamno normalna vektora jedinične dužine. Dakle, rešetku generišu svaka dva nenula vektora sa zajedničkom početnom tačkom, a koji svoj kraj imaju u različitim vrhovima nekog fundamentalnog paralelograma.

1.2. Osnovne osobine tačaka rešetke u ravni:

(1) Prava koja prolazi kroz dvije tačke rešetke sadrži beskonačno mnogo čvorova rešetke i pri tome sva rastojanja među susjednim čvorovima koji leže na jednoj pravoj su jednaki.

(2) Paralelnim pomjeranjem ravni kojom se jedan čvor rešetke prevodi u drugi, prevodi se cijela rešetka u samu sebe.

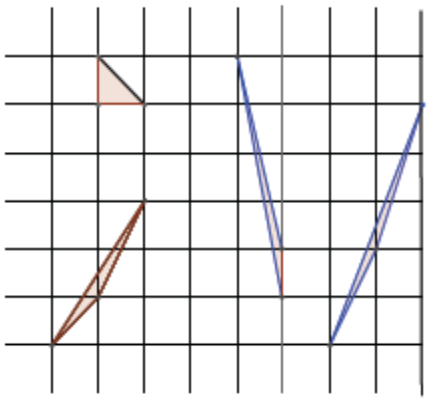
(3) Rešetka je centralno simetrična u odnosu na sredinu bilo kog segmenta koji povezuje dva čvora te rešetke.

(4) Pravilo paralelograma – ako su tri vrha paralelograma čvorovi rešetke, tada je i četvrti vrh tog paraelograma čvor te rešetke.

(5) Ako paralelogram sa vrhovima u čvorovima rešetke ne sadrži druge čvorove na stranama ni unutar sebe, tada on generiše tu rešetku tj. on je fundamentalni paralelogram za tu rešetku. Ova osobina se uzima za kriterijum kod ispitivanja da li se paralelogram javlja generatorom rešetke.

1.3. Fundamentalni paralelogrami: Trougao čiji vrhovi leže u čvorovima rešetke i koji osim svojih vrhova ne sadrži ni unutar sebe ni na svojim stranicama druge čvorove rešetke, naziva se primitivni trougao. Očito se svaki fundamentalni paralelogram može svojom dijagonalnom podijeliti na dva primitivna trougla, a vrijedi i obratno, da se svaki primitivni trougao može dopuniti do fundamentalnog paralelograma. Osnovne osobine fundamentlanih paralelograma i primitivnih trouglova sadržane su u sljedeća dva stava (Vavilov, Ustinov 2006b).

1. Svi fundamentalni paralelogrami (time i primitivni trogulovi) date rešetke imaju jednake površine (slika 1).



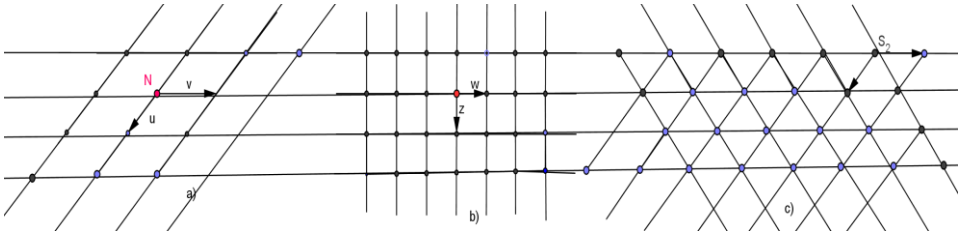
Slika 1.

2. Par vektora $\vec{a} = m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2$, $b = k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$ gdje su $m,n,k,l \in \mathbb{Z}$ generiše rešetku ako i samo ako je generišu i vektori \$ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ tj. $L(a,b) = L(\vec{e}_1.\vec{e}_2)$ kada je $|ml - nk| = 1$.

Primjeri rešetki sa različitim fundamentalnim paralelogramima prikazani su slikom 2.

2. *Pravilni mnogouglovi na rešetkama*

U ovom dijelu dajemo osnovne rezultate koji se odnose na pravilne mnogouglove upisane u cjelobrojne rešetke u ravni. Prve rezultate o



Slika 2.

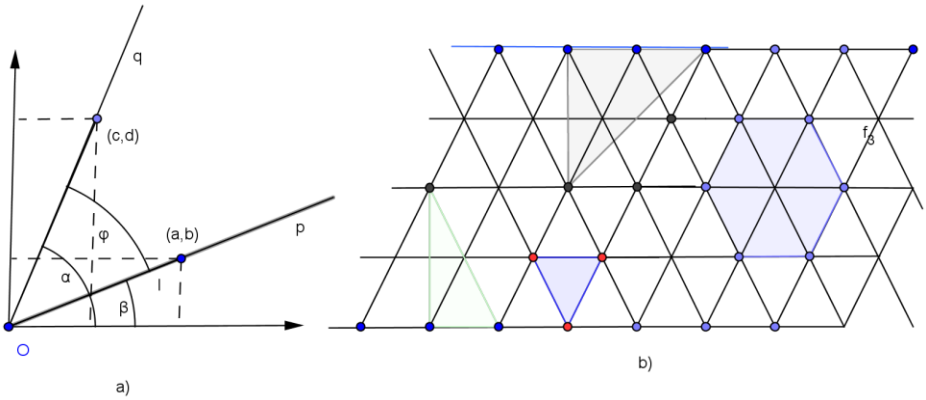
nemogućnosti upisivanja pravilnog trougla u rešetku $\mathbb{Z}^2$ prema dostupnim izvorima dokazao je E. Lukas. U osnovi tog dokaza leže elementarne osobine iz teorije djeljivosti brojeva (Lukas 1878). Odnosno, dokazana je tvrdnja.

Teorem 2.1. Pravilni trougao nije moguće upisati u cjelobrojnu rešetku $\mathbb{Z}^2$ (da su mu sva tri

tjemena u čvorovima cjelobrojne rešetke).

Dokaz: Neka date poluprave p,q sa zajedničkim koordinantnim početkom prolaze kroz čvorove $A(a,b),B(c,d)$ rešetke $\mathbb{Z}^2$ (slika 3a). Tada je tangens ugla $\varphi=\angle(p,q)$ između tih polupravih racionalan broj ili nije definisan. Odnosno,

$$tg\varphi=tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\beta}=\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{1+\frac{d}{c}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{ad-bc}{ac+bd}\in\mathbb{Q}$$



Slika 3.

Pretpostavimo suprotno, da postoji jednakostrani trougao u rešetki $\mathbb{Z}^2$ sa tjemenima u čvorovima $O(0,0),A(a,b),B(c,d)$ tj. trougao OAB je jednakostranični trougao. Tada poluprave koje izviru iz njegovih vrhova sadrže strane trougla i zatvaraju ugao od 60° čiji je tangens $tg60^\circ=\sqrt{3}$.

Kako je $\sqrt{3}$ iracionalan broj, to je suprotno sa već pretpostavkom da je tangens ugla racionalan broj ili nije definisan. Na osnovu toga zaključujemo da pravilni trougao nije moguće upisati u cjelobrojnu rešetku $\mathbb{Z}^2$.Na osnovu pokazanog, jasno je da se ni pravilni šestougao ne može takođe upisati u ortogonalnu rešetku $\mathbb{Z}^2$. Pravilni trougao i šestougao možemo upisati u rešetku $\mathbb{Z}^3$. Dakle, u rešetki $\mathbb{Z}^2$ se možemo upisati kvadrat, ali ne i pravilni trougao. Međutim rešetka čiji je fundamentalni paralelogram romb dužine stranice 1 i oštri ugao 60° možemo upisati kako pravougli trougao tako i pravilni šestougao (slika 3 b).

Teorem 2.2. Ne postoji rešetka u kojoj istovremeno možemo upisati kvadrat i pravilni trougao.

Dokaz: Dokažimo teoremu koristeći kompleksne brojeve. Neka je rešetka L_T generisana primitivnim trouglom ΔABC sa kompleksnim brojevima

$$L_T = \left\{ z \middle| z = m + \varepsilon n, m, n \in \mathbb{Z} \ , \varepsilon = e^{i\frac{\pi}{3}} \right\}.$$

Pretpostavimo da su tačke $z_k = m_k + \varepsilon n_k$, $k = 0,1,2,3$ vrhovi kvadrata. Ne gubeći uopštenost uzmimo da je $z_0 = 0$, a da su tačke z_1, z_2, z_3 tako numerisane da je $z_3 = iz_1$. Iz tih jednakosti zaključujemo da je $m_3 + \varepsilon n_3 = i \cdot (m_1 + \varepsilon n_1).$

Kako je

$$\varepsilon = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \ im_3 + \varepsilon n_3 = (m_3 + n_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}n_3 \cdot i, \text{ i}$$

$$i(m_1 + \varepsilon n_1) = im_1 + n_1 \cdot i \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i) = im_1 + n_1 \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} n_1 = -\frac{1}{2} n_1 + (m_1 + n_1 \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot i$$

.

Zamijenimo li to u jednakost $z_3 = iz_1$, nakon izjednačavanja dobijamo sistem jednačina

$$2m_1 + \sqrt{3}n_1 = n_3$$

$$2m_3 + \sqrt{3}n_3 = -n_1.$$

Rješavanjem sistema, nalazimo da je $n_1 = n_3 = 0$ što je nemoguće, jer bi to značilo da sve tačke z_0, z_1, z_3 leže na jednoj, realnoj, pravoj. Dobijenom protivrječnošću završavamo dokaz.

Odgovor na pitanje koje pravilne mnogouglove možemo upisati u cjelobrojnu mrežu

dao je Scherrer (1946: 97–98) ne znajući pri tom ništa o radovima Schenberga (1937: 48–55) koji je na to pitanje odgovorio još 1937. godine. To pitanje je Egorov povezao sa iracionalnošću trigonometrijskih funkcija (Egorov 1974).

Dakle, jedan kvadrat sa vrhovima u čvorovima cjelobrojne rešetke $\mathbb{Z}^2$ može se upisati i to na mnogo načina, dok se u rešetki čiji fundamentalni paralelogram ima ugao od 60° između svojih strana može upisati i trougao i četverougao. Jednostavno se pokazuje da rešetka u kojoj bi se mogao upisati pravilni petougao ne postoji.

Zaista, ako pretpostavimo suprotno, da takva rešetka postoji i da se vrhovi pravilnog petougla nalaze u čvorovima rešetke $\mathbb{Z}^2$. Konstruišemo li dijagonale tog pravilnog petougla one se, kao što je poznato, sijeku u tačkama

koje su vrhovi novog petougla, a koji ima manju stranicu od polaznog. Svaki vrh novog petougla, označimo ih sa A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, javlja se četvrtim vrhom paralelograma čija su tri vrha vrhovi polaznog petougla koji leže u čvorovima rešetke. Dužina stranica manjeg petougla povezana je sa dužinom stranice većeg koeficijentom k, tj. vrijedi $A_1B_1 = kAB$. Konstrukcijom dijagonala manjeg petougla A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 dobili bismo još manji petougao sa vrhovima na čvorovima rešetke itd. To nas dovodi do protivrječnosti da smo izabrali pravilni petougao sa najmanjom stranicama. Dakle, nema rešetke u kojoj možemo nacrtati pravilni petougao. Za ostale pravilne mnogouglove vrijedi teorem koju ovdje navodimo bez dokaza, a za dokaz vidjeti: Vavilov, Ustinov 2006b.

Teorem 2.3. Pravilni n-tougao za $n = 5, n > 6, n \in \mathbb{N}$ ne može se upisati nijednoj cjelobrojnoj rešetki.

3. *Polupravilni mnogouglovi upisani u cjelobrojne rešetke*

Mnogougao koji ima ili sve strane (a različite uglove), ili sve uglove jednake (a različite strane) nazivamo polupravilnim mnogouglom. Na primjer, polupravilni jednakougaoni četverougao je pravougaonik, čiji su svi unutrašni uglovi pravi, ili polupravilni jednakostrani četverougao je romb koji ima sve strane jednake, a untrašnje uglove različite.

Dakle, ako bi sa M_s označili skup svih jednakostranih mnogouglova, a sa M_u skup svih jednakougaonih mnogouglova, tada bi $M_p = M_s \cap M_u$ predstavljao skup svih pravilnih mnogouglova. Ovdje ne razmatramo pitanje konveksnosti mnogouglova. Problematika polupravilnih mnogouglova na rešetkama se dakle može posmatrati u dvije odvojene grupe: grupu jednakougaonih i grupu jednakostranih. Pitanjem rasporeda ove dvije klase mnogouglova na rešetki $\mathbb{Z}^2$ bave se u posljednje vrijeme Vavilov i Ustinov (2006a, 2006b) a nešto ranije Ball (1973) koji je za tu klasu mnogouglova i formulisao i dokazao niz važnih stavova.

3.1. *Jednakougaoni polupravilni mnogouglovi*

Razmotrimo polupravilne mnogouglove sa jednakim unutrašnjim uglovima, a različitim stranama. Primjer jednog četverostranog polupravilnog mnogougla je pravougaonik sa untrašnjim uglovima od 90°. Razmatranje jednakougaonih mnogouglova oslanja se na stav o iracionalnosti vrijednosti trigonometrijskih funkcija koji glasi: sa isključenjem nekih vrijednosti ugla φ trigonometrijske funkcije imaju iracionalne vrijednosti. Prvo pokažimo da vrijedi teorem.

Teorem 3.1. Brojevi $tg\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ za prirodne vrijednosti n se uvijek javljaju iracionalnim sa isključenjem slučaja $n=1,2,4,8$.

Dokaza: Matematičkom indukcijom se lako pokaže da vrijedi i formula

$$tg(n\alpha)=\frac{\sin(n\alpha)}{\cos(n\alpha)}=\frac{C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha-C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha-\cdots}{\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha-\cdots}$$

(3.1)

$$=\frac{\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}\cos^{-2}\alpha\cdot\sin^{-2}\alpha-\binom{n}{5}\cos^{-4}\alpha\cdot\sin^{-4}\alpha-\cdots\right]}{\cos^n\alpha\cdot\left[1-\binom{n}{2}_n^2\cos^{-2}\alpha\cdot\sin^{-2}\alpha+\binom{n}{4}\cos^{-4}\alpha\cdot\sin^{-4}\alpha-\cdots\right]}$$

gdje je $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$. Koristeći formulu (3.1) pokažimo da teorema vrijedi.

Kako za $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ vrijedi $0=tg(2\pi)=tg\left(n\cdot\frac{2\pi}{n}\right)=tg(n\alpha)$ iz jednačine (3.1) imamo da je

$tg(n\alpha)=0$ ako i samo ako je

(3.2)

$$tg\alpha\cdot\left[n-\binom{n}{3}tg^2\alpha+\binom{n}{5}tg^4\alpha-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}tg^{n-1}\alpha\right]=0$$

i pri tome je $1-\binom{n}{2}tg^2\alpha+\binom{n}{4}tg^4\alpha-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}tg^{n-1}\alpha\neq 0$.

Uzmimo da je $x=tg\frac{2\pi}{n}$. Tada je jednačina (3.2) ekvivalentna sistemu jednačina

$$x=0 \text{ ili } n-\binom{n}{3}x^2+\binom{n}{5}x^4-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^{n-1}=0$$

Iz prve jednačine nalazimo da je

$$x=tg\frac{2\pi}{n}=0\Leftrightarrow\frac{2\pi}{n}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2}{n}=k\Rightarrow n=\frac{2}{k}.$$

Kako je $n \in \mathbb{N}$, moguće vrijednosti za n su 1 i 2 , što ne zadovoljava pretpostavku da je n različit od $\{1,2,4,8\}$.

Iz druge jednačine $n - \binom{n}{3}x^2 + \binom{n}{5}x^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-1} = 0$ vidimo da se $x = tg\,\frac{2\pi}{n}$

javlja korijenom jednačine sa cjelobrojnim koeficijentima. S obzirom na prirodu korijena jednačine razlikujemo dva slučaja:

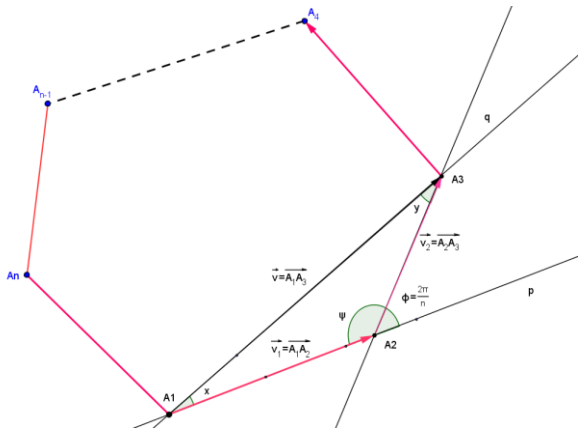
1. Ako je $n = m \cdot p$, gdje je p neparan prost broj, tada za $m = 1, n = p$ iz jednačine (3.2) slijedi

$n = x^2\left(\binom{n}{3} + \binom{n}{5}x^2 - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-3} \right)$, odakle zaključujemo da $x^2 \mid p$ za $x = tg\,\frac{2\pi}{n}$ što nije moguće, jer je p neparan prost broj. Ako je $n = m \cdot p,\ m > 1$ tada, ako bi $x = tg\,\frac{2\pi}{n}$ bio racionalan broj, onda bi i $x = tg\left(m\frac{2\pi}{n} \right) = tg\left(m\frac{2\pi}{mp} \right) = tg\left(\frac{2\pi}{p} \right)$ također bio racionalan, a već smo pokazali da to nije moguće.

2. Ako je $n = 2^k,\ k \geq 4$, Kako je za $k = 4$ $tg\left(\frac{2\pi}{16} \right) = \sqrt{2} - 1$ iracionalan broj, tada prema (3.2) svi brojevi oblika $tg\left(\frac{2\pi}{2^k} \right), k \geq 4$ bili bi također iracionalni, što je protivrječno pretpostavci o korijenu jednačine (3.2) sa cjelobrojnim koeficijentima.

Koje polupravilne jednakougaone mnogouglove možemo nacrtati u cjelobrojnoj rešetki $\mathbb{Z}^2$? Odgovor na to pitanje nalazi se u sljedećem teoremu koji je formulisao i dokazao Ball.

Mi dajemo dokaz te teoreme koristeći kosinusnu teoremu, analitički pristup i rezultate prethodnih stavova i teorema.



Slika 4.

Teorem 3.2. Od svih mogućih jednakougaonih mnogouglova na rešetki $\mathbb{Z}^2$ možemo upisati
samo pravougaonik i osmougao.

Dokaz:

1.Uzmimo da je jednakougaoni mnogougao sa n stranica, $n>2, n\in\mathbb{N}$ upisan u rešetki $\mathbb{Z}^2$ (slika 4) čiji su vrhovi $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ čvorovi te rešetke. Uočimo bilo koja tri uzastopna vrha (npr. A_1, A_2, A_3) tog jednakougaonog polupravilnog mnogougla čije su koordinate cijeli brojevi. Stavimo da je: $A_1(a,b)$, $A_2(c,d)$, $A_3(e,f)$, gdje su $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}$ cijeli brojevi, pa vektori određeni stranama mnogougla imaju cjelobrojne koordinate. Uočimo trougao $\Delta A_1A_2A_3$ i vektore njegovih strana, $v_1=\overrightarrow{A_1A_2}$, $v_2=\overrightarrow{A_2A_3}$ kao i strane $\overline{A_1A_3}$, $v_3=\overrightarrow{A_1A_3}$. Označimo mu unutrašnji ugao u vrhu A_2 sa ψ, u vrhu A_1 sa x i u vrhu A_3 sa y. Spoljašnji ugao jednakougaonog polupravilnog mnogougla je $\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$ i vrijedi odnos $\psi=\pi-\varphi$. Uočimo prave $p=p(A_1A_2)$, $q=q(A_2A_3)$, $r=r(A_1A_3)$. Primjenom kosinusne teoreme na stranice trougla $\Delta A_1A_2A_3$ čije su dužine jednake dužinama vektora $\overrightarrow{v_1}$ i v_2 koje međusobno zatvaraju ugao ψ, nalazimo da vrijedni jednakost

$$(3.3)\quad \left|v^2\right|=|v_1|^2+|v_2|^2-2|v_1||v_2|\cos\psi=|v_1|^2+|v_2|^2+2|v_1||v_2|\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Očito je lijeva strana jednakosti cio broj, jer je $|v|^2 = (e-a)^2 + (f-b)^2 \in \mathbb{Z}$, pa i desna strana treba biti cio broj, odnosno treba da vrijedi $|v_1|^2 + |v_2|^2 + 2|v_1||v_2|\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$.

Kako je $|v_1|^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2 \in \mathbb{Z}$ i $|v_2|^2 = (e-c)^2 + (f-d)^2 \in \mathbb{Z}$ desna strana će biti cio broj ako je $2|v_1||v_2|\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$ odnosno, ako je $|v_1||v_2| \in \mathbb{Z}$ i $\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Z}$, zbog čega razlikujemo sljedeće slučajeve:

(1) $\cos\frac{2\pi}{n} = 0$

(2) $\cos\frac{2\pi}{n} = \pm 1$ i $|v_1||v_2| \in \mathbb{Z}$

(3) $\cos\frac{2\pi}{n} = \pm\frac{1}{2}$ i $|v_1||v_2| \in \mathbb{Z}$.

Analizirajmo sva tri slučaja.

1. Ako je $\cos\frac{2\pi}{n} = 0$ tada je $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ odnosno, $n = \frac{4}{k}$. Posljednja jednakost je zadovoljena jedino za $k = 1$ ili $k = 2$ ili $k = 4$, pa su moguće vrijednosti $n = 1$ ili $n = 2$ ili $n = 4$. Prema uslovu je $n > 2$ pa jedina moguća vrijednost je $n = 4$ i tada je $\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Tada jednakost prelazi u oblik $|v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2$, a to vrijedi u slučaju da je $\Delta A_1A_2A_3$ pravougli trougao, odnosno, jedini polupravilni jednakougaoni mnogougao koji zadovoljava tražene uslove je pravougaonik.

2. U ovom slučaju ako je ispunjen uslov da je $\cos\frac{2\pi}{n} = \pm 1$ i $|v_1||v_2| \in \mathbb{Z}$ tada je $\frac{2\pi}{n} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Odavde nalazimo da jedino za $k = 1$ je to moguće i tada je $n = 2$ ili $n = 1$. Imajući u vidu uslov $n > 2$ nijedna vrijednost za n ne zadovoljava tražene uslove.

Dakle, u ovom slučaju nemamo nijedan jednakougaoni polupravilni mnogougao za koji vrijedi navedena jednakost.

3. U ovom slučaju uslov je ispunjen ako je $2 \cdot \cos\frac{2\pi}{n} = 2(\pm\frac{1}{2}) = \pm 1, n \in \mathbb{N}$. Što vrijedi za $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3} \cdot (3k \pm 1)$ odnosno,

za $n=\frac{6}{3k\pm 1}$, $k\in\mathbb{Z}$ odakle je $n=6$, a $\varphi=60^\circ$. Dakle, u tom slučaju unutrašnji ugao trougla $\Delta A_1A_2A_3$ iznosi $\psi=120^\circ$. Za ovu vrijednost n treba da je i $|v_1||v_2|\in\mathbb{Z}$. Kako je $|v_1|=\sqrt{A}$, $A=(c-a)^2+(d-b)^2$, $A\in\mathbb{Z}$ i $|v_2|=\sqrt{B}$, $B=(e-c)^2+(f-d)^2$, $B\in\mathbb{Z}$ tada je $|v_1||v_2|\in\mathbb{Z}$ ako i samo ako $A=B$ ili $B=k^2A$, $k\neq 0, k\in\mathbb{Z}$. Ako je $A=B$ tada je $|v_1||v_2|=\sqrt{A}\sqrt{A}=(c-a)^2+(d-b)^2=(e-c)^2+(f-d)^2\in\mathbb{Z}$. Odavde, nalazimo da ta jednakost vrijedi ako je $(a-e)\left(\frac{a+e}{2}-c\right)=0$ i $(b-f)\left(\frac{b+f}{2}-d\right)=0$, odnosno, ako je ($a=e$ ili $a+e=2c$) i ($b=f$ ili $b+f=2d$). Slučaj $a=e$ i $b=f$ nije moguć jer bi tada bilo $A_1=A_3$, kao što nije moguć ni slučaj $c=\frac{a+e}{2}$ i $d=\frac{b+f}{2}$, jer bi tada tačka A_2 bila sredina segmenta $\overline{A_1A_3}$.

Lako se pokaže da i u ostalim slučajevima nije moguće naći trougao za koji bi bio ispunjen i uslov $\varphi=60^\circ$. Slično pokažemo da i u slučaju $B=k^2A$, $k\neq 0, k\in\mathbb{Z}$ ne postoji mnogougao za koji je $|v_1||v_2|\in\mathbb{Z}$ i $\varphi=60^\circ$. Zaista, primijetimo da je

$$(e-c)^2+(f-d)^2=k^2\left[(c-a)^2+(d-b)^2\right]=(kc-ka)^2+(kd-kb)^2$$

, dokaz je sličan prvom slučaju. Koeficijent smjera prave p,q,r je respektivno: $k_p=\frac{d-b}{c-a}$, $k_q=\frac{f-d}{e-c}$, $k_r=\frac{f-b}{e-a}$. Na osnovu toga i relacije za tangens ugla između dvije prave $tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$ imamo da je

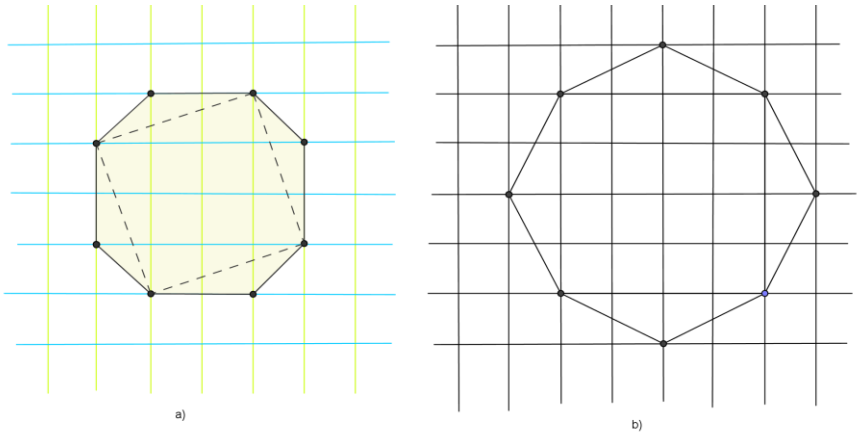
$$tg\varphi=\frac{k_q-k_p}{1+k_qk_p}=\frac{\frac{f-d}{e-c}-\frac{d-b}{c-a}}{1+\frac{f-d}{e-c}\cdot\frac{d-b}{c-a}}=\frac{(f-d)(c-a)-(d-b)(e-c)}{(e-c)(c-a)+(f-d)(d-b)}$$

.

Kako je $tg\varphi\in\mathbb{Q}$ ako i samo ako i samo ako je $\varphi=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ili $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, odnosno za te vrijednost ugla vrijednost tangensa je ili

racionalan broj ili vrijednost nije definisana, a u svim ostalim slučajevima je vrijednost tangensa iracionalan broj.

Za $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ vrijednost izraza $\frac{(f-d)(c-a)-(d-b)(e-c)}{(e-c)(c-a)+(f-d)(d-b)}$ je racionalan broj ako je $\frac{2\pi}{n} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ što je moguće jedino za $k = 1$ ili $k = 2$, a tada je $n = 2$ ili $n = 1$, što ne zadovoljava zahtjev da je $n > 2$. U sučaju da je vrijednost izraza racionalna i iznosi 1, tada bi ugao $\frac{2\pi}{n} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ imao vrijednost $\varphi = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, odakle imamo jednakost $\frac{2}{n} = \frac{1}{4} + k$, odnosno $n = \frac{8}{4k \pm 1}, k \in \mathbb{Z}$, iz koje nalazimo da je jedino za $k = 0$ vrijednost $n = 8$. Dakle, postoji još jedan mnogougao osim pravougaonika, a to je jednakougaoni polupravilni osmougao koji možemo upisati cjelobrojnoj rešetki (slika 5a). Time je teorem potpuno dokazan.



Slika 5

3.2. *Jednakostrani polupravilni mnogouglovi*

Mnogouglove koji imaju jednake stranice, a različite unutrašnje uglove nazivamo jednakostrani polupravilni mnogouglovi. Primjer takvog četvorostranog polupravilnog mnogougla je romb. Mi analiziramo neke osobine polupravilnih jednakostranih mnogouglova koji se mogu upisati u cjelobrojnu rešetku $\mathbb{Z}^2$. Dajemo dokaz teoreme, koju je dokazao D. Boll imajući u vidu da je cjelobrojna mreža $\mathbb{Z}^2$ kompleksna cjelobrojna Gausova ravan.

Teorem 3.3. Na cjelobrojnoj rešetki $\mathbb{Z}^2$ možemo nacrtati svaki jednakostrani polupravilni mnogougao sa parnim brojem strana, a nijedan mnogougao sa neparnim brojem strana.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da možemo nacrtati jednakostrani polupravilni mnogougao sa neparnim brojem strana, i da su mu strane najmanje moguće dužine.

Neka je to mnogougao $A_1A_2A_3\cdots A_n$ i $n=2k-1, k\in\mathbb{N}$. Svaki vrh mnogougla je i čvor cjelobrojne rešetke $\mathbb{Z}^2$.Neka je O proizvoljna cjelobrojna tačka u mnogouglu izabrana za koordinantni početak. Kordinate vrha $A_k, k=1,2,\cdots,n$ mnogugla označimo sa (a_k,b_k), a odgovarajući kompleksan broj u Gausovoj ravni $\mathbb{Z}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}\}$ sa $z_k=(a_k,b_k)$ i $z_k=(a_k,b_k)=a_k+ib_k,\ a_k,b_k\in\mathbb{Z}\ , k=1,2,\cdots,n$ gdje su a_k,b_k odgovarajuće koordinate vrhova jednakostranog mnogougla.

Formirajmo razlike kompleksnih brojeva $z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n$ koji odgovaraju vrhovina mnogougla na sljedeći način:

$$z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i,$$

$$z_3-z_2=(a_3-a_2)+(b_3-b_2)i,\ldots\ z_1-z_n=(a_1-a_n)+(b_1-b_n)i$$

Primijetimo da ti kompleksni brojevi odgovaraju vektorima strana mnogougla i da im je dužina jednaka dužini strane (svi imaju iste module). Uvedimo oznake za te razlike respektivno sa:

$$\omega_1=\overrightarrow{A_1A_2}=z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i=x_1+y_1i,$$

$$\omega_2=\overrightarrow{A_2A_3}=z_3-z_2=(a_3-a_2)+(b_3-b_2)i=x_2+y_2i,\ \cdots;$$

$$\omega_n=\overrightarrow{A_nA_1}=z_n-z_1=(a_n-a_1)+(b_n-b_1)i=x_n+y_ni,$$ gdje su $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \cdots\overrightarrow{A_nA_1}$ vektori strana mnogougla. Kako za vektore strana mnogougla vrijedi jednakost

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots\overrightarrow{A_nA_1}=0$$

odnosno,

$$\omega_1+\omega_2+\cdots\omega_n=0\Leftrightarrow(x_1+x_2+\cdots x_n)+i(y_1+y_2+\cdots y_n)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \text{ i } y_1+y_2+\cdots+y_n=0.$$

Odavde, uzimajući u obzir da je $|\omega_1|=|\omega_2|=\cdots=|\omega_n|=a$ i $|\omega_k|^2=x_k^2+y_k^2=a^2,\ k=1,2,\cdots,n$ dolazimo do sistema jednačina

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ &y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0 \\ &x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \cdots = x_n^2 + y_n^2 = a^2 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Kvadriramo li prve dvije jednačine sistema (3.4), nakon grupisanja članova i uzimajući u obzir treću jednakost, nalazimo da je

$$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + \cdots + (x_n^2 + y_n^2) + 2\sum_{i \neq j}(x_i x_j + y_i y_j) = 0,$$

odnosno $na^2 + 2\sum_{i \neq j}(x_i x_j + y_i y_j) = 0$.

Kako je po pretpostavci $a \in \mathbb{N}$ (a je dužina stranice mnogougla čija početna i krajnja tačka imaju cjelobrojne koordinate), i $n \in \mathbb{N}$ neparan broj iz jednakosti

$$na^2 = -2\sum_{i \neq j}(x_i x_j + y_i y_j) \tag{3.5}$$

slijedi da je a^2 paran broj. Razmotrimo sada slučajeve:

1) Ako je a^2 djeljiv sa 4 tada su svi $x_i, y_i, i = 1,2,\cdots,n$ parni brojevi ako je parna suma kvadrata. Dakle tada bismo za $x_i = 2p, y_i = 2q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ imali $\omega_i = x_i + i \cdot y_i = 2p + 2qi = 2(p + iq)$ što znači da bi vektor $\frac{\omega_i}{2} = p + iq$ imao cijele koordinate od kojih bismo takođe mogli sastaviti jednakostrani polupravilni mnogougao čija je stranica duplo manja od stranice polaznog mnogougla, što je supratno pretpostavci da polazni mnogougao ima stranicu najmanje dužine. Dakle, a^2 nije djeljiv sa 4.

2) Neka je sada a^2 djeljiv sa 2, a nije djeljiv sa 4.Tada bi svi $x_i, y_i, i = 1,2,\cdots,n$ bili neparni. Odnosno, za $x_i = 2p + 1, y_i = 2q + 1, x_j = 2r + 1, y_j = 2s + 1,\ p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ vrijedi

Tabela 1.

n	x^n	x^{-n}	R_n
1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\sqrt{5}$
2	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	3
3	$\frac{2\sqrt{5}-4}{2}$	$\frac{2\sqrt{5}+4}{2}$	$2\sqrt{5}$
4	$\frac{7-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$	7
5	$\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$	$\frac{5\sqrt{5}+11}{2}$	$5\sqrt{5}$
6	$\frac{18-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18+\sqrt{5}}{2}$	18

$a^2 = x_i^2 + y_i^2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4(p^2+q^2) + 4(p+q) + 2 = 2m$

, gdje je

$m = 2(p^2+q^2) + 2(p+q) + 1,\ m \in \mathbb{Z}$.

Tada je $x_i x_j + y_i y_j = (2p+1)(2r+1) + (2q+1)(2s+1) = 2M,$ gdje je $M = 2(pr+qs) + 2(p+q+r+s) + 1.$

pa je suma na desnoj strani jednakosti (3.5) djeljiva sa 2. Otuda ponovo dobijamo da $4 \mid a^2$

što je suprotno pretpostavci da a^2 nije djeljiv sa 4, dakle ni ovaj slučaj nije moguć.

Na osnovu izloženog zaključujemo da se cjelobrojnoj rešetki $\mathbb{Z}^2$ može jedino upisati

jednakostrani polupravnilni mnogougao sa parnim brojem stranica. Da se može upisati svaki jednakostrani polupravilni mnogougao na cjelobrojanoj rešetki $\mathbb{Z}^2$ sa parnim brojem stranica, ilustrujmo na primjeru.

Primjer 1. U cjelobrojnoj mreži $\mathbb{Z}^2$ izaberemo proizvoljno četiri tačke i upišemo pravougaonik stranica $2b, c$. Nad stranicama pravougaonika dužine $2b$ konstruišemo jednakokrake trouglove visine a čiji je treći vrh čvor rešetke, tako da je a, b, c pitagorina trojka. Dobijamo mnogougao koji ima sve strane

dužine c. Odnosno, na taj način smo upisali šestougaoni jednakostrani mnogougao na rešetki $\mathbb{Z}^2$ stranice c. Sličnim postupkom lako se upiše u rešetku i drugi jednakostrani mnogouglovi.

Zadatak. (Kružnica upisana u rešetku $\mathbb{Z}^2$) Iz elementarne geometrije poznata nam je konstrukcija podjele date duži u omjeru zlatne proporcije. Neka je duž $\overline{AB}$

podijeljena tačkom S u omjeru zlatne proporcije. Tada vrijedi $\frac{|AS|}{|SB|} = \frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$ gdje je $x = |AS|, a - x = |SB|$. Iz te jednakosti imamo kvadratnu jednačinu $x^2 + ax - a^2 = 0$ čije je pozitivno rješenje $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$ gdje je a dužina duži $\overline{AB}$ koja je podijeljena u omjeru zlatnog reza. Neka je $\overline{AB}$ jedinična duž. Recipročna vrijednost pozitivnog korijena jednačine zlatnog reza $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$ za jediničnu duž je $x^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Formirajmo niz vrijednosti $R_n = x^n + x^{-n}, n \in \mathbb{N}$ Nekoliko članova tog niza dati su u tabeli 1. Pokazati da centralne kružnice $x_n + y_n = R_n^2$ upisane cjelobrojnoj rešetki sadrže 8 tačaka ako je n neparan broj, a ako je n paran broj sadrže 4 cjelobrojne tačke.

Literatura

Aškinuz 1963: Г. В. Ашкинузе, *Многоугольники и многогранники,Энциклопедия элементарной математики*, Книга 4, Геометрия,Москва, 382–447.

Ball 1973: D. G. Ball, *The constructability of regular and equilateral poligons on square pinboard*, Math. Gaz, V 57, 119–122.

Braun 2007: B. James Braun, *Ehrhart Theory for Lattice Polytopes*, Missouri, Disertation.

Coxter 1973: H. S. Coxeter, *Regular Polytopes*, New York, Dover Publ.

Egorov 1974: А. Егоров, *Решетки и правильные многоугольники*, Москва, Квант, № 12.

Govedarica 2005: V. Govedarica, *Neki problemi egzistencije i optimaizacije konveksnih cjelobrojnih poligona*, Istočno Sarajevo, Disertacija.

Grubman 1967: B. Grunbaum, *Convex Polytopes. Lnd, New York,* Sidney, Interscience Publ.

Hilbert 1932: D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Berlin.

Hinčin 1963: А. Я. Хинчин, П. С. Александров, А. И. Маркушевич, *Многоугольники и многогранники, Энциклопедия элементарной математики*, Книга 4, Геометрия, Москва, 382–447.

Lukas 1878: E. Lukas,*Theoreme sur la geometrie des quinconces*, Bull. Soc. Math. France, V61878,V6, 9–10.

Robinowitz 1986: S. Robinowitz, *Convex Lattice Polytopes*, Michigan, Diseertation.

Schenberg 1937: I. J. Schenberg, *Regular simplices and quadratic forms*, Math. Soc.,V.12.P.48–55. London.

Scherrer 1946: W. Scherrer, *Die Einlagerung eines regularen Vielecskin ein Gitter*, Elemente der Mathematik, V.1.,P.97–98.

Vavilov 2006a: В. В. Вавилов, А. В. Устинов, *Окружности на решетках,* Москва, Квант.

Vavilov 2006b: В. В. Вавилов, А. В. Устинов, *Многоугольники на решетках,* Москва.

Радослав В. Милошевић[*]
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра за математику и рачунарство

Прегледни рад

НЕКЕ НОВИЈЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЈЕ АЛГЕБРЕ ИСКАЗА

„У почетку бјеше ријеч (*логос*)
и ријеч (*логос*) бјеше у Бога
и Бог бјеше ријеч (*логос*)“.
(Св. Јев. по Јов. 1)

Увод

Математичка логика је наука чији су предмет проучавања математички докази. Објекти испитивања математичке логике су искази (судови), с којима се врше операције слично операцијама са бројевима у алгебри. Математичка логика се понекад назива и *метаматематика*. Математичка логика се примјењује у теорији електронских математичких машина (рачунара).

Данас се под укупним називом (логичких) основа математике подразумијева, поред логицизма, формализма и интуиционизма – још читав низ даљих математичко-логичких теорија.

Новији развој математике показао је да класичне методе логичког расуђивања којима се много вијекова служило, нису у оном смислу дискутабилне као што се то некад мислило. Појава антиномија или парадокса у теорији скупова посебно је показала да се о бесконачним скуповима не може увијек расуђивати на основу правила класичне логике апстраховане од оперисања са коначним скуповима. Као посљедица настале ситуације развијено је неколико програма реконструкције математике и математичко-логичког расуђивања уопште.

Из тог контекста о методама и резултатима савремене математичке логике у овом раду издвојићемо мање познате новије интерпретације алгебре исказа.

Скуповна интерпретација алгебре исказа

Постоји уска веза између алгебре исказа и алгебре скупова: Нека је $\mathscr{U}$ неки *непразни* скуп, *A, B, C,...* нека су његови подскупови. Проведимо ова придружења

($cA = \mathscr{U} - A$):

[*] radoslav_milosevic@yahoo.com

$$\neg A \leftrightarrow cA,$$
$$A \,\&\, B \leftrightarrow A \cap B,$$
$$A \vee B \leftrightarrow A \cup B,$$
$$A \Rightarrow B \leftrightarrow (cA) \cup B,$$
$$A \Leftrightarrow B \leftrightarrow \left[(cA) \cup B\right] \cap \left[(cB) \cup A\right],$$

$$A \underline{\vee} B \leftrightarrow \left[A \cap (cB) \cup \left[B \cap (cA)\right]\right],$$
$$A \uparrow B \leftrightarrow c(A \cap B),$$
$$A \downarrow B \leftrightarrow c(A \cup B)$$

и проширимо их рекурзивно на формуле алгебре исказа. Тада ће формула $\mathscr{A}$ алгебре исказа бити идентички истинита онда и само онда ако за њој придружену формулу $\mathscr{A}'$ алгебре скупова вриједи $\mathscr{A}' = \mathscr{U}$.

Нпр. $A \vee (\neg A) \leftrightarrow A \cup (cA) = \mathscr{U}$, $\neg(A \wedge \neg A) \leftrightarrow c(A \cap (cA)) = \mathscr{U}$.

Интерпретација алгебре исказа по модулу 2

Придружимо вриједности истинитости $\top$ број 1, а вриједности истинитости $\bot$ број 0. Тада је $\tau(\neg A) = (1 + \tau A)$ (мод 2), $\tau(A \wedge B) = (\tau A) \cdot (\tau B)$ (мод 2), $\tau(A \vee B) = (\tau A + \tau B + \tau A \cdot \tau B)$ (мод 2) итд. Формула $\mathscr{A}$ алгебре исказа биће идентички истинита онда и само онда ако је $\tau\,\mathscr{A} \equiv 1$ (мод 2).

Аритметичка интерпретација алгебре исказа

Придужимо опет вриједности истинитости $\top$ број 1, а вриједности истинитости $\bot$ број 0. Тада је:

$$\tau(\neg A) = 1 - \tau A,$$
$$\tau(A \wedge B) = \tau A \cdot \tau B,$$
$$\tau(A \vee B) = \tau A + \tau B - \tau A \cdot \tau B,$$
$$\tau(A \Rightarrow B) = 1 - \tau A + \tau A \cdot \tau B,$$
$$\tau(A \Leftrightarrow B) = 1 - \tau A - \tau B + 2\tau A \cdot \tau B,$$
$$\tau(A \underline{\vee} B) = \tau A + \tau B - 2\tau A \cdot \tau B,$$
$$\tau(A \uparrow B) = 1 - \tau A \cdot \tau B,$$
$$\tau(A \downarrow B) = 1 - \tau A + \tau B + \tau A \cdot \tau B$$

Формула $\mathscr{A}$ алгебре исказа биће идентички истинита онда и само онда ако је $\tau\,\mathscr{A} \equiv 1$ Нпр. (због τ A = 0 или 1 увијек је $(\tau A)^2 = \tau A$ итд.): Нека је

$\mathscr{A} \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$; означимо $\tau A = a, \tau B = b$. Тада је:

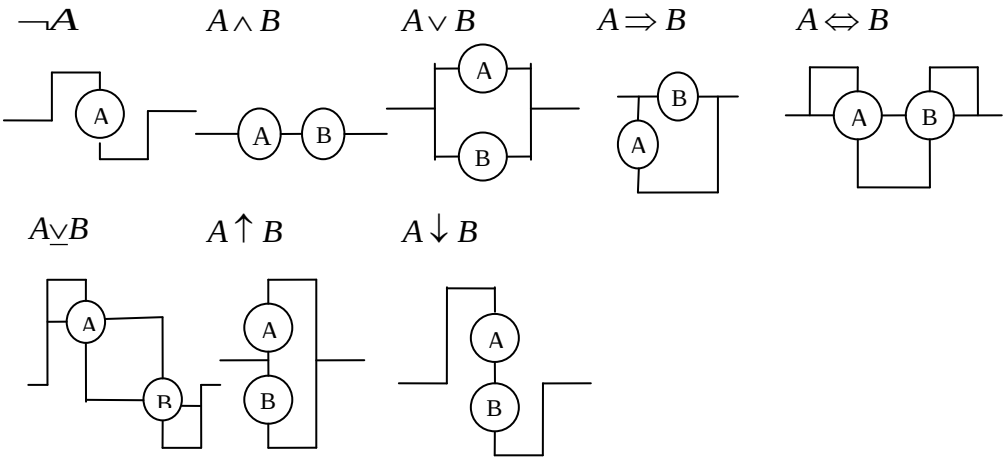
$$\tau A = 1 - \tau(A \Rightarrow B) + \tau(A \Rightarrow B) \cdot \tau((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A) =$$

$$= 1 - (1 - a + ab) + (1 + a + ab)\left[1 - (1 - a + a(1-b)) + (1 - a + a(1-b))(1-a)\right] \equiv 1$$

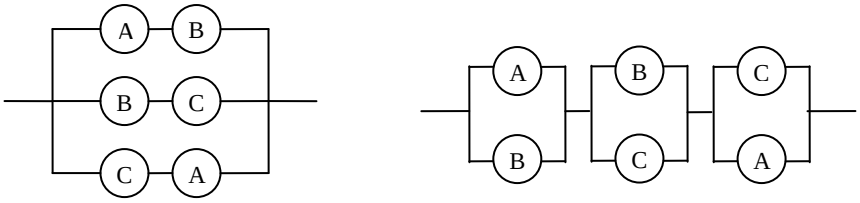
Интерпретација алгебре исказа електричним склоповима са прекидачима

Придружимо варијаблама судова прекидаче; вриједности истинитости T исказа нека одговара хоризонтални положај прекидача – а вриједности истинитости $\perp$ нека одговара вертикални положај прекидача |.

Сложеним судовима придружићемо скупове с одговарајућим прекидачима тако да вриједности истинитости T сложеног исказа одговара *пролажење* струје кроз склоп („хоризонтално“), а вриједности истинитости $\perp$ *немогућност* пролажења струје кроз склоп. Склопови су тада нпр. ови:



Једнакости формула алгебре исказа одговара „једнако функционисање“ одговарајућих склопова; нпр. због $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ склопови функционишу једнако. Такође према ранијем једнако функционишу склопови.



Перфектна дисјунктивна односно перфектна конјуктивна форма омогућују да се за било коју задану функцију алгебре исказа констатују скупови који ће функционисати на одговарајући начин.

Алгебра исказа у уској је вези и са *Буловом алгебром и Бловим прстенима* у што овдје нећемо улазити.

Литература

Аврамов 1970: Аврамов Д. А., *Математичка логика и скупови,* Техничка књига, Загреб.

Гилезан, Латиновић 1977: Гилезан К., Б. Латиновић, *Булова алгебра и примјене*, Математички институт, Београд.

Девиде 1964: Владимир Девиде: *Математичка логика*, Математички институт, Београд.

Калужнин 1971: Л. А. Калужнин: *Што је математичка логика*, (превод: Д. Стошић), Школска књига, Загреб.

Новиков 1959: П. С. Новиков, *Элементы матиматечской логики*, Физматгиз, М.

Прешић 1968: Славиша Б. Прешић: *Елементи математичке логике*, Завод за издавање уџбеника СР Србије, Београд.

Алија Р. Мандак*
Универзитет у Приштини
Учитељски факултет Призрен – Лепосавић Оригинални научни рад

ФРОБЕНИУСОВА ГРУПА РЕДА 20 И ПРОЈЕКТИВНА РАВАН РЕДА 9

1. *Неке дефиниције и резултати*

Структура инциденције је тројка D = (V, B, I), где су V и B дисјунктни скупови и I $\subseteq$ V $\times$ B. Елементи скупа V зову се *тачке*, елементи скупа B зову се *блокови.* Ако је A тачка скупа V онда скуп свих блокова који су инцидентни са тачком A означава се са (A). Тако је

(A) = {b: b $\in$ B, A I b}.

Даље, за A_1, A_2, …, A_n, скуп свих блокова инцидентних са свим тачкама A_1, A_2, …, A_n означава се са (A_1, A_2, …, A_n). Тако је

(A_1, A_2, …, A_n) = {b: b $\in$ B, A_i I b for all i $\in$ N_n},

где је N скуп свих позитивних целих бројева, N_n = {1, 2, …, n}. Дуално, за b, b_1, b_2, …, $b_n \in$ B,

(b) = {A: A $\in$ V, A I b},

(b_1, b_2, …, b_n) = {A: A $\in$ V, A I b for all i $\in$ N_n}.

Ми ћемо разматрати структуре инциденције у којима су различити блокови инцидентни са различитим скуповима тачака. Сваки блок b се ицентификује са скупом тачака (b) а релација инциденције идентификује се са обичном релацијом $\in$.

Дефиниција 1. Структура инциденције P = (V, B, I) зове се *пројективна раван* ако и само ако испуњава следеће аксиоме:

(P. 1) Било које две различите тачке спојене су са тачно једном правом.

(P. 2) Било које две различите праве секу се тачно у једној тачки.

(P. 3) Постоји *четвороугао,* тј. 4 тачке од којих било које три нису на заједничкој правој.

Следећа теорема је доказана у [1].

Теорема 1. Нека је P = (V, B, I) коначна пројективна раван. Постоји природни број n, зове се *ред* равни P, који испуњава:

a) $|(A)| = |(g)| = n + 1$ за све A $\in$ V и g $\in$ B;

b) $|V| = |B| = n^2 + n + 1$.

* alija.mandak@pr.ac.rs

Коначна пројективна раван реда n означава се са $S(2, n + 1, n^2 + n + 1)$.

2. *Конструкција пројективне равни реда девет*

Теорема 2. Група Фробениуса G реда 20 делује на пројективну раван P реда девет као група колинеација. Користећи ово деловање раван P се може конструисати.

Доказ. Нека је

$$G = \left\langle \rho, \alpha / \rho^9 = \alpha^2 = 1, \rho^\alpha = \rho^{-1} \right\rangle.$$

Група Фробениуса реда 20 која делује на пројективну раван P реда 9 као група колинеација. Раван P има $9^2 + 9 + 1 = 91$ тачака и исто толико правих. Из $91 = 10 \cdot 9 + 1$ и из тврђења да колинеација $\langle \rho \rangle$ делује семирегуларно на нефиксним тачкама следи да $\langle \rho \rangle$ има 9 орбита тачака дужине 10 и једну орбиту дужине 1. Можемо узети да је

$\rho = (\infty)(1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_9)(2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_9)(3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_9) \cdots (9_0, 9_1, 9_2, \cdots 9_9)$

Где су $1_0, 1_1, 1_2, \cdots 1_9, 2_0, 2_1, 2_2, \cdots 2_9, 3_0, 3_1, 3_2, \cdots 3_9, \cdots 9_0, 9_1, 9_2, \cdots 9_9$ све тачке равни P.

Из теореме о орбитама следи да $\langle \rho \rangle$ има исту структуру орбита правих. Можемо узети да је

$$\rho = (\ell_\infty)(\ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \cdots, \ell_1\rho^9)(\ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \cdots, \ell_2\rho^9)$$
$$(\ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \cdots, \ell_3\rho^9) \cdots (\ell_9, \ell_9\rho, \ell_9\rho^2, \cdots, \ell_9\rho^9)$$

где су

$$\ell_\infty, \ell_1, \ell_1\rho, \ell_1\rho^2, \cdots, \ell_1\rho^9, \ell_2, \ell_2\rho, \ell_2\rho^2, \cdots, \ell_2\rho^9, \ell_3, \ell_3\rho, \ell_3\rho^2, \cdots, \ell_3\rho^9, \cdots,$$
$$\ell_9, \ell_9\rho, \ell_9\rho^2, \cdots, \ell_9\rho^9$$

све праве равни P.

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle \rho \rangle$. Можемо узети да је

$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \cdots, 1_9\}$.

Нека је ℓ_∞ јединствена фиксна права колинеације $\langle \rho \rangle$. Можемо узети да је

$\ell_\infty = \{1_0, 1_1, 1_2, \cdots, 1_{16}\}$.

Нека је ℓ_1 права која пролази кроз ∞. Очигледно је да ℓ_1 садржи по једну тачку из сваке орбите тачака. Без губитка општости можемо узети да је

$\ell_1 = \{\infty, 1_0, 2_0, \cdots, 9_0\}$.

Осталих девет правих орбите правих којој припада права ℓ_1 добијају се деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots, \rho 9$ на праву ℓ_1. Праве ℓ_1 и ℓ_∞ пролазе кроз 1_0. Осталих осам правих $\ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_9$ које пролазе кроз 1_0 леже у осам преосталих различитих $\langle\rho\rangle$ – орбита правих равни P. Ако се конструишу ове праве онда преостале све праве равни P се добијају деловањем колинеација $\rho, \rho^2, \rho^3, \cdots, \rho^9$ на праве $\ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_9$. Из услова

$\left|\ell_i \cap \ell_1 \rho^k\right| = 1$, i = 2, 3, ⋯, 9, k = 0, 1, 2, 3, ⋯, 9

Следи да је

$\ell_i = \{1_0, 1'_1, 2'_2, 3'_3, \cdots, 9'_9\}$,

где су 1', 2', 3', 4', ..., 9' (необавезно различити) бројеви скупа {2, 3, ⋯, 9}.

Сада испитујемо деловање колинеације α на скуп тачака и скуп правих равни P. Како је ред инволуције α паран следи да је инволуција α елација. Из $\rho^\alpha = \rho^{-1}$ следи да је 1_0 центар и права ℓ_1 оса инволуције α. Отуда, инволуција α фиксира 10 правих $\ell_\infty, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_9$ и 10 тачака ∞, 1_0, 2_0, 3_0, ⋯, 9_0. Из 91 = 2 · 40 + 11 следи да α има 11 орбита тачака дужине 1 (11 фиксних тачака) и 40 орбита тачака дужине 2. Ако орбитарну структуру колинеације α запишемо у скраћеном облику (записујући само индексе 0, 1, 2, 3, ⋯, 9) можемо узети да је

α = (0)(1)(2, 9)(3, 8)(4, 7)(5, 6),

где (2, 9) означава даје 2α = 9 из исте орбите тачака, (3, 8) означава да је 3α = 8 из исте орбите тачака, (4, 7) означава да је 4α = 7 из исте орбите тачака, (5, 6) означава да је 5α = 6 из исте орбите тачака. Из тврђења

$\ell_i \alpha = \ell_i$, i = 2, 3, ⋯, 9

следи да су праве ℓ_i, i = 2, 3, ⋯, 9 типа

$\ell_i = \{1_0, i_1, a_2, a_9, b_3, b_8, c_4, c_7, d_5, d_6\}$,

где су a, b, c, d према паровима различити бројеви скупа {2, 3, ⋯, 9}. Можемо узети да је

$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 2_2, 2_9, 3_3, 3_8, 4_4, 4_7, 5_5, 5_6\}$.

Сада се конструишу праве ℓ_i, i = 3, 4, ⋯ , 9 које су типа

$\ell_2 = \{1_0, 2_1, 2_2, 2_9, 3_3, 3_8, 4_4, 4_7, 5_5, 5_6\}$.

Из тврђења

$\left|\ell_i \cap \ell_2 \rho^k\right| = 1$, i = 3, 4, ⋯ , 9, k = 0, 1, 2, ⋯ , 9

следи да су само два из бројева a, b, c, d из скупа {2, 3, 4, 5} а остала два су из скупа {6, 7, 8, 9}. Из тврђења

$\left|\ell_i \rho^s \cap \ell_j \rho^k\right| = 1$, i ≠ j, i, j = 3, 4, ⋯ , 9, k, s = 0, 1, 2, ⋯ , 9

следи да праве ℓ_i и ℓ_j, i ≠ j, имају тачно два заједничка пара бројева a, b, c, d. Користећи ово тврђење за праве ℓ_i, i = 3, 4, ⋯ , 9 добија се следеће јединствено решење за ове праве:

$\ell_3 = \{1_0, 3_1, 2_3, 2_8, 3_2, 3_9, 8_5, 8_6, 7_4, 7_7\}$

$\ell_4 = \{1_0, 4_1, 3_4, 3_7, 4_2, 4_9, 7_5, 7_6, 9_3, 9_8\}$

$\ell_5 = \{1_0, 5_1, 2_4, 2_7, 5_2, 5_9, 7_3, 7_8, 9_5, 9_6\}$

.
.
.

$\ell_9 = \{1_0, 6_1, 3_5, 3_6, 5_4, 5_7, 6_3, 6_8, 7_2, 7_9\}$

Теорема је доказана.

3. *Закључак*

Овај рад презентује резултат добијен деловањем групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P за коју унапред знамо да постоји. Слично може се испитивати деловање групе колинеација на скуп тачака и скуп правих равни P чије је питање егзистенције отворено.

Литература

Бет и др. 1985: T. Beth и др., *Design theory*, Manheim,Wien, Zurich.

Димовски, Мандак 1992: D. Dimovski, A. Mandak, *Incidence structures with n-metrics, Rad u Zborniku radova Filozofskog fakulteta Univerziteta u Nišu, 6/1992, 151–155*, Niš, Filozofski fakultet Univerziteta u Nišu.

Димовски, Мандак 1999: D. Dimovski, A. Mandak, *Weighted block designs and Steiner systems*, Math. Vol. 29, No. 2 (1999), 163–169, Novi Sad.

Ленз 1965: H. Lenz, *Vorlesungen uber projective geometrije*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

Мандак 1994: A. Mandak, *On weighted block designs*, Proc. Math. Conf, 21–25, Priština.

Мандак 2007: A. Mandak, *Multiquasigroups and weighted projective planes*, J. Math. 30/2007, 211–219, Kragujevac.

Ушан 1989: J. Ušan, *<Nn, E>-seti s (n + 1)-rastojaniem*, Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math, 17, 2/1989, 65–87, Novi Sad, Univerzitet u Novom Sadu.

Чупона и др. 1981: G. Čupona i dr., *On finite multiquasigroups*, 20 (43) 1981, 53–59, Beograd, Publ. Inst. Math.

Чупона и др. 1980: G. Čupona i dr., *Multiquasigroups and some related structures*, Skopje, Prilozi MANU I/1.

Видан Љ. Говедарица[*]
Универзитет у Источном Сарајеву
Електротехнички факултет
Марко Љ. Ћитић
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет Пале
Катедра з аматематику и рачунарство

Оригинални научни рад

КОНВЕКСНИ ЦЈЕЛОБРОЈНИ ПОЛИГОНИ СА ГРАНИЧНИМ ТРАПЕЗИМА

Конвексни цјелобројни петоуглови са граничним трапезима

Нека је дат конвексан петоугао *ABCDE*. Са његових *5* тјемена одређено је *5* четвороуглова. Претпоставимо да су међу тих *5* четвороуглова четири трапеза. Докажимо да тада и пети четвороугао мора бити трапез.

Теорема 1. *Ако је свака од четири дијагонале конвексног петоугла паралелна са неком његовом страницом, онда је и пета дијагонала паралелна са преосталом страницом.*

*Доказ***.** Примијетимо прво да у том петоуглу не могу двије странице да буду паралелне. Заиста, ако би, на примјер, било *AB* || *CD*, тада би највише један од четвороуглова *ABCE* и *ABDE*, односно највише један од четвороуглова *ACDE* и *BCDE* могао да буде трапез, па би међу тих *пет*четвороуглова постојала највише три трапеза.

Дакле, можемо претпоставити да је BD || AE, CE || BA, AD || BC и BE || CD. Тада постоје позитивни бројеви *m,n,p,q* такви да је:

$\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC} = n\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE} = q\overrightarrow{CD}$.

Треба доказати да је *AC* || *ED*.

Уз ознаке $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ имамо:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = (1-n)\vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + (p-1)\vec{b}$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + q\overrightarrow{CD} = (1-q)\vec{a} + q(p-1)\vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\vec{b} + m\overrightarrow{AE} = m(1-n)\vec{a} + (m-1)\vec{b}$,

одакле слиједи да је

$1-n = 1-q$,

$1 = q(p-1)$,

$-1 = m(1-n)$,

$p-1 = m-1$.

[*] vidangov@yahoo.com

Из прве једначине је $q = n$, а из четврте $p = m$. Замјењујући у другу једначину добијамо да је $1 = n(m-1)$. Одавде и из $1 = m(n-1)$, слиједи да је $m = n$, што значи да је $m = n = p = q$ и

$m^2-m-1=0$, тј.

$m = n = p = q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Сада је

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (n-1)\vec{a} - \vec{b} + \vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + (p-1)\vec{b} =$

$= (n-1)\vec{a} + (p-1)\vec{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AC}$,

тј. $AC \parallel ED$. Теорема је доказана.

Ако је петоугао $ABCDE$ цјелобројан онда су бројеви m, n, p и q рационални, па важи бољи резултат.

Теорема 2. *У конвексном цјелобројном петоуглу постоје бар двије дијагонале које нису паралелне ни са једном његовом страницом. У конвексном цјелобројном петоуглу међу пет четвороуглова одређених његовим тјеменима могу бити највише три трапеза.*

Конвексни цјелобројни шестоуглови са граничним трапезима

Мотивисани претходним резултатима размотримо конвексне шестоуглове. Прво ћемо доказати двије леме.

Лема 1. *Нека је $n \geq 6$ и нека су у конвексном n-углу $A_1A_2\ldots A_n$ бар $n-1$ граничних четвороуглова трапези. Тада за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи*

$\sphericalangle A_i + \sphericalangle A_{i+1} > 180°$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је $\sphericalangle A_i + \sphericalangle A_{i+1} \leq 180°$ за неко $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Имамо сљедећа два случаја:

1° $\sphericalangle A_i + \sphericalangle A_{i+1} < 180°$.

Ако је четвороугао $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$ трапез онда је $A_{i-1}A_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ па, због конвексности, ниједан од четвороуглова $A_{i-2}A_{i-1}A_i\,A_{i+1}$ и $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ не може бити трапез. Дакле, граничних трапеза има највише $n-2$, што је супротно претпоставци.

Ако четвороугао $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$ није трапез, тада су четвороуглови $A_{i-2}A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ трапези, одакле слиједи да је $A_{i-1}A_{i-2} \parallel A_iA_{i+1}$ и $A_{i+3}A_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$, тј. конвексан полигон има три паралелне странице, што је немогуће.

2° $\sphericalangle A_i + \sphericalangle A_{i+1} = 180°$.

Ако су оба гранична четвороугла $A_{i-2}A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ трапези онда, због конвексности, мора бити $A_{i-1}A_{i-2} \parallel A_iA_{i+1}$ и $A_{i+3}A_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ тј.опет имамо три паралелне странице, што је немогуће.

Ако, на примјер четвороугао $A_{i-2}A_{i-1}A_iA_{i+1}$ није трапез, онда је $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ трапез па је $A_{i+3}A_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$. Међутим, тада четвороугао $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}A_{i+4}$ не може бити трапез. Контрадикција.

Дакле, $<A_i + <A_{i+1} > 180°$ за свако $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Лема је доказана.

Нека је дат конвексан n-угао $A_1A_2\dots A_n$. Означимо са $a_i = \overrightarrow{A_iA_i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, гдје је $A_0 \equiv A_n$, $A_{n+1} \equiv A_1$. Уз ове ознаке вриједи сљедећа лема

Лема 2. *Нека је $n \geq 6$ и нека су у конвексном n-углу $A_1A_2\dots A_n$ бар n-1 граничних четвороуглова трапези. Тада у сваком од тих трапеза $A_{i-1}A_i A_{i+1}A_{i+2}$ важи*

$a_{i-1} + a_{i+1} = \kappa_i a_i$

гдје је κ_i позитиван број .

Доказ. На основу претходне леме је $A_{i-1}A_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ и $A_{i-1}A_{i+2} > A_iA_{i+1}$, па постоји број $l_i > 1$ такав да је $\overrightarrow{Ai - 1Ai + 2} = l_i a_i$, одакле добијамо редом:

$a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = l_i a_i$

$a_{i-1} + a_{i+1} = (l_i - 1)\, a_i$

$a_{i-1} + a_{i+1} = \kappa_i a_i$

гдје је $\kappa_i = l_i - 1$ позитиван број. Лема је доказана.

Теорема 3. *Нека у конвексном шестоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ важи $A_iA_{i+1} \parallel A_{i-1}A_{i+2}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ($A_0 \equiv A_6$, $A_1 \equiv A_7$). Тада је $A_6A_1 \parallel A_5A_2$.*

Доказ. Означимо са $a_i = \overrightarrow{AiAi + 1}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ векторе страница тог шестоугла. Из датих услова и леме 2 слиједи да постоје позитивни бројеви k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 такви да је:

$a_6 + a_2 = \kappa_1 a_1$

$a_1 + a_3 = \kappa_2 a_2$

$a_2 + a_4 = \kappa_3 a_3$

$a_3 + a_5 = \kappa_4 a_4$

$a_4 + a_6 = \kappa_5 a_5$.

Изразимо векторе a_1, a_2 , a_5 , a_6 преко вектора a_3 и a_4 . Добијамо редом да је:

$a_2 = \kappa_3 a_3 - a_4$,

$a_5 = \kappa_4 a_4 - a_3$,

$a_1 = \kappa_2 a_2 - a_3 = \kappa_2(\kappa_3 a_3 - a_4) - a_3 = (\kappa_2\kappa_3 - 1)a_3 - \kappa_2 a_4$,

$a_6 = \kappa_5 a_5 - a_4 = \kappa_5(\kappa_4 a_4 - a_3) - a_4 = (\kappa_4\kappa_5 - 1)a_4 - \kappa_5 a_3$,

$a_6 = \kappa_1 a_1 - a_2 = \kappa_1((\kappa_2\kappa_3 - 1)a_3 - \kappa_2 a_4) - (\kappa_3 a_3 - a_4) = (\kappa_1\kappa_2\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_3)a_3 - (\kappa_1\kappa_2 - 1)a_4$.

Пошто су вектори a_3 и a_4 линеарно независни, из последње двије једнакости слиједи да је:

$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 - \kappa_1 - \kappa_3 + \kappa_5 = 0$, (1)

$1 - \kappa_1\kappa_2 = \kappa_4\kappa_5 - 1$. (2)

Како је $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$, тј.

$(\kappa_2\kappa_3-1)a_3- \kappa_2a_4+ \kappa_3a_3+ \kappa_4a_4+(\kappa_4\kappa_5-1)a_4-\kappa_5a_3 = 0,$
добијамо још двије једначине

$\kappa_2\kappa_3-1+\kappa_3-\kappa_5 = 0,$ (3)
$\kappa_4\kappa_5-1+\kappa_4-\kappa_2 = 0.$ (4)

Треба доказати да је је $a_5+a_1 \parallel a_6$, гдје је

$a_5+a_1 = (\kappa_2\kappa_3-2)a_3 + (\kappa_4-\kappa_2)a_4,$ (5)
$a_6 = (\kappa_4\kappa_5-1)a_4-\kappa_5a_3.$ (6)

Сабирањем једнакости (1) и (3) добијамо да је
$\kappa_1\kappa_2\kappa_3-\kappa_1+ \kappa_2\kappa_3-1 = 0,$
односно
$(\kappa_1+1)(\kappa_2\kappa_3-1) = 0,$
одакле слиједи да је $\kappa_2\kappa_3 = 1$ (јер је $\kappa_1>0$). Из (1) сада добијамо да је $\kappa_3 =\kappa_5,$
тј. $\kappa_3 =\kappa_5=1/\kappa_2$.
Сабирањем једнакости (2) и (4) добијамо
$1-\kappa_1\kappa_2 + \kappa_4-\kappa_2 = 0,$
одакле је

$\kappa_4 = \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2 -1.$ (7)

Замјењујући ове вриједности за κ_4 и κ_5 у (2) добијамо
$1-\kappa_1\kappa_2 = (\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2 -1) \kappa_2^{-1} -1,$
што је еквивалентно редом са:
$\kappa_2-\kappa_1\kappa_2^2 = \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2 -1-\kappa_2$,
$\kappa_2 +1 = \kappa_1\kappa_2^2 + \kappa_1\kappa_2$,
$\kappa_2 +1 = \kappa_1\kappa_2(\kappa_2 +1)$,
$\kappa_1\kappa_2 = 1$.
Сада из (7) слиједи да је $\kappa_4 = \kappa_2$. Ми смо, у ствари, доказали да је $\kappa_1 = \kappa_3 = \kappa_5$ и $\kappa_4 = \kappa_2=\kappa_1^{-1}$, јер из $\kappa_1\kappa_2 = 1$ и $\kappa_2\kappa_3 = 1$ слиједи $\kappa_1 = \kappa_3$.
Коначно, из (5) и (6) добијамо да је
$a_5+a_1 = -a_3$ *и* $a_6 = -\kappa_1a_3$,
одакле слиједи да је $a_5+a_1 \parallel a_6$, тј. $A_5A_2 \parallel A_6A_1$. Теорема је доказана.
На основу претходне теореме и леме 2 добијамо да важи сљедеће тврђење.

Теорема 4. *Ако су у конвексном шестоуглу пет граничних четвороуглова трапези, онда је и шести гранични четвороугао трапез.*

Конвексни цјелобројни шестоуглови код којих су сви гранични четвороуглови трапези постоје. Такви су, на примјер, шестоуглови $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$,

гдје је $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(2,1)$, $A_4(2,2)$, $A_5(1,2)$, $A_6(0,1)$ и $B_1(0,0)$, $B_2(2,0)$, $B_3(4,2)$, $B_4(3,3)$, $B_5(-1,3)$, $B_6(-2,2)$. У првом од њих је $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = \kappa_6 = 1$, а у другом

$\kappa_1 = \kappa_3 = \kappa_5 = 2$ и $\kappa_2 = \kappa_4 = \kappa_6 = 1/2$, при чему је $a_5 + a_1 = \kappa_6 a_6$.Теорема је доказана.

Да бисмо за паран природан број n већи од 4 дали одговор на друго питање, користићемо сљедеће тврђење.

Теорема 5 (Говедарица 2005, Рабиновиц 1986). *За сваки природан број n већи од 1 постоји конвексан цјелобројан 2n-угао код кога сви гранични троуглови имају површину 1/2.*

Доказ. Рабиновиц је у (1986) са циљем конструкције конвексног цјелобројног $2n$-угла минималне површине, конструисао конвексан цјелобројан $2n$-угао на сљедећи начин:

Нека је $A_1=(0,0)$ и $B_1=(1,0)$. Дефинишимо $A_2,\ldots,A_n$ рекурзивно са $A_{k+1} = A_k+(k+1,1)$ и $B_2,\ldots,B_n$ рекурзивно са $B_{k+1} = B_k+(n-k,1)$ за $k=1,\ldots,n-1$. На овај начин смо добили конвексан цјелобројан $2n$-угао.

Како је $A_2=(1,1)$ и $B_2=(n,1)$, површине троуглова $A_2A_1B_1$ и $A_1B_1B_2$ су једнаке $1/2$.

Из $B_{k+1} = B_k+(n-k,1)$ и $B_{k+2} = B_{k+1}+(n-k-1,1) = B_k+(2n-2k-1,2)$, слиједи да је површина сваког од троуглова $B_kB_{k+1}B_{k+2}$ $(k=1,2,\ldots,n-2)$, такође $1/2$. Како је овај $2n$-угао централно симетричан сви његови гранични троуглови имају површину једнаку $1/2$. Теорема је доказана.

Како су површине свака два узастопна гранична троугла $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ конвексног цјелобројног $2n$-угла $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$ конструисаног у претходној теореми међусобно једнаке, слиједи да је $A_{i-1}A_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$, тј. важи сљедеће тврђење

Теорема 6. *За сваки природан број n већи од 1 постоји конвексан цјелобројан 2n-угао код кога су сви гранични четвороуглови трапези.*

Литература

Brass, Moser, Pach 2003: Brass, P., Moser, W., Pach, J., *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer.

Erdos, Suranyi 2003: Erdos, P., Suranyi, J., *Topics in the Theory of Numbers*, Springer-Verlag, New York.

Govedarica 2005: Govedarica, V., *Neki problemi egzistencije i optimizacije konveksnih cjelobrojnih poligona*, Doktorska disertacija, Filozofski fakultet, Pale.

Hardy, Wright 1960: Hardy, G. H., Wright, E. M., *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, London.

Olds, Lax, Davidoff 2000: Olds, C. D., Lax, A., Davidoff, G., *The Geometry of Numbers*, Matrhematical Association of America, Washington.

Pick 1990: Pick, G., *Geometrisches zur zahlenehre*, Sitzungber, Lotos, Prag., (19): 311–319.

Rabinowitz 1986: Rabinowitz, S., *Convex Lattice Polytopes*, PhD thesis, Polytechnic University, Brooklyn, New York.

Simpson 1990: Simpson, R. J, *Convex lattice polygons of minimum area*, Bull. Austral. Math. Soc., 42: 353–367.

Katija J. Lonza*
ITI-Computers
Dubrovnik

Originalni naučni rad

DEFINIRANJE PSEUDOULTRAMETRIKE NA PROFINITNIM STRUKTURAMA

1. *Uniformnost*

Neka je X skup. Podskup produkta X×X možemo prikazati relacijama na skupu X. Ako su U i V podskupovi produkta X×X, tada je skup UV = {(x, y) ∈ X×X | postoji z ∈ X, (x, z) ∈ U i (z, y) ∈ V} kompozicija dviju relacija. Ukoliko x ∈ X i U ⊆ X×X, tada sa U(x) označavamo skup {y ∈ X | (x, y) ∈ U}.

Definicija 1.1. *Uniformnost* (ili *uniformna struktura*) *U* na skupu X je neprazan skup podskupova produkta X×X koji zadovoljava sljedeća svojstva:

(1) ako podskup U ∈ X×X sadrži element V ∈ *U*, tada U ∈ *U*,

(2) presjek bilo koja dva elementa skupa *U* sadrži element iz *U*,

(3) svaki element skupa *U* sadrži diagonalu produkta X×X,

(4) za svaki U ∈ *U*, *transponirana relacija* U^t = {(x, y) ∈ X×X | (y, x) ∈ U} ∈ *U*,

(5) za svaki U ∈ *U*, postoji V ∈ *U* takvo da VV ⊆ U, tj. kadgod (x, y) i (y, z) pripadaju V, tada (x, z) pripada U.

Ako je uniformnost *U* definirana na skupu X, tada njezine elemente nazivamo *okolinama uniformnosti*, a par (X, *U*) (ili samo X ukoliko se *U* podrazumijeva) nazivamo *uniformnim prostorom*.

Fundamentalni sistem okolina uniformnosti *U* je bilo koji skup *B* sastavljen od okolina uniformnosti takvih da bilo koja okolina iz *U* sadrži neki skup iz *B*. Napomenimo da je relacija U *simetrična* ukoliko je U^t = U. Svaki uniformni prostor sadrži fundamentalni sistem okolina koji se u stvari sastoji od simetričnih okolina.

Uvedemo li definiciju kojom je podskup O prostora X *otvoren* ako i samo ako za svaki element x iz O postoji odgovarajuća okolina V takva da je V(x) podskup od O, tada možemo reći da uniformni prostor poprima sve osobine topološkog prostora.

Pri tome je moguće na skupu X definirati jedinstvenu topologiju za koju skup *U*(x) = { U(x) | U ∈ *U* } predstavlja *filter okolina* točke x, za svako x ∈ X. Ovakvu topologiju definiranu na skupu X pomoću uniformne strukture nazivamo *topologijom induciranom pomoću uniformnosti U*. Ukoliko se topologija definirana pomoću uniformne strukture podudara s inicijalnom

* katija.lonza1@du.htnet.hr

topologijom tada kažemo da je uniformna struktura na topološkom prostoru *kompatibilna* s topologijom.

Ako je inducirana topologija Hausdorffova, tada je uniformni prostor (X, *U*) *Hausdorffov.*

Baza uniformne strukture *U* je podskup *B* od *U* takav da svaki element iz *U* sadrži neki element iz *B.* Ako se *U* sastoji od svih relacija na skupu X koje sadrže elemente baze *B*, tada kažemo da je *U generiran* pomoću *B.* Dakle, skup *B* koji sadrži podskupove produkta X×X je baza neke uniformne strukture ako i samo ako su zadovoljena svojstva (2) do (5). Napomenimo da je okolina uniformnosti U *tranzitivna* ukoliko je UU ⊆ U. Za uniformni prostor *U* kažemo da je *tranzitivan* ako posjeduje bazu sastavljenu od tranzitivnih okolina.

Neka su (X, *U*) i (Y, *V*) uniformni prostori. Za funkciju φ: X → Y kažemo da je *uniformno neprekidna* ako je, za svaku okolinu V od *V*, $(\varphi\times\varphi)^{-1}$(V) okolina uniformnog prostora *U*, ili, ekvivalentno ovome, ako postoji okolina U ∈ *U* takva da je φ(U) ⊆ V. Sve uniformno neprekidne funkcije su neprekidne s obzirom na induciranu topologiju.

Dakle, kao što neprekidne funkcije između topoloških prostora zadržavaju topološka svojstva, tako uniformne neprekidne funkcije između uniformnih prostora zadržavaju uniformna svojstva.

2. *Pseudoultrametrika*

Svaki metrički prostor možemo promatrati kao uniformni prostor. Poznato name je da *metriku* na skupu X definiramo kao preslikavanje *d*: X×X → R^+ koje zadovoljava sljedeće uvjete:

(1) za svako x, y ∈ X, $d(x, y) \geq 0$,
(2) za svako x, y ∈ X, $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
(3) za sve x, y ∈ X, $d(x, y) = d(y, x)$,
(4) ako x, y, z ∈ X, tada je $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pseudometriku definiramo na sličan način uz zadovoljavanje uvjeta (2), (3) i nešto slabijeg uvjeta od (2), tj.

(2') za svako x ∈ X, $d(x, x) = 0$.

Ultrametriku definiramo kao metriku koja zadovoljava „strožu“ verziju uvjeta (4) tj.

(4') za svako x, y, z ∈ X, $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$.

U ovom radu će nas najviše zanimati *pseudoultrametrika*.

Pseudo-ultrametrika *d* na skupu X prirodno definira tranzitivnu uniformnu strukturu *U* na skupu X. Pri tome bazu uniformne strukture *U* definiramo pomoću podskupova produkta X×X oblika $U_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$.

Za dvije pseudoultrametrike na skupu X kažemo da su *uniformno ekvivalentne* ako definiraju iste uniformne strukture. Ako su U i U' uniformne strukture definirane pomoću pseudometrika d i d' , redom na skupu X i Y, tada je funkcija φ: (X, U) $\rightarrow$ (X', U') *uniformno neprekidna* ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takvo da, za sve x, y $\in$ X, vrijedi da $d(x, y) < \delta$ implicira $d'(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$.

Napomenimo da je uniformnu strukturu moguće definirati pomoću jedinstvene pseudometrike, koja je nužno metrika za slučaj Hausdorffovih prostora. Stoga uniformnu strukturu koju je moguće definirati pomoću pseudoultrametrike možemo okarakterizirati sa sljedećom bitnom osobinom (vidi [6, TG. IX.2, Theorem 1]).

Propozicija 2.1.

(1) Tranzitivna uniformna struktura se može definirati pomoću pseudoultrametrike ako i samo ako je generirana pomoću prebrojive baze.

(2) Tranzitivna Hausdorffova uniformna struktura se može definirati pomoću ultrametrike ako i samo ako je generirana pomoću prebrojive baze.

3. *Profinite strukture*

L-strukturu definiramo kao par (S, L), pri čemu je S neprazan skup, a L se sastoji of familije r^S relacija na skupu S indeksiranom pomoću skupa relacijskih simbola R i familije f^S operacija na skupu S indeksiranom pomoću skupa funkcijskih simbola F na način da je arnost r^S (odnosno f^S) jednaka arnosti relacijskog simbola r (odnosno funkcijskog simbola f). Kada ne postoji opasnost od bilo kakvih nejasnoća, koriste se skraćene oznake: r za r^S, f za f^S i S za (S, L).

Preslikavanje φ: S $\rightarrow$ T je morfizam L-struktura S i T ukoliko je:

– $\varphi(f(s_1, \ldots, s_n)) = f(\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n))$ za svako $f \in F_n$ i za svako $s_1, \ldots, s_n \in S$,

– $(s_1, \ldots, s_n) \in r$ implicira $(\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n)) \in r$ za svako $r \in R_n$ i za svako $s_1, \ldots, s_n \in S$.

Relaciju ekvivalencije $\sim$ na L-strukturi S definiramo kao relaciju kongruencije ako za svako $f \in F_n$ $(n \geq 1)$ i za sve $(s_1, \ldots, s_n)$, $(t_1, \ldots, t_n) \in S^n$ takve da je $s_i \sim t_i$ $(1 \leq i \leq n)$, vrijedi $f(s_1, \ldots, s_n) \sim f(t_1, \ldots, t_n)$. Stoga, ako je φ: S $\rightarrow$ T morfizam L-struktura, tada $s \sim_\varphi t \Leftrightarrow \varphi(s) = \varphi(t)$ definira relaciju kongruencija na strukturi S.

Za L-strukturu S kažemo da je *topološka L-struktura* ukoliko je na skupu S definirana topologija takva da

– za svako $f \in F_n$ $(n \geq 1)$, preslikavanje $(s_1, \ldots, s_n) \mapsto f(s_1, \ldots, s_n)$ iz S^n u S, je neprekidno i

– za svako $r \in R_n$ $(n \geq 1)$, podskup r od S^n je zatvoren.

Ako je skup S konačan, tada kažemo da je *L*-struktura S konačna. Napomenimo da se konačne strukture vrlo često promatraju kao topološke strukture na kojima je definirana diskretna topologija.

Definicija 3.1. Neka je *C* klasa topoloških *L*-struktura. *L*-strukturu nazivamo *pro-C strukturom* ako je projektivni limes *L*-struktura unutar klase *C*.

L-struktura je *profinitna* ukoliko je projektivni limes konačnih *L*-struktura (uz pretpostavku da je na njima definirana diskretna topologija).

Stoga su pro-*C* strukture, odnosno profinitne strukture kompaktne i totalno nepovezane. Klasu *L*-struktura nazivamo *pseudovarijetet* ukoliko je zatvorena u odnosu na podstrukture, homomorfne slike i konačne direktne produkte. U nastavku rada ćemo jednostavno umjesto *L*-struktura koristiti termin struktura.

Za topološku strukturu S kažemo da je *konačno generirana* ukoliko postoji konačan podskup strukture S takav da generira podstrukturu gustu unutar S.

Neka je *V* pseudovarijetet struktura. Za strukturu S kažemo da *razdvaja* elemente x, y $\in$ S ako postoji morfizam φ: S $\rightarrow$ T za koji je $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Struktura S je *rezidualna unutar* pseudovarijeteta *V* (ili kraće *rezidualno V*) ako postoji homomorfizam između elemenata pseudovarijeteta *V* koji ih razdvaja, tj. ukoliko su bilo koja dva elementa iz S razdvojena nekom strukturom pseudovarijeteta *V*. Za slučaj kada je *V* pseudovarijetet konačnih struktura, jednostavno kažemo da je S *rezidualno konačna* struktura. Stoga su profinitne strukture kompaktne strukture koje su rezidualno konačne, a pod *pro-V strukturom* podrazumijevamo kompaktnu strukturu koja je rezidualna unutar *V*. Ekvivalentno ovome, kažemo da je *pro-V struktura* projektivni (ili inverzni) limes struktura pseudovarijeteta *V*.

Pretpostavimo da je S rezidualna struktura unutar pseudovarijeteta *V*. Tada skup B_V relacija kongruencije R na strukturi S, takvih da S/R pripada pseudovarijetetu *V*, formira fundamentalni sistem okolina za uniformnost poznatu kao *pro-V uniformnost* U_V na S. Pri tome topologiju definiranu pomoću pro-*V* uniformnosti nazivamo pro-*V* topologijom. Također, možemo kazati da skupovi oblika $U_\varphi = \{(x, y) \in S \times S \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$, pri čemu φ pripada klasi svih morfizama iz strukture S na neku od struktura pseudovarijeteta *V*, formiraju bazu pro-*V* uniformnosti na S. Primijetimo da je pridruženi uniformni prostor Hausdorffov jer je struktura S rezidualna unutar *V*. Pri tome je operacija množenja na strukturi S uniformno neprekidna. U slučaju kada se radi o pseudovarijetetu svih konačnih struktura, koristi se termin *profinitna uniformnost*.

Pseudoultrametriku d_V na pro-*V* (profinitnoj) strukturi S pseudovarijeteta *V* možemo definirati kao

$d_V(x, y) = 2^{-r_V(x, y)}$, pri čemu je

$r_V(x, y) = \min\{|T| \mid$ T pripada pseudovarijetetu *V* i razdvaja elemente x i y, za sve x, y $\in$ S$\}$

uz dogovorene vrijednosti za min $\varnothing = \infty$ i $2^{-\infty} = 0$. Pri tome, za sve elemente x, y $\in$ S također vrijedi:

– $r_V(x, y) = r_V(y, x)$,

– $r_V(x, z) \geq \min \{ r_V(x, y), r_V(y, z)\}$.

4. *Rezultat*

Pitamo se pod kojim uvjetima se pro-*V* uniformnost može definirati pomoću pseudoultrametrike. Sljedeći teorem sadrži odgovor na postavljeno pitanje:

Teorem 4.1. Neka je S pro-*V* (profinitna) struktura koja pripada pseudovarijetetu *V*. Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:

(1) za svaku strukturu T $\in$ *V*, postoji samo prebrojivo mnogo morfizama iz S na T,

(2) pro-*V* (profinitna) uniformnost na strukturi S se može definirati pomoću pseudoultrametrike.

Dokaz.

(1) $\Rightarrow$ (2). Prema (1), pseudovarijetet *V* sadrži najviše prebrojivo mnogo neizomorfnih struktura, odnosno postoji samo prebrojivo mnogo (konačnih) struktura. Stoga se bilo koja pro-*V* (profinitna) struktura S može konstruirati kao projektivni limes prebrojivog sistema (konačnih) struktura. Budući da je prebrojiva unija od prebrojivo mnogo skupova prebrojiva, to zaključujemo da postoji najviše prebrojivo mnogo podskupova strukture S. Poznato nam je da, za podskup L strukture S, postoji konačna struktura T $\in$ *V* i surjektivni morfizam $\varphi : S \rightarrow T$ takav da je $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$. Za zadani morfizam $\varphi: S \rightarrow T$, definirati ćemo skup $U_\varphi = \{(x, y) \in S \times S \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$. Budući da je T konačna struktura, U_φ možemo prikazati kao konačnu uniju

$$U_\varphi = \{ \cup_{s \in T} (\varphi^{-1}(s) \times \varphi^{-1}(s)) \} \quad (1).$$

Tada skupovi oblika U_φ (tj. okoline), pri čemu φ pripada klasi svih morfizama iz pro-*V* (profinitne) strukture S na neku od struktura pseudovarijeteta *V*, formiraju bazu pro-*V* uniformnosti na S. Dakle, koristeći prikaz (1) pokazujemo da postoji prebrojivo mnogo takvih skupova, odnosno da pro-*V* uniformnost na pro-*V* (profinitnoj) strukturi S sadrži prebrojivu bazu. Sada koristeći propoziciju 2.1. zaključujemo da pro-*V* uniformnost na pro-*V* (profinitnoj) strukturi S može biti definirana pomoću pseudoultrametrike.

(2) $\Rightarrow$ (1). Pretpostavimo da pro-*V* uniformnost na pro-*V* (profinitnoj) strukturi S može biti definirana pomoću pseudoultrametrike. Tada, prema propoziciji 2.1, slijedi da pro-*V* uniformnost na pro-*V* strukturi S sadrži prebrojivu bazu. Neka su $\varphi : S \rightarrow T$ i $\varphi' : S' \rightarrow T'$ morfizmi iz pro-*V* strukture S na neku strukturu pseudovarijeteta *V*. Tada je $U_\varphi \subseteq U_{\varphi'}$ ako i samo ako postoji

morfizam $\alpha : T \to T'$ takav da je $\varphi' = \alpha \circ \varphi$, što znači da je svaka okolina U_φ sadržana u samo konačno mnogo okolina $U_{\varphi'}$. Uzmemo li da je *B* prebrojiva baza pro-*V* uniformnosti, tada, za svako $B \in B$, postoji morfizam φ_B takav da su okoline U_{φ_B} sadržane unutar B. Dakle, za svaki morfizam φ, okoline U_φ sadržavaju neki element $B \in B$ kao i okolinu U_{φ_B}. Prema tome, uniformnu strukturu *U* možemo definirati kao $U = \cup_{B \in B} \{U_\varphi \mid U_{\varphi_B} \subseteq U_\varphi \}$. Na ovakav način bazu pro-*V* uniformnosti možemo formirati pomoću okolina U_φ i pri tome je iskazati kao prebrojivu uniju konačnih skupova. Budući da je prebrojiva unija konačnih skupova prebrojiva, zaključujemo da vrijedi (1).

Ukoliko su zadovoljeni uvjeti teorema 4.1, da li to znači da je pomoću pseudoultrametrike d_V moguće definirati pro-*V* uniformnu strukturu? Razmatrajući ovo pitanje dolazimo do ekvivalentnih uvjeta onima iz teorema 4.1, pa je odgovor sadržan u sljedećim teoremima.

Teorem 4.2. Neka je S pro-*V* (profinitna) struktura. Sljedeća dva uvjeta su ekvivalentna:

(1) za svaku strukturu $T \in V$, postoji samo konačno mnogo morfizama iz S na T,

(2) pro-*V* (profinitna) uniformnost može biti definirana pomoću pseudoultrametrike d_V.

Dokaz.

Neka je U_V uniformnost na pro-*V* (profinitnoj) strukturi S definirana pomoću pseudoultrametrike d_V. Pri tome je baza uniformnosti U_V zadana podskupovima produkta S×S blika $U_\varepsilon = \{(x, y) \in S \times S \mid d_V(x, y) < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$. Poznato je da pseudoultrametriku d_V na pro-*V* strukturi S možemo definirati kao $d_V(x, y) = 2^{-r_V(x, y)}$, pri čemu je $r_V(x, y) = \min\{|T| \mid T$ je struktura koja pripada *V* i razdvaja elemente x i y, za sve $x, y \in S\}$. Pokazati ćemo da je uniformnost $U_V \subseteq U$. U tom cilju promatrati ćemo okoline uniformnosti $U_\varphi \in U$ i $U_{2^{-|T|}} \in U_V$, te dokazati da vrijedi inkluzija

$$U_{2^{-|T|}} \subseteq U_\varphi$$

za svaki morfizam $\varphi : S \to T$ (iz pro-*V* strukture S na pro-*V* strukturu $T \in V$).

Zaista, ako $(x, y) \in U_{2^{-|T|}}$, tada je $d_V(x, y) < 2^{-|T|}$, a potom i $r_V(x, y) > |T|$. Stoga možemo zaključiti da za svaki morfizam φ iz pro-*V* (profinitne) strukture S na neku pro-*V* strukturu pseudovarijeteta *V* veličine najviše |T|, vrijedi $\varphi(x) = \varphi(y)$. Ovo pak znači da $(x, y) \in U_\varphi$ čime dokazujemo inkluziju $U_{2^{-|T|}} \subseteq U_\varphi$, odnosno $U_V \subseteq U$. Sada možemo pristupiti dokazivanju ekvivalentnosti navedenih tvrdnji.

(1) $\Rightarrow$ (2). Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo neko $n \in N$ takvo da je $2^{-n} < \varepsilon$. Pretpostavimo da su sa $\varphi_i : S \to T_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ pobrojani svi morfizmi iz pro-

V strukture S na neku neizomorfnu strukturu pseudovarijeteta *V* veličine najviše 2^{-n}. Uzećemo da je φ morfizam iz pro-*V* (profinitne) strukture S na produkt $T_1 \times \ldots \times T_k$ definiran kao $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_k(u))$ i neka je $T = \varphi(S)$. Tada struktura T pripada pseudovarijetetu *V* i morfizam φ inducira surjektivni morfizam iz S na T. Tvrdimo da je $U_\varphi \subseteq U_\varepsilon$, gdje $U_\varepsilon \in U_V$. Stvarno, iz $\varphi(u) = \varphi(v)$ slijedi da je $\varphi_i(u) = \varphi_i(v)$ za $i = 1, \ldots, k$. Stoga elementi *u* i *v* ne mogu biti razdvojeni pomoću surjektivnog morfizma pro-*V* strukture pseudovarijeteta *V* veličine najviše *n*. Dakle, mora biti $r_V(u, v) > n$, pa shodno tome možemo zaključiti da je $d_V(u, v) < 2^{-n} < \varepsilon$, čime dokazujemo inkluziju $U_\varphi \subseteq U_\varepsilon$, odnosno $U \subseteq U_V$. Budući da smo dokazali da vrijede obje inkluzije $U_{2^{-|T|}} \subseteq U_\varphi$ i $U_\varphi \subseteq U_\varepsilon$, slijedi da je $U = U_V$. Dakle, promatrana uniformnost *U* se podudara s pro-*V* uniformnosti, tj. vrijedi tvrdnja (2).

(2) ⇒ (1). Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je T pro-*V* (profinitna) struktura pseudovarijeteta *V* veličine *n*. Prema inkluziji $U_{2^{-|T|}} \subseteq U_\varphi$, pri čemu $U_\varphi \in U$ i $U_{2^{-|T|}} \in U_V$, zaključujemo da je $U_{2^{-n}} \subseteq U_\varphi$, za svaki morfizam $\varphi : S \to T$. Budući da je U_V pro-*V* uniformnost definirana na pro-*V* strukturi S, to postoji neki morfizam $\alpha : S \to R$ na pro-*V* strukturu pseudovarijeteta *V* takav da je $U_\alpha \subseteq U_{2^{-n}}$, $U_\alpha \in U$, $U_{2^{-n}} \in U_V$. Odavde možemo zaključiti da je $U_\alpha \subseteq U_\varphi$, te također da postoji neki morfizam $\beta : R \to T$ takav da vrijedi $\varphi = \beta \circ \alpha$. Budući da postoji samo konačno mnogo morfizama između promatranih pro-*V* (profinitnih) struktura R i T, pokazali smo da vrijedi tvrdnja (1).

Ako je S konačno generirana pro-*V* (profinitna) struktura, tj. pro-*V* (profinitna) struktura koja sadrži gustu konačno generiranu podstrukturu, tada postoji samo konačno mnogo morfizama iz S na $T \in V$. Stoga, dolazimo do sljedećeg zaključka:

Teorem 4.3. Na konačno generiranoj pro-*V* (profinitnoj) strukturi, pro-*V* (profinitna) uniformnost može biti definirana pomoću pseudoultrametrike d_V.

Primjedba 4.4. Neka je S profinitna struktura. Tada postoji samo prebrojivo mnogo konačnih struktura, te stoga bilo koja profinitna struktura S može biti konstruirana kao projektivni limes prebrojivog sistema $(S_n)_{n\geq 0}$ konačnih struktura, pri čemu je skup indeksa uređen običnom relacijom uređenja (poretka) na nenegativnim cijelim brojevima.

Ako sa φ_n označimo kanonski morfizam iz S u $(S_n)_{n\geq 0}$, tada postoji samo prebrojivo mnogo morfizama φ_n iz S u $(S_n)_{n\geq 0}$. Prema teoremu 4.1, profinitnu uniformnost na strukturi S je moguće definirati pomoću pseudoultrametrike

$$d(x, y) = 2^{-\min\{ n \geq 0 \mid \varphi_n x \neq \varphi_n y\}},$$

za svako x, y Є S.

Literatura

Almeida 1995: J. Almeida, *Finite semigroups and universal algebra*, World Scienttific, Singapore, English translation.

Almeida 2002: J. Almeida, *Finite semigroups: an introduction to a unified theory of pseudovarieties, Semigroups, Algorithms, Automata and Languages*, World Scientific, Singapore, pp. 3–64.

Almeida 2003: J. Almeida, *Profinite structures and dynamics*, CIM Bulletin 14, 8–18.

Almeida, Weil 1995: J. Almeida, P. Weil, *Relatively free profinite monoids: an introduction and examples', Semigroups, Formal Languages and Groups*, NATO ASI, Series C, Vol. 466, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, pp. 73–117.

Eilenberg 1974: S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Vol. A, Academic Press, New York (MR 58:26604a).

Eilenberg 1974: S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Vol. A, Academic Press, New York (MR 58:26604b).

Hall 1950: M. Hall, *A topology for free groups and related groups*, Ann. Math. 52, 127–139.

Pin, Weil 1999: J. E. Pin and P. Weil, *Uniformities on free semigroups*, International Journal of Algebra and Computation 9, 431–453.

Jones 1996: P. R. Jones, *Profinite categories, implicit operations and pseudovarieties of categories*, J. Pure and Appl. Algebra 109, 61–95.

Margolis et al. 2001: S. Margolis, M. Sapir, P. Weil, *Closed subgroups in pro-V topologies and the extension problem for inverse automata*, Int. J. Algebra Comput. 11, 405–445.

Margolis, Pin 1984: S. W. Margolis and J. E. Pin, *Varieties of finite monoids and topology for the free monoid*, Proc. 1984 Marquette Semigroup Conference (Milwaukee), Marquette University, pp. 113–129.

Perić 1991: V. Perić, *Algebra* Vol. 1, third edition, Sarajevo, IGKRO Svjetlost.

Ribes, Zalesskii 1993: L. Ribes, P. A. Zalesskii, *On the profinite topology on a free group*, Bull, London Math. Soc. 25, 37–43.

Ribes, Zalesskii 2000: L. Ribes, P. A. Zalesskii, *Profinite groups*, Ergeb. Math. Grenzgebiete 3, No. 40, Springer, Berlin.

Bernadin F. Ibrahimpašić*
University of Bihać
Pedagogical Faculty
Originalni naučni rad

SOLVING A FAMILY OF QUARTIC THUE INEQUALITIES USING CONTINUED FRACTIONS

1. *Introduction*

Let $f \in Z[X,Y]$ be a homogeneous irreducible polynomial of degre $n \geq 3$ and $\mu \neq 0$ fixed integer. Then the Diophantine equation

$$f(x,y) = \mu \qquad (1.1)$$

is called Thue equation. In 1909, Thue (Thue 1909) proved that equation (1.1) has only finitely many solutions $x, y \in Z$. In 1968, Baker (Baker 1968) gave an upper bound for the solutions of Thue equation, based on the theory of linear forms in logarithms of algebraic numbers.

Starting with Thomas (Thomas 1990) in 1990, parametrized families of Thue equations have been considered (Heuberger 2004 for references).

Tzanakis (Tzanakis 1993) considered Thue equations of the above mentioned form, where *f* is a quartic form which corresponding quartic field *K* is the compositum of two real quadratic fields. He showed that solving the mentioned equation reduces to solving a system of Pellian equations.

The applications of above mentioned method of Tzanakis for solving Thue equationsof the special type has several advantages (Tzanakis 1993, Dujella, Jadrijević 2002, 2004). This method has been applied to several parametric families of quartic Thue equations and inequalities (Bo He, Jadrijević, Togbe 2009, Dujella, Jadrijević, Ibrahimpašić 2011, Dujella, Jadrijević 2002, 2004, Ibrahimpašić 2011a, Ziegler 2006).

In results of that type, the authors were able to solve completely the corresponding system(s) of Pellian equations, and from these solutions it is straightforward to find all solutions of the Thue equation (inequality).

Note that the system and the original Thue equation are not equivalent. The authors (Dujella, Jadrijević, Ibrahimpašić 2011) do not have to solve the system of Pellian equations completely, as some solutions to the system do not lead to solutions of the Thue inequality.

We consider the parametric family of Thue inequalities

$|f(x,y,c) \leq \mu(c)$,

for an positive integer *c*.

We apply the above mentioned method of Tzanakis to mentioned inequalities, i.e. to the equations

* bernadin@bih.net.ba

$f(x,y,c) = m, \quad |m| \leq \mu(c)$.
We obtain the system(s) of Pellian equations
$\varphi_1(c)U^2 - \varphi_2(c)V^2 = \omega_1(m), \qquad (1.2)$
$\varphi_3(c)U^2 - \varphi_4(c)Z^2 = \omega_2(m), \qquad (1.3)$
and we consider separately both equations of the mentioned system.

2. *Diophantine approximations*

We use the generalizations of the classical results of Legendre and Fatou concerning Diophantine approximations of the form $|\alpha - a/b| < 1/2b^2$ and $|\alpha - a/b| < 1/b^2$, to the approximations of the form $|\alpha - a/b| < k/b^2$, for a positive real number *k*, due to Worley, Dujella and Ibrahimpašić (Worley 1981, Dujella 2004, Dujella, Ibrahimpašić 2008).

Theorem 2.1 (Worley 1981, Dujella 2004) Let α be a real number and let *a* and *b* be coprime nonzero integers, satisfying the inequality
$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{k}{b^2}, \qquad (2.1)$$

where *k* is a positive real number. Then
$(a,b) = (rp_{m+1} \pm sp_m, rq_{m+1} \pm sq_m)$,

for some $m \geq -1$ and nonnegative integers *r* and *s* such that $rs < 2k$, where p_m/q_m denotes the *m*th convergent of the continued fraction expansion of α.

Dujella and Ibrahimpašić (Dujella, Ibrahimpašić 2008) showed that this theorem is sharp, in the sence that the condition $rs < 2k$ cannot be replaced by $rs < (2-\varepsilon)k$ for any $\varepsilon > 0$.

Worley (Worley 1981) gave explicit version of his result for $k = 2$. Dujella and Ibrahimpašić (Dujella, Ibrahimpašić 2008) extended Worley's work and gave explicit and sharp versions of mentioned theorem for $k = 3, 4, 5, \cdots, 12$. They gave the pairs (r,s) which appear in the expression of solutions to (3.1) in the form
$(a,b) = (rp_{m+1} \pm sp_m, rq_{m+1} \pm sq_m)$.
Recently, Ibrahimpašić (Ibrahimpašić 2011b) extended this result to $0 \leq k \leq 13$.

3. *The method*

We consider the equation (1.2)
$\varphi_1(c)U^2 - \varphi_2(c)V^2 = \omega_1(m), \qquad (1.2)$

of the mentioned system of Pellian equations, and we obtain the continued expansion of the corresponding quadratic irrationals

$\sqrt{\frac{\varphi_1(c)}{\varphi_2(c)}}$.

The simple continued fraction expansion of a quadratic irrational $\alpha = \frac{e+\sqrt{d}}{f}$ is periodic. This expansion can be obtained using the following algorithm (see Chapter 7.7 in Niven, Zuckerman, Montgomery 1991). Multiplying the numerator and the denominator by *f*, if necessary, we may assume that $f|(d-e^2)$. Let $s_0 = e$, $t_0 = f$ and

$$a_n = \left\lfloor \frac{s_n+\sqrt{d}}{t_n} \right\rfloor, \quad s_{n+1} = a_n t_n - s_n, \quad t_{n+1} = \frac{d-s_{n+1}^2}{t_n}, \quad \text{for } n \geq 0.$$

If $(s_j, t_j) = (s_k, t_k)$ for $j < k$, then

$$\alpha = [a_0; a_1, \cdots, \overline{a_j, \cdots, a_{k-1}}].$$

In order to determine the values of m for which mentioned equation (1.2) has a solution, we use the following result (see Lemma 1 in Dujella, Jadrijević 2004).

Lemma 3.1 Let $\alpha\beta$ be a positive integer which is not a perfect square, and let p_k/q_k denotes the *k*th convergent of the continued fraction expansion of $\sqrt{\alpha/\beta}$. Let the sequences (σ_k) and (τ_k) be defined by $\sigma_0 = 0, \tau_0 = \beta$ and

$$a_k = \left\lfloor \frac{\sigma_n+\sqrt{\alpha\beta}}{\tau_n} \right\rfloor, \quad \sigma_{k+1} = a_k\tau_k - \sigma_k, \quad \tau_{k+1} = \frac{\alpha\beta-\sigma_{k+1}^2}{\tau_k}, \quad \text{for } k \geq 0.$$

Then

$$\alpha(rq_{k+1} + sq_k)^2 - \beta(rp_{k+1} + sp_k)^2 = (-1)^k(s^2\tau_{k+1} + 2rs\sigma_{k+2} - r^2\tau_{k+2}). \quad (3.1)$$

Now we use results from Dujella and Ibrahimpašić (Dujella, Ibrahimpašić 2008) and we inserting all possibilities for *r* and *s* in formula (3.1). In this way we obtain sets M_c^1 of the values of *m* for which the first equation (1.2) of the system has a solution. In the same way, we obtain the sets M_c^2 of the values of *m* for which the second equation (1.3) of the system has a solution. Finally, comparing these sets M_c^1 with sets M_c^2, we obtain the finite set of the values of *m* for which mentioned system(s) (1.2) and (1.3) has a solution.

From the comparison of a lower bound for solutions of mentioned system, obtained using the congruence method introduced in (Dujella, Pethö 1998), and an upper bound obtained from the following theorem of Bennett (Bennett 1998) on simultaneous approximations of algebraic numbers, we obtained results for $c \geq W$, where *W* is the some positive integer.

Theorem 3.1 If a_i, p_i, q and N are integers for $0 \le i \le 2$, with $a_0 < a_1 < a_2$ and $a_j = 0$ for some $0 \le j \le 2, q \ge 1$ and $N > M^9$, where

$$M = \max_{0\le i\le 2}\{|a_i|\} \ge 3,$$

then we have

$$\max_{0\le i\le 2}\left\{\left|\sqrt{1+\frac{a_i}{N}} - \frac{p_i}{q}\right|\right\} > (130N\gamma)^{-1}q^{-\delta},$$

where

$$\delta = 1 + \frac{\log(32.04N\gamma)}{\log\left(1.68N^2\prod_{0\le i<j\le 2}(a_i - a_j)^{-2}\right)}$$

and

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{(a_2-a_0)^2(a_2-a_1)^2}{2a_2-a_0-a_1}, & a_2 - a_1 \ge a_1 - a_0, \\ \dfrac{(a_2-a_0)^2(a_1-a_0)^2}{a_1+a_2+2a_0}, & a_2 - a_1 < a_1 - a_0. \end{cases}$$

For $c < W$ we use a version of the reduction procedure due to Baker and Davenport (Baker, Davenport 1969) and the following theorem of Baker and Wüstholz (Baker, Wüstholz 1993).

Theorem 3.2 For a linear form $L = b_1 \log\alpha_1 + \cdots + b_l \log\alpha_l \ne 0$ in logarithms of l algebraic numbers $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ with rational integer coefficients $b_1, \cdots, b_l$ we have

$$\log L \ge -18(l+1)!\, l^{l+1}(32d)^{l+2}h'(\alpha_1)\cdots h'(\alpha_l)\log(2ld)\log B,$$

where $B = \max\{|b_j| : 1 \le j \le l\}$, and where d is the degree of the number field generated by $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$.

In the special cases (for some values of m) we can use the Thue equation solver in PARI/GP to solve directly corresponding Thue equations.

4. *Application of the method*

In (Dujella, Jadrijević 2004), Dujella and Jadrijević considered the family of quartic Thue inequalities

$$|x^4 - 4cx^3y + (6c+2)x^2y^2 + 4cxy^3 + y^4| \le 6c + 4.$$

where $c \ge 0$ is an integer. They obtained set $M_c^1 = \{1, -2c, 2c+1, -6c+1, 6c+4\}$. Analysing the corresponding system (1.2) and (1.3) and using the properties of the convergents of the corresponding quadratic irrationals, authors were able to show that the system has no solutions

for $m = -2c, 2c + 1, -6c + 1$. In (Dujella, Ibrahimpašić 2008), Dujella and Ibrahimpašić comparing the sets M_c^1 and M_c^2 showed that the system has solutions only for $m = 1$ and $m = 6c + 4$.

In (Ibrahimpašić 2011a), Ibrahimpašić considered the family of quartic Thue inequalities

$$|x^4 - 4cx^3y + 2x^2y^2 + 2cxy^3 + y^4| \leq 6c + 4,$$

where $c \geq 0$ is an integer. Comparing the sets M_c^1 and M_c^2 author showed that the system has solutions only for $m = 1,4$ and $m = -12c + 25$ for $c = 3,4$. Using above mentioned method author obtained all trivial and nontrivial solutions of the family.

In (Dujella, Ibrahimpašić, Jadrijević 2011), Dujella, Ibrahimpašić and Jadrijević considered the family of quartic Thue inequalities

$$|x^4 + 2(1 - c^2)x^2y^2 + y^4| \leq 2c + 3,$$

where $c \geq 0$ is an integer. The system and the original Thue equation are not equivalent. Each solution of the Thue equation induces a solution of the system, but not vice--versa. As an illustration of these phenomena is the mentioned family of Thue inequalities.

Literatura

Baker 1968: A. Baker, Contributions to the theory of Diophantine equations I. On the representations of integers by binary forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 263 (1968), 173–191.

Baker, Davenport 1969; A. Baker, H. Davenport, The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = x^2$. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 20 (1969), 129–137.

Baker, Wüstholz 1993: A. Baker, G. Wüstholz, Logarithmic forms and group varieties, *J. Reine Angew. Math.* 442 (1993), 19–62.

Bennett 1998: M. A. Bennett, On the number of solutions of simultaneous Pell equations, *J. Reine Angew. Math.* 498 (1998), 173–199.

He, Jadrijević, Togbe 2009: Bo He, B. Jadrijević, A. Togbe, Solutions of a class of quartic Thue nequalities, *Glas. Mat.* 44 (2009), 309–321.

Dujella 2004: A. Dujella, Continued fractions and RSA with small secret exponents, *Tatra Mt. Math. Publ.* 29 (2004), 101–12.

Dujella, Ibrahimpašić 2008: A. Dujella, B. Ibrahimpašić, On Worley's theorem in Diophantine approximations, *Ann. Math. Inform.* 35 (2008), 61–73.

Dujella, Ibrahimpašić, Jadrijević 2011: A. Dujella, B. Ibrahimpašić, B. Jadrijević, Solving a family of quartic Thue inequalities using continued fractions, *Rocky Mountain J. Math.* 41 (2011), 1173–1182.

Dujella, Jadrijević 2002: A. Dujella, B. Jadrijević, A parametric family of quartic Thue equations, *Acta Arith.* 101 (2002), 159–170.

Dujella, Jadrijević 2004: A. Dujella, B. Jadrijević, A family of quartic Thue inequalities, *Acta Arith.* 111 (2004), 61–76.

Dujella, Pethö 1998: A. Dujella, A. Pethö, Generalization of a theorem of Baker and Davenport, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), 49 (1998), 291–306.

Heuberger 2004: C. Heuberger, Parametrized Thue Equations - A Survey, *Proceedings of the RIMS symposium „Analytic Number Theory and Surrounding Areas“*, Kyoto, Oct 18–22, 2004, RIMS Kôkyûroku 1511, August 2006, 82–91.

Heuberger, Pethö, Tichy 1998: C. Heuberger, A. Pethö, R. F. Tichy, Complete solution of parametrized Thue equations, *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis* 6 (1998), 93--113.

Ibrahimpašić 2011a: B. Ibrahimpašić, A parametric family of quartic Thue inequalities, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2) 34(2) (2011), 215–230.

Ibrahimpašić 2011b: B. Ibrahimpašić, Explicit version of Worley's theorem in Diophantine approximations, preprint.

Mordell 1969: L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, London, 1969.

Nagell 1962: T. Nagell, Sur quelques questions dans la thèorie des corps biquadratiques, *Ark. Mat.* 4 (1962), 347–376.

Niven, Zuckerman, Montgomery 1991: I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley, New York, 1991.

PARI/GP, version 2.3.2, Bordeaux, 2007, <http://pari.math.u-bordeaux.fr>.

Thomas 1990: E. Thomas, Complete solutions to a family of cubic Diophantine equations, *J. Number Theory* 34 (1990), 235–250.

Thue 1909: A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* 135 (1909), 284–305.

Tzanakis 1993: N. Tzanakis, Explicit solution of a class of quartic Thue equations, *Acta Arith.* 64 (1993), 271–283.

Worley 1981: R. T. Worley, Estimating $|\alpha - p/q|$, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 31 (1981), 202–206.

Ziegler 2006: V. Ziegler, On the certain family of quartic equations with three parameters, *Glas. Mat.* 41 (2006), 9–30

Емил Л. Илић-Георгијевић*
Универзитет у Сарајеву
Грађевински факултет
Катедра за математику, програмирање,
физику и нацртну геометрију

Оригинални научни рад

ПАРАГРАДУИРАНИ ЦЕКОПСОНОВ РАДИКАЛ

1. *Увод*

Параградуиране структуре су дефинисали М. Краснер и М. Вуковић (Krasner, Vuković 1987b). Оно што их је мотивисало јесте незатвореност категорије градуираних група (прстена, модула) у односу на директни производ у смислу да хомогени дио директног производа не мора бити директни производ хомогених дијелова фактора. Параградуиране структуре превазилазе наведени проблем.

Дефиниција 1.1. (Krasner, Vuković 1987b) Нека је R прстен. Пресликавање $\pi : \Delta \to Sg(R,+),\ \pi(\delta) = R_\delta (\delta \in \Delta),$ парцијално уређеног скупа $(\Delta, <),$ чији сваки подскуп има инфимум и који је индуктивно уређен, у скуп $Sg(R,+)$ подгрупа групе $(R,+),$ зовемо *параградуацијом* ако су задовољени сљедећи услови:

i) $\pi(0) = R_0 = \{0\},$ гдје је $0 = \inf \Delta;\ \delta < \delta' \Rightarrow R_\delta \subseteq R_{\delta'};$

Примједба 1.2. $H = \bigcup_{\delta \in \Delta} R_\delta$ зовемо *хомогеним дијелом* прстена R у односу на $\pi,$ а елементе из H зовемо *хомогеним*.

Примједба 1.3. Ако $x \in H,$ онда елемент $\delta(x) = \inf \{\delta \in \Delta | x \in R_\delta\}$ зовемо *градусом* елемента x. Имамо да је $\delta(x) = 0$ акко је $x = 0.$ Елементе $\delta(x), x \in H,$ зовемо *главним градусима* и њихов скуп обиљежавамо са Δ_p.

ii) $\theta \subseteq \Delta \Rightarrow \bigcap_{\delta \in \theta} R_\delta = R_{\inf \theta};$

iii) Хомогени дио H генерише групу $(R,+);$

iv) Ако је $A \subseteq H$ подскуп за који је $x + y \in H,$ за свако $x, y \in A,$ онда постоји $\delta \in \Delta$ тако да је $A \subseteq R_\delta;$

v) $(R,+)$ је генерисана скупом H са скупом H-унутрашњих релација:

* emil.ilic.georgijevic@gmail.com

$x + y = z, x, y, z \in H;$

vi) $(\forall \xi, \eta \in \Delta)(\exists \zeta \in \Delta) R_\xi R_\eta \subseteq R_\zeta .$

Прстен зовемо *параградуираним* ако има параградуацију.

Примједба 1.4. Ако је за комутативну групу задовољено првих пет аксиома дефиниције 1.1, онда за ту групу кажемо да је комутативна параградуирана група.

Ако пети услов замијенимо условом:

v') Нека су $\delta_1, \ldots \delta_s \in \Delta_p$ међусобно неупоредиви и $x_i, x_i' \in H (i = 1, \ldots, s)$ такви да је $x_1 + \ldots + x_s = x_1' + \ldots x_s'$ и $x_i, x_i' \in R_{\delta_i}$ за свако $i = 1, \ldots, s,$ онда је $\delta(-x_i + x_i') < \delta_i ,$

имамо дефиницију екстраградуираног прстена.

Дефиниција 1.5. (Krasner, Vuković 1987b) Пресликавање $(\xi, \eta) \to \xi\eta$ са $\Delta \times \Delta$ у Δ зовемо π*-множењем* ако су испуњени услови:

i) $R_\xi R_\eta \subseteq R_{\xi\eta}$;

ii) $(\forall \xi, \xi', \eta, \eta' \in \Delta) \xi \le \xi' \wedge \eta \le \eta' \Rightarrow \xi\eta \le \xi'\eta'.$

Примједба 1.6. Према дефиницији параградуираног прстена, елементи $\delta(x), \quad x \in R_\xi R_\eta ,$ имају заједнички супремум, тј. постоји $\sup\{\delta(x) | x \in R_\xi R_\eta\}$. Ако дефинишемо

$$\xi\eta = \sup\{\delta(x) | x \in R_\xi R_\eta\} ((\xi, \eta) \in \Delta \times \Delta),$$

онда $\xi\eta$ представља π-множење које зовемо *минималним множењем*.

Нека је $(R, +, \cdot, E)$ параградуирани прстен са скупом градуса Δ, а $(M, +, F)$ комутативна параградуирана група (Krasner, Vuković 1987b) са скупом градуса D и нека је M лијеви R-модул. Означимо $E(\delta)$ са R_δ и $F(d)$ са $M_d , \quad \delta \in \Delta, \quad d \in D.$

Дефиниција 1.7. (Krasner, Vuković 1987b) За R-модул M кажемо да је *параградуиран* ако за свако $\delta \in \Delta, \quad d \in D$ постоји $t \in D$ тако да је $R_\delta M_d \subseteq M_t .$

Дефиниција 1.8. (Krasner, Vuković 1987b) (E, F)– *множење градуса* је пресликавање $(\delta, d) \to \delta d$ са $\Delta \times D$ у D такво да:

1. $R_\delta M_d \subseteq M_t$;
2. $(\forall \delta, \delta' \in \Delta)(\forall d, d' \in D)\delta \le \delta' \wedge d \le d' \Rightarrow \delta d \le \delta' d'$.

Специјално, за ово множење кажемо да је *минимално* ако је $\delta d = \sup_{z \in R_\delta M_d} d(z)$.

2. *Категорија* M_Δ^P

Посматрајмо параградуиране R-модуле M, где је R параградуирани прстен са скупом градуса Δ, а M комутативна параградуирана група са скупом градуса Δ. Ови модули заједно са скупом

$$\{f \in \hom(M, M') \mid f(M_\delta) \subseteq M'_\delta\}$$

чине категорију коју ћемо обиљежити са M_Δ^P.

Аналогно, можемо дефинисати категорију екстраградуираних R-модула са скупом градуса Δ и означимо је са M_Δ^E.

Дефиниција 2.1. (Ilić-Georgijević a) За морфизам $f : M \to M'$ кажемо да је *морфизам градуса* δ ако је

$(\forall \delta' \in \Delta) f(M_{\delta'}) \subseteq M'_{\delta' \delta}$.

Скуп свих морфизама градуса δ означимо са $\hom(M, M')_\delta$.

Лема 2.2. (Ilić-Georgijević a) Скуп $\hom(M, M')_\delta$ је подгрупа групе $\hom(M, M')$.

Дефинишимо скуп $HOM(M, M') := \left\langle \bigcup_{\delta \in \Delta} \hom(M, M')_\delta \right\rangle$.

Теорема 2.3. (Ilić-Georgijević a) Ако $M \in M_\Delta^P$ и $M' \in M_\Delta^E$, онда је $HOM(M, M')$ комутативна параградуирана група са скупом градуса Δ.

3. *Џекопсонов радикал*

Дефиниција 3.1. За објект $\overline{M} \in M_\Delta^P$ кажемо да је *прост параградуиран* ако су једини подмодули модула $\overline{M}$ тривијални. За параградуирани модул $M \in M_\Delta^P$ кажемо да је *полупрост параградуиран* ако је директна сума простих параградуираних модула из M_Δ^P.

Нека $M \in M_{\Delta}^{P}$.

Дефиниција 3.2. *Парадградуираним Џекопсоновим радикалом* модула M зовемо пресјек свих хомогених максималних подмодула модула M и означавамо га са $J^{P}(M)$. Уколико модул M нема хомогених максималних подмодула, онда ћемо по дефиницији узимати да је $J^{P}(M) = M$.

Пропозиција 3.3. Ако $M \in M_{\Delta}^{P}$, онда је

$$J^{P}(M) = \bigcap \left\{ \ker f \,\middle|\, f \in \hom_{M_{\Delta}^{P}}\left(M, \overline{M}\right) \right\} = \bigcap \left\{ \ker f \,\middle|\, f \in HOM\left(M, \overline{M}\right) \right\},$$

где смо са $\overline{M}$ означили прости параградуирани модул.

Доказ. Нека $x \in J^{P}(M)$. Тада $x \in N$, где је N произвољан хомогени максимални подмодул модула M. Нека $f \in \hom_{M_{\Delta}^{P}}\left(M, \overline{M}\right)$. Како је $\overline{M}$ прости модул, $f(x) = 0$, тј. $x \in \ker f$. Дакле,

$$J^{P}(M) \subseteq \bigcap \left\{ \ker f \,\middle|\, f \in \hom_{M_{\Delta}^{P}}\left(M, \overline{M}\right) \right\}.$$

Нека сада $f \in HOM\left(M, \overline{M}\right)$. Тада је

$$f = \left\langle f_{\delta} \in \hom\left(M, \overline{M}\right)_{\delta} \,\middle|\, \delta \in \Delta \right\rangle.$$

На основу истог аргумента као и малоприје, закључујемо да је $f_{\delta}(x) = 0$, па $x \in \ker f$. Дакле,

$$J^{P}(M) \subseteq \bigcap \left\{ \ker f \,\middle|\, f \in HOM\left(M, \overline{M}\right) \right\}.$$

Обрнуте инклузије су очигледне.

Королар 3.4. Ако је M коначно генерисани R-модул, онда је $J^{P}(R)M \neq M$.

Пропозиција 3.5. Ако $M \in M_{\Delta}^{P}$ и $M' \in M_{\Delta}^{E}$, и ако $f \in HOM(M, M')$, онда је $f\left(J^{P}(M)\right) \subseteq J^{P}(M')$.

Доказ. Довољно је доказати да је $f_{\delta}\left(J^{P}(M)\right) \subseteq J^{P}(M')$, за свако $\delta \in \Delta$, где $f_{\delta} \in \hom(M, M')_{\delta}$, јер је $f = \left\langle f_{\delta} \in \hom\left(M, \overline{M}\right)_{\delta} \,\middle|\, \delta \in \Delta \right\rangle$. Ако $x \in J^{P}(M)$, онда $f_{\delta}(x) \in J^{P}(M')$ према теореми о кореспонденцији.

Дефиниција 3.6. За параградуирани прстен са скупом градуса Δ кажемо да је *лијеви параградуирани Нетерин прстен* (*лијеви параградуирани Артинов прстен*) ако је задовољен услов растућег (опадајућег) ланца хомогених идеала.

Дефиниција 3.7. За параградуирани прстен R са скупом градуса Δ кажемо да је *лијеви параградуирани полупрости прстен* уколико је

$$R = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n, \tag{3.1}$$

гдје су L_i минимални лијеви хомогени идеали прстена R.

Дефиниција 3.8. За параградуирани прстен R са скупом градуса Δ кажемо да је *параградуирани прости прстен* ако важи (3.1) и ако је $HOM(L_i, L_j) \neq 0,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Лема 3.9. Нека је минимално множење асоцијативно и нека су L_i и L_j минимални хомогени идеали параградуираног прстена R са скупом градуса Δ. Тада је $HOM(L_i, L_j) \neq 0$ акко постоји $\xi \in \Delta$ тако да је $L_j \cong L_i(\xi)$, гдје $L_i(\xi)$ представља ξ-суспензију (Ilić-Georgijević а) прстена L_i.

Доказ. Претпоставимо да је $L_j \cong L_i(\xi)$, за неко ξ из Δ. Тада је

$$\hom(L_i, L_j)_\xi = \hom(L_i, L_i(\xi)) \neq 0,$$

па је и $HOM(L_i, L_j) \neq 0$.

Обрнуто, претпоставимо да је $HOM(L_i, L_j) \neq 0$. Тада постоји $\xi \in \Delta$ тако да је $\hom(L_i, L_j)_\xi \neq 0$, па постоји $f_\xi \in \hom(L_i, L_j)_\xi$, $f_\xi \neq 0$. Нека $x \in L_i$. Како је x хомогени елемент, постоји $\delta' \in \Delta$ тако да $x \in R_{\delta'}$. Тада $f_\xi(x) \in R_{\delta'\xi}$. То значи да је $f(L_i) = \langle f_\delta \rangle (L_i)$ генерисан скупом $f(L_i) \cap H(\xi)$, гдје је $H(\xi)$ хомогени дио прстена $R(\xi)$. Дакле, $f(L_i) = L_i(\xi)$. Према теореми о кореспонденцији, $f(L_i)$ је минимални идеал, па мора бити $f(L_i) = L_j$.

Королар 3.10. Нека је минимално множење асоцијативно. Параградуирани прстен R са скупом градуса Δ је прости параградуирани

прстен ако важи (3.1) и ако је за неко $\xi \in \Delta$, $L_j \cong L_i(\xi)$, за свако $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.

Пропозиција 3.11. Параградуирани прстен R са скупом градуса Δ је лијеви параградуирани полупрости прстен ако је R десни параградуирани полупрости прстен.

Доказ. Ако је R лијеви параградуирани полупрости прстен, онда је $J^P(R) = \{0\}$. Према декомпозицији (3.1), постоје ортогонални идемпотентни елементи e_i, $i = 1,\ldots,n$, такви да је $L_i = Re_i$. Како је L_i минимални хомогени идеал, то је Re_i идеал генерисан скупом $Re_i \cap H$, тј. скупом $\{e_i\} \cap H$. Слиједи да $e_i \in H$, јер је $Re_i \neq \emptyset$. Ако са π означимо параградуацију прстена R, онда се једноставно може доказати да је пресликавање $\pi_{e_i} : \Delta \to Sg(e_i R e_i)$, дефинисано са $\pi_{e_i}(\delta) = e_i \pi(\delta) e_i$, параградуација прстена $\Delta_i = e_i R e_i$. Ради се заправо о параградуираном дивизибилном прстену. Означимо са K_i десни хомогени идеал $e_i R$. Очигледно, $R = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$, па је довољно доказати да је K_i минимални хомогени идеал. Нека је $\{0\} \neq K \subseteq K_i$ хомогени десни идеал. Како је $K = e_i K$ и $K \neq \{0\}$, то је и $e_i K \neq \{0\}$. Ако је $e_i K e_i = \{0\}$, онда је $(e_i K)^2 = \{0\}$, па је $e_i K \subseteq J^P(R) = \{0\}$, што нас је довело до контрадикције. Дакле, $e_i K e_i \neq \{0\}$. С друге стране, $(e_i K e_i)(e_i R e_i) \subseteq e_i K e_i$, па је $e_i K e_i$ десни хомогени идеал прстена Δ_i. Даље једноставно слиједи да је $K = e_i R = K_i$.

Пропозиција 3.12. Ако је R лијеви параградуирани Артинов прстен, онда је R лијеви параградуирани Нетерин прстен.

Доказ. Како је R лијеви параградуирани Артинов прстен, Џекопсонов радикал се може приказати као пресјек коначно много лијевих хомогених максималних идеала, тј.

$$J^P(R) = M_1 \cap \ldots \cap M_n.$$

Тада је $R / J^P(R)$ параградуирани полупрости прстен. За опадајући ланац

$$J^P(R) \supseteq J^P(R)^2 \supseteq \ldots \supseteq J^P(R)^m \supseteq \ldots$$

постоји природан број n такав да је $J^P(R)^n = J^P(R)^{n+k}$, за сваки природан број $k > n$. Ако је $J^P(R)^n \neq \{0\}$, онда постоји хомогени елемент

$x \in J^P(R)^n$ такав да је $J^P(R)x \neq \{0\}$. Наравно, елемент x можемо изабрати тако да је Rx минимални хомогени идеал с особином $J^P(R)x \neq \{0\}$. Према королару 3.4, имамо $J^P(R)x = J^P(R)Rx \neq Rx$. Ако $a \in J^P(R)$, онда је $Rax \subseteq J^P(R)x \subseteq Rx$ и $Rax \neq Rx$. Дакле, $ax = 0$, одакле слиједи да је $J^P(R)x = \{0\}$, што нас је довело до контрадикције. Према томе, $J^P(R)^n = \{0\}$. За свако $i = 1, \ldots, n-1$, $J^P(R)^i / J^P(R)^{i+1}$ је $R / J^P(R)$-модул. Прстен $R / J^P(R)$ је параградуирани полупрости прстен, па је $J^P(R)^i / J^P(R)^{i+1}$ параградуирани полупрости модул.

Литература

Bourbaki[3] 1962: N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. II, 3e édit. Paris, Hermann.

Ilić-Georgijević 2011: E. Ilić-Georgijević, *Neki problemi teorije paragraduiranih struktura*, doktorska disertacija, Filozofski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu.

Ilić-Georgijević a: E. Ilić-Georgijević, *On the categories of paragraded groups and modules of type* Δ, to appear in Sarajevo Journal of Mathematics.

Ilić-Georgijević b: E. Ilić-Georgijević, *Some properties of paragraded modules*, in preparation.

Krasner, Vuković 1986a: M. Krasner, M. Vuković, *Structures paragraduees (groupes, anneaux, modules) I*, Proc. Japan Acad. 62 (1986), Ser, A, No. 9, 350–352.

Krasner, Vuković 1986b: M. Krasner, M. Vuković, *Structures paragraduees (groupes, anneaux, modules) II*, Proc. Japan Acad. 62 (1986), Ser, A, No. 10, 389–391.

Krasner, Vuković 1987a: M. Krasner, M. Vuković, *Structures paragraduees (groupes, anneaux, modules) III*, Proc. Japan Acad. 63 (1987), Ser, A, No. 1, 10–12.

Krasner, Vuković 1987b: M. Krasner, M. Vuković, *Structures paragraduees (groupes, anneaux, modules)*, Queen's Papers in Pure and Applied MathematicsNo. 77, Queen's University, Kingston, Ontario, pp.1–163.

Nastasescu, Van Oystaeyen 2004: C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Perić[2] 1991: V. Perić, *Algebra I*, IP Svjetlost, Sarajevo, 1991.

Vuković 2001: M. Vuković, *Structures graduees et paragraduees*, Prepublication de l'Institut Fourier, Universite de Grenoble I, No. 536 (2001), pp. 1–40.

Vuković 2010: M. Vuković, *About Krasner's and Vuković's paragraduations*, International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 19–27 August 2010.

Sanja Tipurić-Spužević*
Sveučilište u Mostaru
Fakultet prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti Originalni naučni rad

INTEGRISANE POLUGRUPE I INTEGRISANA RJEŠENJA APSTRAKTNOG KOŠIJEVOG PROBLEMA

1. *Uvod*

Sa X ćemo označavati Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|$; $L(X)$ je prostor ograničenih linearnih operatora sa X u X.

Definicija 1.1. Familija $(T(t))_{t\geq 0}$ iz $L(X)$ je polugrupa ograničenih linearnih operatora na X ako je:

$(i)\ T(t)T(s)=T(t+s)$, za sve $t,s\geq 0$

$(ii)\ T(0)=I$, gdje je I operator identitete na X.

Ako za polugrupu $(T(t))_{t\geq 0}$ vrijedi sljedeći uvjet

$(iii)\ \lim_{t\downarrow 0} T(t)x=x$ za sve $x\in X$,

tada se $(T(t))_{t\geq 0}$ naziva jako neprekidnom polugrupom ili C_0-polugrupom.

Ako je $(T(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna polugrupa, tada postoje konstante $\omega\geq 0$ i $M\geq 1$, takve da je

$\|T(t)\|\leq Me^{\omega t}$, za sve $t\geq 0$.

Definicija 1.2. Linearni operator A, definiran na skupu

$$D(A)=\left\{x\in X:\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\ postoji\right\}$$

za koji je

$$Ax=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}=\frac{d^{+}T(t)x}{dt}|_{t=0},\qquad x\in D(A)$$

naziva se infinitizemalni generator polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$; $D(A)$ je domena od A.

Ako je A infinitizemalni generator jako neprekidne polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, tada je domena $D(A)$ gust skup u X i A je zatvoren operator.

* sanja.spuzevic@tel.net.ba

Ako je A linearan, ne nužno ograničen, operator u X, rezolventni skup $\rho(A)$ operatora A (koji može biti neograničen), je skup svih kompleksnih brojeva λ, za koje je operator $\lambda I - A$ invertibilan, a to znači da je $(\lambda I - A)^{-1}$ ograničen linearni operator definiran na cijelom prostoru X. Familija ograničenih linearnih operatora $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, naziva se rezolventom operatora A.

Ako je A infinitizemalni generator C_0 polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, tada vrijedi

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt, \ \lambda \in \rho(A),$$

tj. rezolventa operatora A je Laplaceova transformacija polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Također, za sve $x \in D(A)$ vrijedi

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s) Ax ds = A\int_0^t T(s) x ds .$$

Teorem Hille-Yosida daje potrebne i dovoljne uvjete koje treba da zadovoljava rezolventa operatora A, da bi bio infinitizemalni generator jako neprekidne polugrupe.

Teorem 1.3. Linearni operator A je infinitizemalni generator C_0-polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ za koju vrijedi $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, za sve $t \geq 0$ ako i samo ako:

(i) A je zatvoren operator i $D(A)$ je gust u X;

(ii) Rezolventni skup $\rho(A)$, operatora A, sadrži interval (ω, ∞), i

$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \omega)^n}$, za $\lambda > \omega,\ n = 1, 2, \ldots$

2. *Pojam i osnovne osobine integrisanih polugrupa*

Da bismo vidjeli kako se na prirodan način dolazi do pojma integrisanih polugrupa, izvršit ćemo sljedeće razmatranje.

Pretpostavimo da je $T(t)$, $t \geq 0$ jako neprekidna polugrupa na Banachovom prostoru X.

Formirajmo sada integrisanu polugrupu

$$S(t)=\int_0^t T(r)dr\,.$$

Tada familija operatora $S(t)$, $t\geq 0$ ima sljedeća svojstva

$$S(r)S(t)=\int_0^r T(\tau)d\tau\int_0^t T(s)ds=\int_0^r d\tau\int_0^t T(\tau+s)ds=$$

$$=\int_0^r d\tau\int_\tau^{t+\tau} T(\sigma)d\sigma=\int_0^r (S(\tau+t)-S(\tau))d\tau;$$

$$S(0)=0\,.$$

Relacija $S(0)=0$ je očigledna.

Nadalje, operatori $S(t)$ su po normi neprekidni za sve $t\geq 0$.

U daljnjem razmatranju ćemo zaboraviti kako smo dobili familiju operatora $S(t)$ i uvjet neprekidnosti operatora po normi ćemo zamijeniti sa jakom neprekidnošću, tj. pretpostavit ćemo da je $S(t)$ neprekidna funkcija za $t\geq 0$ za svaki $x\in X$.

Sada ćemo kratko izložiti svojstva integrisanih polugrupa.

Definicija 2.1. Familija ograničenih linearnih operatora $S(t), t\geq 0$ na Banach-ovom prostoru X se naziva integrisana polugrupa ako i samo ako vrijedi

$$S(0)=0; \tag{2.1}$$

$S(t)$ je jako neprekidna, za $t\geq 0$; (2.2)

$$S(r)S(t)=\int_0^r (S(\tau+t)-S(\tau))d\tau\,. \tag{2.3}$$

Također vrijedi:

$$S(r)S(t)=\int_0^r \big(S(t+\tau)-S(\tau)\big)d\tau=\int_t^{t+r} S(\tau)d\tau-\int_0^r S(\tau)d\tau=$$

$$\int_0^{t+r} S(\tau)d\tau-\int_0^t S(\tau)d\tau-\int_0^r S(\tau)d\tau==\int_r^{t+r} S(\tau)d\tau-\int_0^t S(\tau)d\tau=$$

$$\int_0^t S(r+\tau)-\int_0^t S(\tau)d\tau=\int_0^t \big(S(r+\tau)-S(\tau)\big)d\tau=S(t)S(r)$$

Prostor C^n, $n \geq 0$ definirat ćemo na sljedeći način:

$$C^0 = X \tag{2.4}$$

$C^n = \{x \in X; S(t)x$ je n-puta neprekidno diferencijabilna funkcija $\}$

Koristeći definiciju prostora C^n može se uvjet (2.3) preformulirati ovako:

$$\begin{aligned} &S(t)x \in C^1 \quad \text{i} \\ &S'(r)S(t) = S(r+t) - S(r). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Da je (2.3) ekvivalentno sa (2.5) vidi se na sljedeći način:

Ako vrijedi (2.3) za svako $x \in X$ onda je desna strana od (2.3) diferencijabilna po $r \geq 0$, jer je podintegralna funkcija neprekidna po τ, za proizvoljno fiksno $t \geq 0$. Zbog toga je i lijeva strana u (2.3) diferencijabilna po r, za proizvoljno ali fiksno $t \geq 0$). No to znači da $S(t)x \in C^1$, za svako fiksno $t \geq 0$ i svako fiksno $x \in X$. Sada se diferenciranjem dobija:

$$S'(r)S(t)x = S(r+t)x - S(r)x,$$

za svako $r, t \geq 0$ i svako fiksno $x \in X$, tj. vrijedi (2.5).

Obrnuto, ako vrijedi (2.5) za svako $x \in X$ i svako $r, t \geq 0$, onda je $S(r+t)x - S(r)x$ neprekidna funkcija od r $(r \geq 0)$ za svako fiksno $t \geq 0$ i svako fiksno $x \in X$. No to, prema jednakosti u (2.5), znači da je $S'(r)S(t)x$ neprekidna funkcija od $r \geq 0$, za svako fiksno $t \geq 0$ i svako fiksno $x \in X$ pa se integracijom dobije (2.3).

Lema 2.2. Neka je $S(t)$ integrisana polugrupa na Banach-ovom prostoru X. Tada:

a)

$$S(t) : C^n \to C^{n+1}, \; n \geq 0 \tag{2.6}$$

$$S'(t) : C^n \to C^n, \; n \geq 1 \tag{2.7}$$

$$S''(t) : C^{n+1} \to C^n, \; n \geq 1 \tag{2.8}$$

b) Vrijede sljedeće relacije:

$$S'(r)S(t)x - S'(t)S(r)x = S(t)x - S(r)x \quad \text{na } C^1 \tag{2.9}$$

$$S'(r)S(t)x = S(t)S'(r)x \quad \text{na } C^1 \tag{2.10}$$

$$S'(r)S'(t)x = S'(r+t)x \quad \text{na } C^1 \tag{2.11}$$

$$S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x \quad \text{na } C^1 \tag{2.12}$$
$$S(t)S''(0)x = S''(0)S(t)x \quad \text{na } C^2 \tag{2.13}$$
$$S''(t)x = S''(0)S'(t)x = S'(t)S''(0)x \quad \text{na } C^3 \tag{2.14}$$
$$S(r)S'(t)x = S(t+r)x - S(t)x \quad \text{na } C^1 \tag{2.15}$$
$$S(r)S''(t)x = S'(t+r)x - S'(t)x \quad \text{na } C^2 \tag{2.16}$$
$$S'(r)S''(t)x = S''(t+r)x = S''(t)S'(r)x \quad \text{na } C^2 \tag{2.17}$$

Dokaz: Navedene relacije se lako dokazuju, pa ćemo dokazati samo neke od navedenih.

a) Dokažimo najprije (2.6). Neka je $x \in C^n$. To znači da je funkcija $S(r)x$ neprekidno diferencijabilna *n*-puta. S druge strane prema (2.5) je

$$S'(r)S(t)x = S(r+t) - S(r)$$

Prema već rečenom, desnu stranu možemo diferencirati *n*-puta po r, pa pema tome, i lijevu. A to znači da $S(r)S(t)x$ možemo neprekidno diferencirati $(n+1)$-puta pa je $S(t)x \in C^{n+1}$. Slično se dokazuju tvrdnje (2.7) i (2.8).

b) Da vrijedi tvrdnja (2.10) možemo zaključiti na sljedeći način:

Neka je $x \in C^1$. To znači da je funkcija $S(r)x$ neprekidno diferencijabilna po r. Kako je

$S(r)S(t)x = S(t)S(r)x$, a

$$S(t)S(r)x = \int_0^t \big(S(r+\tau) - S(\tau)\big)x\,d\tau$$

lijeva strana navedene jednakosti je diferencijabilna po r, pa prema tome i desna, tako da nakon diferenciranja po r, dobijemo da je $S(t)S'(r)x = S(r+t)x - S(r)x = S'(r)S(t)x$.

Da vrijedi tvrdnja (2.11) vidi se na sljedeći način:

Diferenciranjem relaciji

$$S(r)S(t) = \int_0^r (S(\tau+t) - S(\tau))\,d\tau$$

po t, dobit ćemo

$$S(r)S'(t)x = \int_0^r S'(t+\tau)x\,d\tau = S(t+\tau)x\,|_{\tau=0}^{\tau=r} = S(t+r)x - S(t)x.$$

Ovdje je desna strana diferencijabilna (neprekidna) po r, pa je takva i lijeva strana tj. $S'(t)x \in C^1$, odnosno $S(r)S'(t)x$ je diferencijabilna po r, pri fiksnom t. Imamo, dakle,

$S'(r)S'(t)x = S'(t+r)x$.

Da vrijedi tvrdnja (2.12) može se zaključiti na sljedeći način:

Ako je $x \in C^1$, tada je $S(t)x \in C^2$, pa postoji (i neprekidna je) $S''(r)S(t)x$. Ako dakle, u (1.2.5), tj $S'(r)S(t)x = S(r+t)x - S(r)x$ diferenciramo po r, dobit ćemo $S''(r)S(t)x = S'(r+t)x - S'(r)x$. Odavde ako stavimo $r = 0$, imat ćemo $S''(0)S(t)x = S'(t)x - S'(0)x$ tj. $S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x$,

što je i trebalo dokazati.

Da vrijedi tvrdnja (2.13) vidi se na sljedeći način:

Neka je, sada, $x \in C^2$. To znači da je funkcija $S(r)x$ dva puta neprekidno diferencijabilna. Prema (2.5) je $S(t)S'(r)x = S(r+t)x - S(r)x$. S obzirom da lijevu stranu, posljednje jednakosti, možemo diferencirati po r, onda možemo i desnu stranu diferencirati, što nas dovodi do jednakosti

$S(t)S''(r)x = S'(r+t)x - S'(r)x$.

Uvrštavanjem $r = 0$ dobijemo

$S(t)S''(0)x = S'(t)x - S'(0)x$.

Odakle, prema (2.10), dobijemo

$\boldsymbol{S(t)S''(0) = S''(0)S(t)}$.

Definicija 2.3. Skup

$$\boldsymbol{N = \{x \in X; S(t)x = 0, t \geq 0\}}$$

se naziva prostor degeneracije integrisane polugrupe $S(t)$. $S(t)$ nazivamo nedegeneriranom, ako je $\boldsymbol{N = \{0\}}$. Ako prostor N sadrži i neke druge elemente osim 0, tada $S(t)$ nazivamo degeneriranom integrisanom polugrupom.

3. *Generator nedegenerirane integrisane polugrupe*

Ako je $T(t), t \geq 0$ jako neprekidna polugrupa na X sa generatorom A, tada je $x \in D(A)$ i $Ax = y$ ako i samo ako je

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds.$$

Ovu karakterizaciju generatora polugrupe ćemo iskoristiti za definiciju generatora integrisane polugrupe.

Definicija 3.1. Generator $A: D(A) \subseteq X \to X$, nedegenerirane integrisane polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$ se definira na sljedeći način:

$x \in D(A)$ i $Ax = y$ ako i samo ako $x \in C^1$ i

$$S'(t)x - x = S(t)y \text{ za } t \geq 0. \tag{3.1}$$

Ekvivalentno tome možemo tvrditi: $x \in D(A)$ i $Ax = y$ ako i samo ako je

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)y\,dr \text{ za } t \geq 0. \tag{3.2}$$

Primijetimo da ova definicija ne zahtijeva da je integrisana polugrupa eksponencijalno ograničena.

Lema 3.2. $C^2 \subseteq D(A) \subseteq C^1$ i $Ax = S''(0)x$ za, $x \in C^2$. Čak i više $AC^2 \subseteq C^1$.

Dokaz: Neka je $x \in D(A)$. To znači da je $x \in C^1$ i da postoji $y \in X$ za kojeg vrijedi

$$S'(t)x - x = S(t)y \ (t \geq 0). \tag{3.3}$$

Ako je $\bar{y}$ drugi element za kojeg vrijedi

$$S'(t)x - x = S(t)\bar{y} \ (t \geq 0), \tag{3.4}$$

onda bismo iz (3.3) i (3.4) imali

$S(t)y = S(t)\bar{y}$, $(\forall t \geq 0)$,

tj. $S(t)(y - \bar{y}) = 0$, $(\forall t \geq 0)$.

Kako je $S(t)$ nedegenerisana integrisana polugrupa, to odavde slijedi $y - \bar{y} = 0$, tj. $y = \bar{y}$.

Po definiciji generatora je $D(A) \subseteq C^1$. Dokažimo da je $C^2 \subseteq D(A)$. Dokazat ćemo najprije da za $x \in C^1$ vrijedi $S'(0)x = x$. Prema (2.9), imamo za sve $x \in X$

$$S'(r)S(t)x - S'(t)S(r)x = S(t)x - S(r)x$$

pa, za $r = 0$, pošto je $S(0) = 0$, dobivamo

$$S'(0)S(t)x = S(t)x \ . \tag{3.5}$$

Kako je $x \in C^2 \subseteq C^1$ to, prema (2.10), za $r = 0$, imamo

$S'(0)S(t)x = S(t)S'(0)x$.

Ovo i (3.5) daju

$S(t)S'(0)x = S(t)x$, $(\forall t \geq 0)$

i dalje $S(t)\left[S'(0)x - x\right] = 0$, $(\forall t \geq 0)$

Kako je $S(t)$ nedegenerirana, integrisana polugrupa, to dobijemo

$S'(0)x - x = 0$

Znači, za $x \in C^1$, je

$$S'(0)x = x \ . \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da je $x \in C^2$ i stavimo

$H(t)x = S'(t)x - x - S(t)S''(0)x$

Dalje imamo

$$H(t)x = S'(t)x - x - S(t)S''(0)x \overset{(2.13)}{=} S'(t)x - x - S''(0)S(t)x \overset{(2.12)}{=}$$

$$= S'(0)x - x = x - x = 0.$$

Znači $H(t) = 0$ tj. $S'(t)x = x + S(t)S''(0)x$, što znači da vrijedi (3.3), gdje je $y = S''(0)x$.

Dakle, ako je $x \in C^2$, onda je $x \in D(A)$ i $Ax = S''(0)x$, tj.

$C^2 \subseteq D(A)$ i $Ax = S''(0)x$, $x \in C^2$.

Na kraju, iz

$S'(t)x = x + S(t)Ax = x + S(t)S''(0)x$

$S(t)Ax = S(t)S''(0) = S'(t)x - x$.

Desna strana je neprekidno diferencijabilna, jer je $x \in C^2$, pa je tako i lijeva strana. Dakle $Ax \in C^1$.

Lema 1.3.3. A je zatvoren linearni operator.
Dokaz: Slijedi neposredno iz (3.2).

Lema 1.3.4. $S(t): C^1 \to C^2 \subseteq D(A)$ i

$AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - x$. Nadalje, $AS(t)x = S(t)Ax$, za $x \in D(A)$.

Dokaz: Ova tvrdnja slijedi iz leme 3.2, jednakosti (2.12), lema 2.3. i (3.1)

4. *Homogeni Košijev problem*

Neka je X Banachov prostor, a A zatvoren linearni operator na X koji generira nedegeneriranu integrisanu polugrupu $S(t)$. Za fiksan element $x \in X$, promatrat ćemo tzv. Košijev problem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ &u(0) = x \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Posljednji uvjet naziva se početni uvjet. Ako je $x \in C^3$ tada se naš problem može lako riješiti. Naime, ako uzmemo $x \in C^3$, tada je $x \in D(A)$ i vrijedi

$$S'(t)x - x = S(t)Ax.$$

Pošto $S(t)$ i Ax komutiraju, to imamo

$$S'(t)x - x = AS(t)x.$$

Pošto je $x \in C^3$, lijeva strana se može diferencirati, tako da imamo

$$S''(t)x = \lim_{h\to 0}\frac{S'(t+h)x - S'(t)x}{h} = \lim_{h\to 0} A\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h}.$$

Dakle,

$$A\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \to S''(t)x$$

S druge strane

$$\frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \to S'(t)x, \ \ kada\ h \to 0$$

Iz ovog i iz zatvorenosti operatora A, slijedi:

$S'(t)x \in D(A)$ i $AS'(t)x = S''(t)$.

Ako stavimo $u(t) = S'(t)x$, imamo $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)$. Osim toga, prema (2.12), kada u (2.3) stavimo $t = 0$, je $u(0) = S'(0)x = x$. Dakle, u slučaju $x \in C^3$,je funkcija $u(t) = S'(t)x$ rješenje Košijevog problema (4.1)

Sada, iz (4.1), gdje je $u(t) = S'(t)x$, integracijom u granicamaod 0 do t dobivamo

$$u(t) = A\int_0^t u(t)\,dt + x. \tag{4.2}$$

Dakle, rješenje $u(t)$, jednačine (4.1), zadovoljava i (4.2). Obratno ne mora vrijediti. Jednadžba (4.2) može imati rješenja koja ne zadovoljavaju (4.1) što znači da je uvjet (4.2) slabiji od uvjeta (4.1).

Možemo se ići i dalje. Ako stavimo $v(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau$, jednadžba (4.2) će primiti oblik

$$\frac{dv}{dt}=Av+x,\ v(0)=0.$$

Novom integracijom od 0 do t dobit ćemo

$$v=A\int_0^t v(\tau)\,d\tau+tx,\ v(0)=0. \tag{4.3}$$

Prethodna razmatranja pokazuju da se iz rješenja jednadžbe (4.1), nakon dvije uzastopne integracije, dobivaju rješenje jednadžbe (4.3). Isto tako se iz svakog rješenja jednadžbe (4.2) dobija rješenje jednadžbe (4.3). No (4.3) može imati i rješenja koja se ne dobivaju na ovaj način. Razmotrimo sada jednadžbu (4.3) i potražimo sva njena rješenja. Rješavanje problema (4.3) se može smatrati rješavanjem problema (4.1) u nekom generaliziranom smislu.

Zapravo, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.1. Za svako $x\in X$, $v(t)=S(t)x$ je jedinstveno neprekidno rješenje problema (4.3).

Čak i više, $\|v(t)\|\le C(t)\|x\|$, gdje $C(t)$ ne ovisi od x.

Napomena: Funkcija $C(t)$ je u stvari $\|S(t)\|$.

Ostatak ovog poglavlja ćemo posvetiti dokazivanju obrata ovog teorema.

Teorem 4.2. Linearni operator A na X je generator nedegenerisane integrisane polugrupe ako i samo ako vrijede sljedeća dva uvjeta :

(i) $v\equiv 0$ je jedino neprekidno rješenje problema (4.3), za $x=0$.

(ii) Za bilo koje $x\in X$ jednačina (4.3) ima neprekidno rješenje v takvo da je $\|v(t)\|\le C(t)\|x\|$, za neko $C(t)>0$ koje ne ovisi o x.

Dokaz: Dio $\Rightarrow$ ovog teorema je teorem 4.1.

Pretpostavimo, sada, da su zadovoljeni uvjeti (i) i (ii). Neka je $v(t)$ neprekidno rješenje problema (4.3). Uočimo prvo da je to rješenje jedinstveno za dano $x\in X$. Naime, ako je i $v_1(t)$ neprekidno rješenje problema (4.3), tada imamo

$$v(t) = A\int_0^t v(\tau)\,d\tau + tx,$$

$$v_1(t) = A\int_0^t v_1(\tau)\,d\tau + tx,$$

i $v(0) = v_1(0) = 0$. Odavde slijedi

$$v(t) - v_1(t) = A\int_0^t \big(v(\tau) - v_1(\tau)\big)\,d\tau$$

i $v(0) - v_1(0) = 0$. Ovo znači da je funkcija $v(t) - v_1(t)$ neprekidno rješenje problema (4.3), pri čemu je $x = 0$. Prema uvjetu (i) je $v(t) - v_1(t) \equiv 0$, tj. $v_1(t) = v(t)$.

Stavimo, sada, po definiciji

$S(t)x = v(t)$, za $t \geq 0$

gdje je v jedinstveno rješenje koje zadovoljava uvjete (i) i (ii).

Prvo ćemo provjeriti da je $S(t)$, $t \geq 0$, integrisana polugrupa, a zatim i da je A njen generator.

Operatori $S(t)$ su linearni zbog toga što rješenje od (4.3) mora biti jedinstveno i ograničeni zbog procjene $\|v(t)\| \leq C(t)\|x\|$ koja vrijedi prema uvjetu (ii)

Provjerimo sada (2.1), (2.2), (2.3). Jednakost (2.1) slijedi iz (4.3), a (2.2) iz neprekidnosti funkcije $v(t)$. U svrhu provjere (2.3) fiksirat ćemo $r \geq 0$ i staviti

$$v_1(t) = S(r)S(t)x \ , \ \ v_2(t) = \int_0^t (S(r+\tau) - S(\tau))x\,d\tau \ .$$

Iz (4.3) slijedi da v_1 i v_2 zadovoljavaju jednačinu

$$v_j(t) = A\int_0^t v_j(s)\,ds + tS(r)x \ .$$

Prema definiciji funkcije $S(t)x$, ona je rješenje jednačine (4.3), tj. vrijedi

$$S(t)x = A\int_0^t S(\tau)x\,d\tau + tx,$$

a odavde, djelujući sa $S(r)$ pri fiksnom r, dobijamo

$$S(r)S(t)x = A\int_0^t S(r)S(\tau)d\tau + tS(r)x,$$

tj. $$v_1(t) = A\int_0^t v_1(\tau)d\tau + tS(r)x,\ v(0) = 0.$$

Dalje, držeći r fiksnim, dobijamo

$$v_2(t) \overset{def.}{=} \int_0^t \left[S(r+\tau)x - S(\tau)x\right]d\tau = \int_0^t S(r+\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)d\tau$$

$$= \int_r^{t+r} S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau.$$

Dakle, $v_2(t) = \int_0^{t+r} S(\tau)xd\tau - \int_0^r S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau,$

i dalje,

$$Av_2(t) = A\int_0^{t+r} S(\tau)xd\tau - A\int_0^r S(\tau)xd\tau - A\int_0^t S(\tau)xd\tau$$

S obzirom da $S(t)x$ zadovoljava jednakost (4.3), odavde, dobijemo

$$Av_2(t) = \left[S(t+r) - (t+r)x\right] - \left[S(r)x - rx\right] - \left[S(t)x - tx\right].$$

Dakle,

$$Av_2(t) = S(t+r) - S(r)x - S(t)x.$$

Odavde, nakon integracije od 0 do t, dobivamo

$$A\int_0^t v_2(\tau)d\tau = \int_0^t \left[S(\tau+r)x - S(\tau)x\right]d\tau - tS(r)x,$$

tj. $A\int_0^t v_2(\tau)d\tau = v_2(\tau) - tS(r)x.$

Prema tome $v_2(t)$ zadovoljava (4.3).

Jedinstvenost rješenja problema (4.3), tada povlači $v_1 = v_2$, tj. (4.3).

Sada ćemo dokazati da je A generator od S. Da bismo dokazali da je A sadržan u generatoru od S, uzmimo $x \in D(A)$ i provjerimo (3.2) , tj.

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(s)Axds.$$

Lako se može vidjeti da obje strane jednadžbe zadovoljavaju

$$w(t) = A\int_0^t w(s)ds + \frac{1}{2}t^2 Ax.$$

Uvjet (i) povlači da oni moraju biti jednaki.

Da bi dokazali da je A proširenje generatora od S, uzmimo $x, y \in X$ za koje je

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)y dr \text{, za } t \geq 0.$$

Prema (4.3),

$S(t)x - tx \in D(A)$ i $A(S(t)x - tx) = S(t)y - ty$.

Kako je operator A zatvoren, iz leme 3.2, imamo

$$\frac{t^2}{2}x = \int_0^t S(r)x dr - \int_0^t (S(r)x - rx)dr \in D(A)$$

$$A\left(\frac{t^2}{2}x\right) = S(t)x - tx - \int_0^t S(r)y dr + \frac{t^2}{2}y = \frac{t^2}{2}y.$$

Odavde je $x \in D(A)$ i $Ax = y$.

Korolar 4.3. Neka je A gusto definiran operator na X. A generira nedegenerisanu integrisanu polugrupu na X ako i samo ako jednačina

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t) + x, \quad t \geq 0, \; v(0) = 0 \tag{4.4}$$

ima jedinstveno neprekidno rješenje v, za svako $x \in D(A)$ i, za svaki ograničen interval $[0, a]$, postoji konstanta $C \geq 0$ takva da je $\|v(t)\| \leq C\|x\|$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Stavit ćemo $v(t) = S(t)x$ i koristiti lemu 3.4.

$\Leftarrow$ Provjerimo uvjete (i) i (ii) teorema 4.2. Počnimo sa (ii). Neka je $x \in X$ i

niz $x_n \in D(A)$ odaberimo tako da $x_n \to x$ kada $n \to \infty$. Tada postoji jedinstveno neprekidno rješenje v_n za koje vrijedi

$$\frac{d}{dt}v_n(t) = Av_n(t) + x_n, \quad \text{za} \quad t \geq 0,$$

i $\|v_n(t)\| \leq C\|x_n\|$. Dalje, $\|v_n(t) - v_m(t)\| \leq C\|x_n - x_m\|$, tako da $v_n(t) \to v(t)$ kada $n \to \infty$, gdje je v neprekidna funkcija. Integrirajući posljednju jednakosti, dobijamo

$$v_n(t) = A\int_0^t v_n(s)ds + tx_n.$$

Odavde

$A\int_0^t v_n(s)ds \to v(t) - tx$, kada $n \to \infty$.

Pošto je operator A zatvoren, imamo

$A\int_0^t v(s)ds = v(t) - tx$,

i $\|v(t)\| \le C\|x\|$, za t iz ograničenog intervala.

Jedinstvenost rješenja slijedi neposredno iz činjenice da je rješenje (4.4), jedinstveno u slučaju $x = 0$. No, ova činjenica se može dokazati ovako: Neka je $v(t)$ rješenje problema

$v'(t) = Av(t),\ v(0) = 0.$

Tada, integracijom dobivamo

$v(t) = A\int_0^t v(\tau)\,d\tau,\ v(0) = 0$

Ponovnom integracijom, stavljajući $w(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau$, dobivamo

$w(t) = A\int_0^t w(\tau)\,d\tau,\ \ w(0) = 0$

No, od ranije znamo da odavde slijedi $w(t) \equiv 0$, pa je i $v(t)\left(= w'(t)\right) \equiv 0$.

Literatura

Arendt 1987: Arendt, W., *Rezolvent Positive Operators*, Proc. London Math. Soc., 54, 321–349.

Arendt 1987: Arendt, W., *Vector Laplace Transformations and Cauchy Problems*, Israel J. of Math. 59, 327–352.

Arendt, Kellermann 1987: Arendt, W., Kellermann, H., *Integrated Solutions of Volterra integrodifferential Equations and Applications*, Proc. Conf. Trento/Italy, 21–51.

Hieber 1995: Hieber, M., *L^p spectra of pseudodifferenti*, 4023–4035.

Kellermann, Hieber 1989: Kellermann, H., Hieber, M., *Integrated semigroups*, J. Func. Anal. 84, 160–180.

Mijatović i dr. 1997: Mijatović, M., Pilipović, S., Vajzović, F., *α – Times Integrated Semigroups*, J. Math. Anal. Appl.; 210, 793–803

Pilipović i dr. 2008: Pilipović, S., Vajzović, F., Vuković, M., *Clases of Distribution Semigroups*, Novi Sad, J. Math. Vol. 38, No. 1, 127–135.

Neubrander 1988: Neubrander, F., *Integrated Semigroups and their Applications to the abstract Cauchy Problems, Pacific J. Math. 135*, 111–155.

Thieme 1990: Thieme, H. R., *Integrated Semigroups and integrated Solutions to abstract Cauchy Prob- Lems, J. Math. Anal. Appl.* 152, 416–447.

Секција за примијењену математику

Раде Лазовић[*]
Биљана Стошић
Соња Ишљамовић
Универитет у Београду
Факултет организационих наука
Катедра за математику

Оригинални научни рад

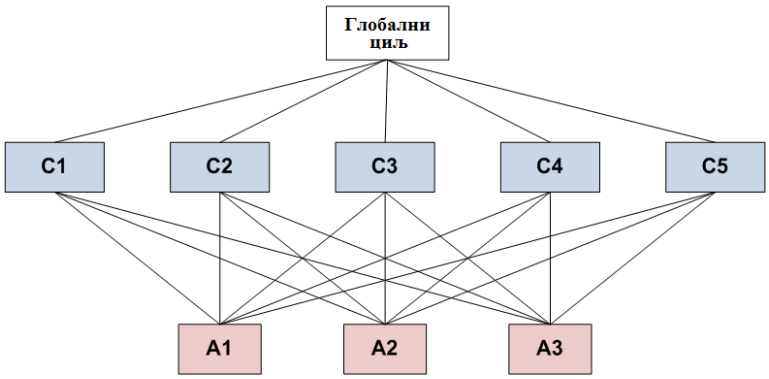
ПРИМЕНА ДВОПАРАМЕТАРСКИХ РАСПОДЕЛА У ИНТЕРВАЛНОЈ АХП МЕТОДИ

Увод

Аналитички хијерархијски процес (Analytic Hierarchy Process – АХП) је метод вишекритеријумског одлучивања који је развио Томас Сати (Thomas L. Saaty) седамдесетих година двадесетог века. Главни циљ методе је одређивање глобалних тежина у односу на које се врши рангирање алтернатива. Основни методолошки кораци у примени АХП методе су:

– структуирање проблема,
– прикупљање података,
– одређивање релативних тежина,
– налажење решења проблема.

Структуирање проблема представља декомпозицију проблема, идентификацију елемената и њихово уграђивање у серију хијерархија. На врху хијерархијске структуре увек се налази глобални циљ, затим следе атрибути-критеријуми, а на последњем нивоу налазе се понуђене алтернативе које се рангирају на основу идентификованих атрибута. На слици 1 приказана је хијерархијска структура са три хијерархијска нивоа.



Слика 1: АХП архитектура са три нивоа

[*] lazovic@fon.bg.ac.rs

Први ниво је глобални циљ, наредни ниво чине пет критеријума-атрибута (C1, ..., C5), док су на последњем нивоу понуђене алтернативе (A1, A2, A3).

Након прикупљања података (у обзир долазе како квантитативни, тако и квалитативни подаци) следи кључна фаза методе – одређивање локалних (релативних) тежина $w_1, \dots, w_n$ на основу матрица поређења по паровима. Матрице поређења по паровима садрже експертске оцене и формирају се на сваком нивоу у односу на надређени ниво. На пример, за хијерархијску структуру на слици 1, формира се једна матрица поређња реда 5x5 за други ниво (у односу на глобални циљ) и пет матрица поређења реда 3x3 за трећи ниво (у односу на критеријуме C1, ... , C5).

Решење проблема – вектор глобалних тежина, добија се на основу претходно одређених вектора локалних тежина (Saaty 1980, Saaty, Vargas 1987).

У конвенционалној АХП методи матрице поређења по паровима су облика

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \ddots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

и формирају се на следећи начин. Доносилац одлука задаје елементе a_{ij} у горњем троуглу матрице A тако да сваки од тих елемената представља количник релативних (локалних) тежина w_i и w_j:

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}; \quad i = 1, \dots, n-1; \quad j = i+1, \dots, n.$$

За елементе у доњем троуглу узимају се реципрочне вредности одговарајућих елемената који припадају горњем троуглу матрице A:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}; \quad j = 2, \dots, n; \quad i = 1, \dots, j-1.$$

Вектор релативних тежина $w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]$ добија се као десни сопствени – Перонов вектор матрице A (Saaty 1980). То је сопствени вектор који одговара максималној сопственој вредности матрице A:

$$Aw = \lambda_{max} w.$$

Ако доносилац одлука располаже свим релевантним информацијама везаним за проблем који проучава, он може тачно упоредити важност два критеријума или две алтернативе у односу на надређени критеријум и на тај начин формирати матрицу облика (1). Међутим, због комплексности проблема, то је често неизводљиво и доносилац одлука је принуђен да даје интуитивне оцене количника w_i / w_j . То резултира неконзистентношћу матрице A. Покушаји да се превазиђу проблеми овакве природе довели су до нових варијанти АХП методе, у првом реду до интервалне АХП методе (Saaty, Vargas 1994).

Интервална АХП метода (ИАХП) базира се на матрицама поређења облика

$$A = \begin{bmatrix} 1 & [\underline{w}_{12}, \overline{w}_{12}] & \dots & [\underline{w}_{1n}, \overline{w}_{1n}] \\ [\underline{w}_{21}, \overline{w}_{21}] & 1 & \dots & [\underline{w}_{2n}, \overline{w}_{2n}] \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ [\underline{w}_{n1}, \overline{w}_{n1}] & [\underline{w}_{n2}, \overline{w}_{n2}] & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

где је $\underline{w}_{ij}$ доња, а $\overline{w}_{ij}$ горња граница количника w_i / w_j. Имајући у виду реципрочну структуру матрице поређења, претпоставља се да важи $\underline{w}_{ij} \cdot \overline{w}_{ji} = 1$ за свако $i, j = 1, \dots, n$. Овакве матрице називају се интервалне реципрочне матрице.

У овом раду се предлаже нов поступак конструкције матрице поређења у варијанти интервалне АХП методе у којој се сваки од елемената матрице A на позицији (i, j) посматра као реализација случајне променљиве $X_{ij} = W_i / W_j$ која се карактерише двопараметарском густином расподеле $f(x; a_{ij}, b_{ij})$. Конструкција матрице поређења одвија се у две фазе.

У првој фази доносилац одлука задаје интервале $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ у горњем троуглу матрице A и одговарајуће вероватноће p_{ij} тако да је $P(\underline{a}_{ij} < X_{ij} < \overline{a}_{ij}) = p_{ij}$, односно

$$\int_{\underline{a}_{ij}}^{\overline{a}_{ij}} f(x; a_{ij}, b_{ij}) dx = p_{ij}. \qquad (2)$$

Поред тога, доносилац одлука указује на број m_{ij}, $m_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ који представља очекивану вредност случајне променљиве X_{ij}:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x; a_{ij}, b_{ij}) dx = m_{ij}. \qquad (3)$$

Ако математичко очекивање случајне променљиве X_{ij} не постоји, замењује се неком другом карактеристиком средње вредности, нпр. модусом или медијаном. Решавањем система (2), (3) добијају се конкретне вредности параметара a_{ij} и b_{ij} и на тај начин утврђује тачна расподела случајне променљиве X_{ij}. Тиме се завршава прва фаза формирања матрице A.

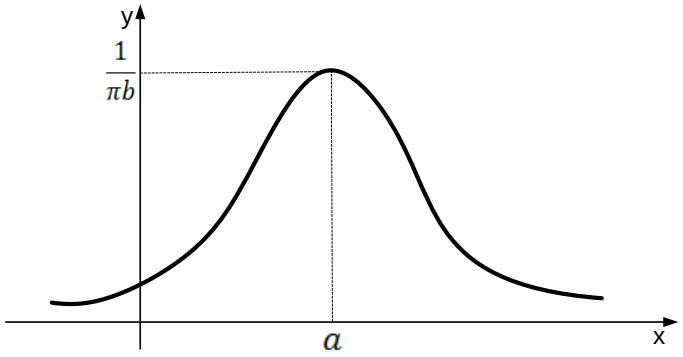
У другој фази формирају се интервали који припадају доњем троуглу матрице поређења, сагласно расподели случајне променљиве $Y_{ji} = 1/X_{ij},\ j = 2, \dots, n;\ i = 1, \dots, j-1$.

Код избора расподеле случајне променљиве X_{ij} пожељно је да случајна променљива Y_{ji} има исти тип расподеле као и X_{ij} (у противном би узајамна промена редоследа критеријума C_i и C_j резултирала чињеницом да једна те иста случајна променљива има два различита типа расподеле).

Једна од ретких расподела која има такво својство је Кошијева двопараметарска расподела $C(a,b)$ са густином расподеле

$$f(x) = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2+(x-a)^2}.$$

Типичан облик густине расподеле приказан је на слици 2.



Слика 2: Густина Кошијеве расподеле C(a,b)

Параметар a репрезентује средњу вредност (у овом случају модус или медијану – математичко очекивање не постоји), док је параметар b мера одступања случајне променљиве од њене средње вредности.

Ако је $X:C(a,b)$, показује се (Lipovetsky, Tishler 1999) да $Y = 1/X:C(a^*,b^*)$, где је

$$a^* = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad b^* = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Дакле, у овом случају реципрочна случајна променљива има такође Кошијеву двопараметарску расподелу.

Конструкција матрице поређења

Описани поступак конструкције матрице поређења по паровима реализоваћемо на примеру двопараметарске Кошијеве расподеле.

За свако $i = 1, \dots, n-1$ и $j = i+1, \dots, n$ задајемо интервал $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, $\underline{a}_{ij} > 0$ као интервал могућих реализација случајне променљиве X_{ij} чија је густина расподеле

$$f(x;\, a_{ij}, b_{ij}) = \frac{b_{ij}}{\pi} \cdot \frac{1}{b_{ij}^2+(x-a_{ij})^2}.$$

Сваком од задатих интервала $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ придружујемо вероватноћу p_{ij} тако да је

$$\frac{b_{ij}}{\pi} \int_{\underline{a}_{ij}}^{\overline{a}_{ij}} \frac{dx}{b_{ij}^2+(x-a_{ij})^2} = p_{ij}. \qquad (3)$$

Вероватноће p_{ij} одражавају степен сигурности којом доносилац одлуке указује на интервал $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ као могућу реализацију количника W_i / W_j. Имајући у виду природу проблема који се решава, претпоставке

$$0.5 < p_{ij} < 1,\ i = 1, \dots, n-1;\ j = i+1, \dots, n \qquad (4)$$

сматрају се логичним и унапред испуњеним.

С обзиром да је Кошијева расподела симетрична за први параметар расподеле $C(a_{ij}, b_{ij})$ узимамо $a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\underline{a}_{ij} + \overline{a}_{ij}\right)$.

За свако израчунато a_{ij}, параметар расподеле b_{ij} одређујемо из релације (3). Након рачунања интеграла добија се

$$\frac{1}{\pi}\left(arctg\ \frac{\overline{a}_{ij}-a_{ij}}{b_{ij}} - arctg\ \frac{\underline{a}_{ij}-a_{ij}}{b_{ij}}\right) = p_{ij},$$

односно

$$\frac{2}{\pi} arctg \frac{h_{ij}}{b_{ij}} = p_{ij}, \qquad (5)$$

где је $h_{ij} = a_{ij} - \underline{a}_{ij}$.

Из (5) добијамо

$$b_{ij} = h_{ij}\, ctg \frac{\pi p_{ij}}{2},\ i = 1, \dots, n-1;\ j = i+1, \dots, n. \qquad (6)$$

Овим се завршава прва фаза конструкције матрице поређења по паровима у којој су утврђене тачне расподеле случајних променљивих које одговарају датим интервалима горњег троугла матрице поређења.

Друга фаза конструкције матрице A односи се на формирање елемената у доњем троуглу матрице, за које ћемо претпоставити да су облика $[\underline{a}_{ji}{}^*, \overline{a}_{ji}{}^*]$ за $j = 2, \dots, n;\ i = 1, \dots, j-1$. Као што је већ речено, расподела сваке од одговарајућих случајних променљивих $Y_{ji} = 1/X_{ij}$ је Кошијева расподела $C(a^*_{ji}, b^*_{ji})$, где је

$$a^*_{ji} = \frac{a_{ij}}{a_{ij}^2 + b_{ij}^2},\quad b^*_{ji} = \frac{b_{ij}}{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}.$$

Због тога је природно да се за средину интервала $[\underline{a}_{ij}{}^*, \overline{a}_{ij}{}^*]$ узме средња вредност случајне променљиве Y_{ji}, односно параметар a^*_{ji}. На тај начин можемо сматрати да су интервали у доњем троуглу матрице облика $[a^*_{ji} - h^*_{ji},\ a^*_{ji} + h^*_{ji}]$ за неко $h^*_{ji} > 0$. Како интервал $[a^*_{ji} - h^*_{ji},\ a^*_{ji} + h^*_{ji}]$ има исту вероватноћу као и одговарајући интервал $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, параметре h^*_{ji} одређујемо из услова да је $P(a^*_{ji} - h^*_{ji} < Y_{ji} < a^*_{ji} + h^*_{ji}) = p_{ij}$, односно као решење једначине

$$\frac{b^*_{ji}}{\pi} \int_{a^*_{ji}-h^*_{ji}}^{a^*_{ji}+h^*_{ji}} \frac{dx}{b^{*2}_{ji} + (x - a^*_{ji})^2} = p_{ij}.$$

Након рачунања интеграла, слично као и у првој фази, добија се

$$h_{ji}^{*} = b_{ji}^{*}\, tg\frac{\pi p_{ij}}{2},\ j = 2,\dots,n;\ \ i = 1,\dots,j-1. \qquad (7)$$

Интервали доњег троугла матрице A биће коректно формирани само ако је $a_{ji}^{*} - h_{ji}^{*} > 0$, где се h_{ji}^{*} рачунају из релације (7). У прилог томе иде следећа оцена:

$$a_{ji}^{*} - h_{ji}^{*} = \frac{1}{a_{ij}^{2} + b_{ij}^{2}}\left(a_{ij} - b_{ij}\, tg\frac{\pi p_{ij}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{a_{ij}^{2} + b_{ij}^{2}}\left(a_{ij} - h_{ij}\, ctg\frac{\pi p_{ij}}{2}\ tg\frac{\pi p_{ij}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_{ij}^{2}+b_{ij}^{2}}\left(a_{ij} - h_{ij}\right) = \frac{a_{ij}}{a_{ij}^{2}+b_{ij}^{2}} > 0.$$

Формирањем интервала $\left[a_{ji}^{*} - h_{ji}^{*},\ a_{ji}^{*} + h_{ji}^{*}\right],\ j = 2,\dots,n;\ \ i = 1,\dots,j-1$ завршава се и друга фаза формирања матрице поређења по паровима. Приметимо да је $a_{ji}^{*} < \frac{1}{a_{ij}}$, тако да добијена матрица поређења није интервално реципрочна.

Нумерички пример

Конструкцију матрице поређења по паровима и одређивање релативних тежина илустроваћемо на примеру који представља модификацију примера (Li 2009). У (Li 2009) задаје се матрица поређења A_r која је интервално реципрочна,

$$A_r = \begin{bmatrix} [1,1] & [2,4] & [1,2] & [2,3] & [1,2] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & [1,1] & \left[\frac{1}{2},1\right] & [1,1] & \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \\ \left[\frac{1}{2},1\right] & [1,2] & [1,1] & [1,2] & [1,2] \\ \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] & [1,1] & \left[\frac{1}{2},1\right] & [1,1] & \left[\frac{1}{2},1\right] \\ \left[\frac{1}{2},1\right] & [2,3] & \left[\frac{1}{2},1\right] & [1,2] & [1,1] \end{bmatrix}$$

Модификација се односи на елементе у доњем троуглу матрице поређења, док су елементи у горњем троуглу матрице исти као и елементи матрице A_r. Задавањем вероватноћа p_{12}=0.91, p_{13}=0.92, p_{14}=0.95, p_{15}=0.93, p_{23}=0.89, p_{24}=0.87, p_{25}=0.88, p_{34}=0.90, p_{35}=0.95, p_{45}=0.94 и применом процедуре описане у претходном одељку, добијена је матрица поређења

$$A_c = \begin{bmatrix} [1.0000, 1.0000] & [2.0000, 4.0000] & [1.0000, 2.0000] & [2.0000, 3.0000] & [1.0000, 2.0000] \\ [0.2217, 0.4434] & [1.0000, 1.0000] & [0.5000, 1.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.3333, 0.5000] \\ [0.4437, 0.8873] & [0.8859, 1.7718] & [1.0000, 1.0000] & [1.0000, 2.0000] & [1.0000, 2.0000] \\ [0.3199, 0.4799] & [1.0000, 1.0000] & [0.4432, 0.8864] & [1.0000, 1.0000] & [0.5000, 1.0000] \\ [0.4438, 0.8877] & [1.9172, 2.8758] & [0.4441, 0.8883] & [0.8880, 1.7760] & [1.0000, 1.0000] \end{bmatrix}$$

Релативне тежине одређене су на основу узорка од *n*=500 матрица облика (1) које су

добијене из интервалне матрице A_c на следећи начин. На сваком од интервала $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, $i \neq j$ одабрана је једна тачка на случајан начин у складу са одговарајућом Кошијевом расподелом. Коришћењем *MATLAB* процедуре *eig*(A), за сваку тако формирану матрицу одређен је Перонов вектор релативних тежина и на тај начин добијен скуп Перонових вектора x_j облика

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \\ x_{4j} \\ x_{5j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, 500.$$

Имајући у виду начин формирања узорка, овакав скуп Перонових вектора можемо сматрати репрезентативним. За свако $i = 1, \dots, 5$ компонента x_{ij} вектора x_j, $j = 1, \dots, 500$ апроксимира релативну тежину w_i вектора релативних тежина $w = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5]$. Отуда се узима

$$w = \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} x_k$$

На тај начин се компонента w_i добија као аритметичка средина одговарајућих компоненти Перонових вектора у узорку.

У табели 1 дате су компоненте вектора релативних тежина w_{A_r} и w_{A_c} редом за матрице A_r и A_c. Вектор w_{A_r} је интервалног типа, а добијен је применом методе интервалног сопственог вектора (Li, 2009). Вектор w_{A_c} добијен је применом претходно описане процедуре.

w_{A_r}	w_{A_c}
[0.2730, 0.3538]	0.3370
[0.1120, 0.1275]	0.1213
[0.1815, 0.2523]	0.2090
[0.1254, 0.1458]	0.1399
[0.1868, 0.2356]	0.1927

Табела 1: Вектори релативних тежина матрица A_r и A_c

Добијени резултати указују на сагласност компоненти вектора w_{A_c}са одговарајућим компонентама вектора w_{A_r} у погледу решења основног задатка који стоји пред доносиоцем одлука – рангирање критеријума или алтернатива у складу са добијеним вектором релативних тежина. Треба истаћи да метода интервалног сопственог вектора, као и већина АХП метода интервалног типа, користи технике линеарног програмирања. Метода презентована у овом раду заснива се на случајном узорку чија реализација захтева коришћење симулатора дводимензионалне Кошијеве расподеле. У ту сврху аутори су развили једноставну MATLAB апликацију коју по потреби могу ставити на располагање.

Литература

Ли 2009: Li, X., Study on the Evaluation Criterions and Methods for the Supermarket Food Suppliers Based on IAHP, *Science And Technology*, 149–156.

Липоветски, Тисхлер 1999: Lipovetsky, S., Tishler, A., Interval estimation of priorities in the AHP, *European Journal Of Operational Research*, *114*.

Сати 1980: Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York.

Сати, Варгас 1987: Saaty, T. L., Vargas, L. G., Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 32, 107–117.

Сати, Варгас 1994: Saaty, T. L., Vargas, L.G., *Decision Making in Economic, Political, Social and Technological Environments with the Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, Pitsburg, PA.

Milorad K. Banjanin*
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Filozofski fakultet Pale
Katedra za matematiku i računarstvo
Originalni naučni rad

MATEMATIČKE I DIGITALNE KOMPETENCIJE ZA RAČUNARSKU VIZIJU I MULTIAGENTNU KOMUNIKACIJU

1. *Uvod u matematičke i digitalne kompetencije*

Kompetentnost je rezultanta svih vidova znanja, veština, iskustava, orijentacija, stavova i kontakata na pojedinačnom, timskom, organizacionom ili globalnom nivou posla. Ključne kompetencije neophodne za uspešno i proaktivno delovanje u društvenim tokovima, definisane kao *opšte (generičke) ili transverzalne,* odnose se na bolje upravljanje vlastitim životom i celoživotnim učenjem, razvojem resursa za život i učenje, pristupom i mogućnošću uticaja na društvene tokove, međuljudske odnose, interakcije i komunikaciju, motivaciju, situacione događaje i prostorno vremensku dinamiku u odgovarajućim kontekstima. Pored opštih u tradicionalne standardizovne dimenzije kompetentnosti spadaju*, specifične, specijalizovane, metodološke, lične i društvene* a taj skup se proširuje sa dve aktuelne dimenzije-*matematička i digitalna kompetentnost.*

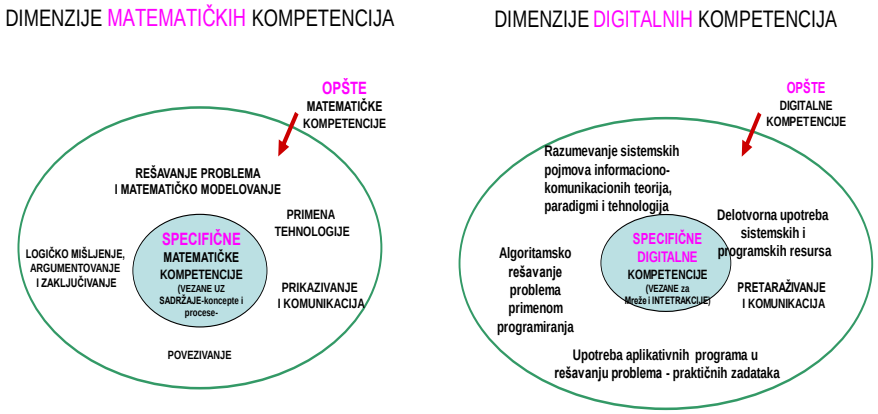
Matematička kompetentnost na pojedinačnom ili indidvidualnom nivou podrazumeva sposobnost razvoja i primene logičkog mišljenja, rezonovanja, argumentovanja i zaključivanja radi rešavanju niza problema u svakodnevnim situacijama i matematičkom modelovanju realnih problema i njihovih rešenja. Matematičke kompetencije podrazumevaju: -matematičko *znanje* opštih, specifičnih i specijalizovanih *koncepata*, (numeričkih, geometrijskih, algebarskih, analitičkih, probabilističkih, statističkih,) *osobina* (konstante, parametri, varijable,..), *tvrđenja* (aksiome, leme, teoreme, zakoni, teorije) i *metodologije* sa velikim akcionim radijusom u njegovoj efikasnoj primeni, inteligentnoj upotrebi i mudrom korišćenju; -širok opseg *veština* za matematičko modelovanje i konceptualno povezivanje, -*singularne detaljne veštine* za primenu tehnologije, prikazivanje i komunikaciju u multidisciplinarnim i multikulturalnim timovima, u realnim i virtuelnim kontekstima; -sposobnosti za sistemski pristup ili sagledavanje mogućnosti i ograničenja u krreativnom pristupu matematičkim problemima sa svih aspekata.

Digitalne kompetencije se zasnivaju na inteligentnom nivou matematičkog znanja, primenjenom nivou razumevanja sistemskih pojmova, nivou stečenog znanja informaciono-komunikacionih teorija, računarskih paradigmi i tehnologija te rešavanju problema nivoa naprednog programiranja. Uključuju i delotvornu upotrebu sistemskih i programskih resursa u rešavanju

* mkb252633@EUnet.rs

problema primenom algoritamskog programiranja i upotrebom aplikativnih programa u rešavanju praktičnih zadataka. Posebne singularne veštine se odnose na komunikacije i interaktivno mrežno pretraživanje i informaciono istraživanje, alatke za kodifikaciju znanja pomoću kojih je znanje opisano, mapirano, ugrađeno u pravila i recepte a primeri su mape znanja, tabele odlučivanja, stabla odlučivanja, frejmovi, agenti znanja, produkciona pravila..

Matematičke i digitalne kompetencije su komplementarne u kontinuumum ljudskog znanja. U ovom radu su kao posebno interesantne singularne matematičke i digitalne kompetencije vezane za polje računarske vizije i koncept Kansei informacija. Reč je o relativno novom istraživačkom polju orijentisanom na informacionu obradu i razumevanje ljudske inteligencije u obradi subjektivne informacije ili dvosmislene osećajnosti i načinima na koje se te informacije mogu procesirati od strane računara.



Slika 1. Uporedni pogled na matematičke i digitalne kompetencije

2. *Računarska vizija i kensei informacija*

Danas je računar implementiran tamo gde se do pre nekoliko decenija nije mogla ni zamisliti njegova primena. Jedan pravac razvojnih primena pripada računarskoj viziji koja ima potencijal za prenošenje mnoštva informacija iz različitih modaliteta opažanja za razvijanje perceptivnih korisničkih interfejsa. Pristup za interaktivne korisničke interfejse vođene ovom vizijom okreću se tehnologijama za praćenje pokreta glave, lica i prepoznavanje izraza lica, praćenje pokreta nosa i prepoznavanje gestova. U tu svrhu je razvijen koncept Kansei informacija koji je usko povezan sa konceptom ličnosti i osećajnosti, jer sama reč Kansei (potiče iz japanskog jezika) označava osetljivost sa instancama „osećati, prisetiti se, želeti i misliti o lepoti u stvarima“. Ta osetljivost i osećajnost lepote u stvarima, izražena uglavnom atributima za emotivnna stanja (na primer: lepo, romantično, fantastično, udobno) povezuje se sa vizuelnim informacijama čiji su atributi *boja, oblik, forma (*konceptualna, prirodna, geometrijska*), tekstura i šema.*

Boja je atribut koji se koristi za mnoge matematičke objekte (*brojevi, funkcije, oblici i prostor, merenje, podaci),* u prikazivanju (*rečima, slikama, maketama, crtežima, dijagramima, grafovima, tabelama, brojevima, simbolima)* i izgrađivanju novog matematičkog znanja modelovanjem situacija, sistema i procesa, rešavanjem problema uključujući prepoznavanje i razumevanje merljivih obeležja objekata, te upotrebu i interpretaciji mernih jedinica, mernih sistema i procesa merenja sa konzistentnim i pouzdanim korištenjem mernih uređaja, tehnika, alata i formula za opisivanje merenja. Istovremeno boja igra bitnu ulogu u načinima digitalnog prikazivanja podataka, razumevanju jednostavnih algoritama i načela programiranja, dizajniranju arhitekture i principa funkcioniranja računara, učenju interakcija sa računarom i kreiranju i implementaciji aplikativnih programa. (Interakcija je poruka koja se razmenjuje između objekata da bi se omogućilo neko ponašanje)

Oblik je koncept označen sa izgledom u dvodimenzionalnoj ravni i napravljen je linijama koje pokazuju ili „siluetu“ ili „okvir“. “. Oblik ima dimenzije dužine i širine ali ne i dimenziju dubine.

Forma je konačni, kompozitni oblik (ujedinjena celina) posmatranog objekta koji uključuje izgled i držanje, (telo i figura). Drugim rečima, forma znači oblik sa obimom trodimezionalne mase, ili okvir stvari koja se može vizuelno uhvatiti. Zato se može se reći da je forma „organizacija vizuelne informacije sa *konceptualnim* (tačke, linije, ravni, obim, veličina) *prirodnim* (nemaju definisan standard za oblik, veličinu, boju, poziciju) i *geometrijskim* (veštačka apstraktna predstava koja formu prevodi u jedostavnost) sastavnim elementima“.Prema Rudolf Arhaizmu, geometrijska forma je prirodna metafora ili prefinjena forma kreirana ideološkim mislima ljudi koja se može promeniti u krug, trougao, kvadrat itd., od kojih svaki može da se izračuna matematički i metrički sa lenjirom i kompasom. Dakle, vizuelna informacija ima tri forme-*konceptualnu, prirodnu i geometrijsku* pri čemu je *geometrijska forma* prirodna metafora ili „prefinjena forma kreirana ideološkim mislima ljudi“.

Forma je važan koncept dizajna vizuelnih i multimedijalnih informacionih struktura koji pored *konceptualnih* (tačka, linija, ravan, obim) i *vizuelnih* (oblik, veličina, boja, tekstura) elemenata sadrži *relacione* (pozicija, smer, prostorni proksimitet, gravitacija) elemente i *konstrukcione* (vertekst, ivica, lice,..) elemente**.**

Za mapiranje vizuelne informacije sa osetljivošću i osećajnošću koristi se Kansei-rečnik čiji je jedan deo za vizuelne oblike predstavljen u tabeli na slici 2.

Slika oblika	KANSEI- Rečnik
	bogat, pun, slab, perfektan, relaksirajući, siguran, zadovoljan, topao
	Neprijatan, hladan, iskrivljen, vrtoglav, iritirajući, stran, neprijatan
	nejasan, zbunjen, nervozan, stran, jedinstven, nestabilan, neodređen, zabrinut
	Obilan, balansiran, udoban, fleksibilan, slobodouman, mekan, nežan

Slika 2. *Deo Kansei – rečnika prema obliku* [6]

Takođe, razvijeni su i drugi delovi Kansei-rečnika za boje, forme, teksture i šeme. Skala Kansei-rečnika analizira odnose izmedju svih reči Kansei rečnika i odnosa između svakog oblika i njegovog odgovarajućeg Kansei rečnika.

3. Agentna komunikacija

Prema kanonskoj definiciji „*Agent je svaki entitet u svetu koji komunicira u određeno kontekstu"* i karakterišu ga sledeći koncepti**:** akcija, okruženje, percepcija, senzori i efektori. Dve osnovne klase agenata čine ljudski i softverski.

Osnovne osobine softverskih agenata su:

1. *Proaktivnost* - pored reagovanja na promene u okruženju, oni nastavljaju sa individualnim procesima i preduzimaju inicijativu u predočenim aktivnostima koje nisu direktno izazvane promenama u okruženju

2. *Reaktivnost* - na promene u njihovom okruženju, npr. on reaguje na informacije primljene od korisnika ili fizičkih senzora u određenom vremenu

3. *Društvena sposobnost* - sposobnost komunikacije sa drugim agentima (ili ljudima) je fundamentalna u softverskom agentu

4. *Autonomnost* - u sprovođenju akcija iz njihovog unutrašnjeg stanja i funkcionisanje bez intervencija ljudi i uz kontrolu nad sopstvenim ancijama

U zavisnosti od vrste zadatka ili uloge koju izvršava u MAS postoji više tipova softverskih agenata:

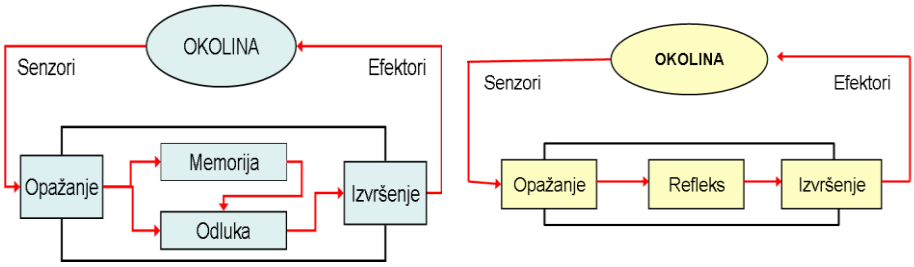
- *Konverzacijski softverski agent* je interaktivni program koji putem veoma pristupačnog interfejsa izvodi specifične zadatke pod vođstvom korisnika.
- *Inteligentni softverski agent* je program koji stremi ciljevima pri tome koristeći inteligenciju ili heurističku tehniku.
- *Mobilni softverski agent* je autonoman program koji se kreće između host računara u toku postizanja cilja.

- *Robot je inteligentni i fleksibilan program* koji ima sposobnost dinamičke podele samoga sebe gde pod-agenti izvršavaju pod-zadatke.
- *Hibridni robot-agent* je robot koji može da komunicira sa jednim ili više softverskih agenta ili softverski agent koji može da komunicira sa jednim ili više robota.

Agentu su neophodne i informacije i sadržaj poruke kako bi korektno pristupio poruci, ri čemu može da deluje kao:

- *singl-agent* (Jedan agent izvršava sve zadatke na putu do cilja)
- *deo armade* (Veliki broj agenata koji zajednički rešavaju zadatke)
- *deo ansambla* (Relativno mali tim agenata gde je svaki agent specijalizovan za tačno određeni zadatak)

Multiagentna komunikacija je *direktna* i *posredna* u zavisnosti od tipa arhitekture koja može biti *dogovorna* i *reaktivna*.



A) Dogovorna arhitektura agenata B) Reaktivna arhitektura agenata

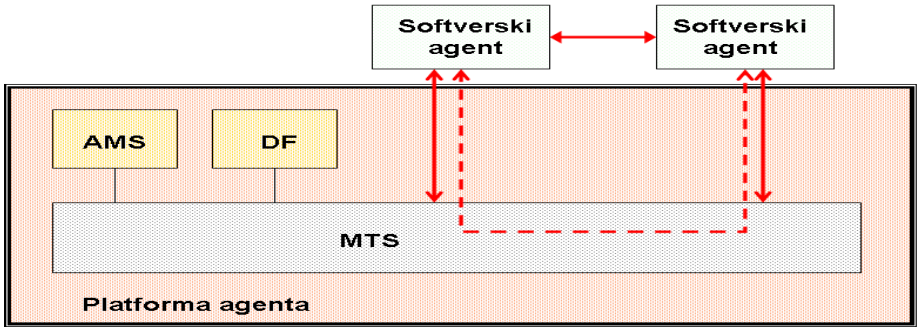
Slika 3. Uporedni pregled dogovorne i reaktivne arhitekture agenata

Dogovorni agenti primenjuju mehanizme logičkog rasuđivanja zasnovane na manipulaciji simbolima i mehanizmima zaključivanja da bi se donele eksplicitne odluke o neophodnim akcijama za postizanje željenih ciljeva. Upotreba ovog modela za opisivanje dogovornih agenata i načina na koji oni planiraju svoje akcije je dosta rasprostranjena.

Reaktivni agent implementira prosta refleksna pravila koja deluju na osnovu podataka koje prima agent na senzorima. On nema memoriju zasnovanu na prošlim iskustvima ili situacijama i izvršenje akcija je isključivo zasnovano na tekućoj situaciji okruženja agenta. Iako sam agent ima samo ograničen skup pravila koja upravljaju njegovim ponašanjem, on može komunicirati u različitim situacionim kontekstima.

U primeni tehnologije agenata za probleme iz domena stvarnog sveta često se koriste rešenja obe arhitekture što se postiže slojevitom *hibridnom arhitekturom* u kojoj

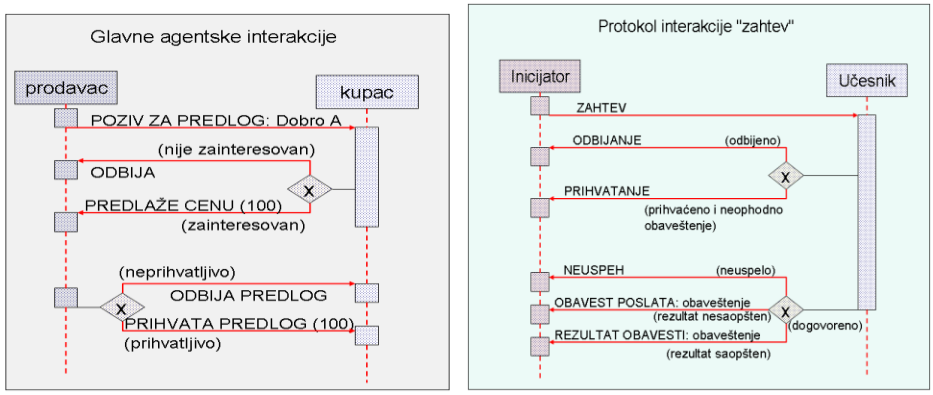
- odluke zasnovane na trajnim strategijama donosi dogovorna struktura a
- reakcije na poruke izvodi reaktivna arhitektura



Interakcija sa platformom agenta; Logička komunikacija SA; Fizički protok poruka; AMS - *(Agent Management Service)* Menadžment servisa agenta; DF - *(Directory Facilitator)* Upravljačka podrška; MTS-*(Message Transport Service)* Servis prenosa poruka

Slika 4. Hibridna arhitektura softverskih agenata

Tehnologija agenata ima svoje korene u studiji o distribuiranoj veštačkoj inteligenciji, a njena prava aplikacija je u *mobilnim kompjuterima, elektronskoj pošti i mrežnom pretraživanju podataka*.



a) b)

Slika 5. a) Primer glavne interakcije agenata b) Primer protokola za interakciju "zahtev"

4. MAS-multiagentni sistem

Grupa agenata koji međusobno interaguju razmenjujući poruke koje su definisane u specifičnom Jeziku Agentne Komunikacije (ACL) čine Multi-Agentni Sistemi (MAS)

Koncept MAS je zasnovan na:

- Rešavanju problema koje agenti izvode zajednički;
- Primeni znanja za donošenje odluka koje je distribuirano kroz tim agenata;
- Upravljaju operacijama sistema gde korisnici komuniciraju govorom (prirodnim jezikom) i kinesteitičkim kodovima (gestikulacijama rukama);
- Izražavanju korisničkih informacionih zahteva sa vokabularom iz domenu zadatka; pri čemu informacioni dijalozi nisu vođeni ni od strane sistema, ni od strane korisnika, a korisnički informacioni zahtevi mogu biti ili eksplicitni ili implicitni.

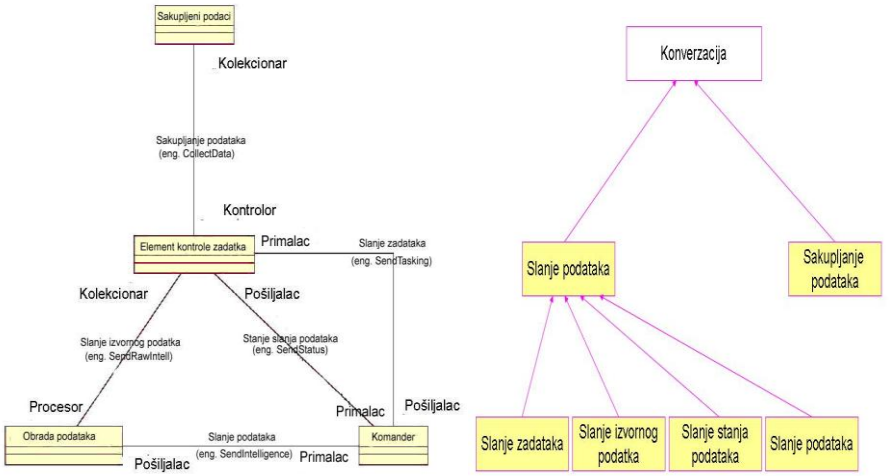
Dva osnovna komunikaciona koncepta MAS su: *zatvoreni MAS* (gusto integrisano aplikacijsko okruženje kod kojeg je deo aplikacije paralelan sa mini-programima koji teže pod-ciljevima) i *otvoreni MAS* (neodređeno, integrisano aplikacijsko okruženje gde nezavisno izrađeni programi mogu sudelovati u interakcijama).

U dizajniranju MAS metodologija može biti određena kao analiza principa, metoda, načela i postulata upotrebljenih u domenu neke discipline koja ima dve bitne karakterisike: opisuje promenu stanja elemenata izabranog pristupa i fokusira se na funkciju proizvoda i njihovu dokumentaciju. Radi toga metodologija dizajniranja MAS može biti *objektno-orijentisana* ili *agentno-orijentisana* sa osnovnim metodološkim komponentama i njihovim sadržajima datim u tabeli na slici 6.

	KOMPONENTA METODOLOGIJE	SADRŽAJ
1	Dizajn nivoa domena	− identifikacija tipa agenta − identifikacija moguće interakcije − definisanje protokola koordinacije
2	Dizajn nivoa agenata	− mapiranje akcija identifikovanih pri agentnoj komunikaciji − definisanje strukture podataka pri konverzaciji − definisanje dodatnih struktura podataka
3	Dizajn komponenti	− definisanje specifičnih komponenti
4	Dizajn sistema	− selekcija tipova agenata koji su potrebni − determinisanje broja zahteva

Slika 6. Komponente metododlogije dizajniranja MAS

Jezik za modeliranje agenata – AgML sadrži: *dijagram interakcije agenata*; *dijagram hijerarhije komunikacije*; *dijagram klase komunikacije* i *layout dijagram (razmeštaja) agenata.*



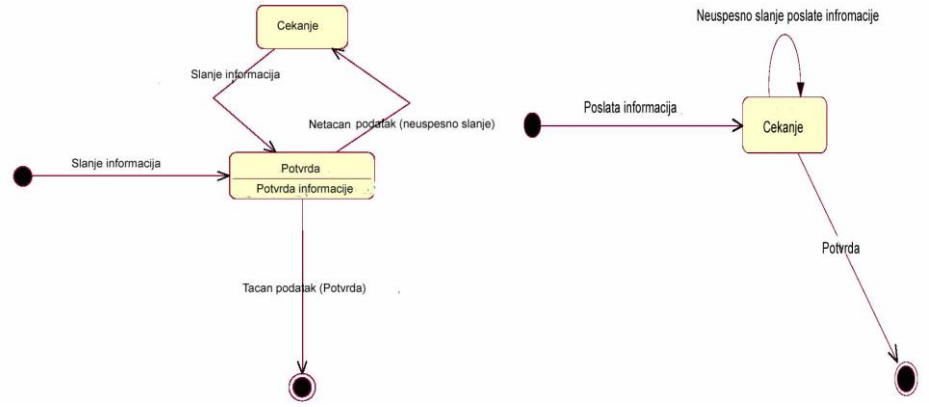
A)Primer dijagrama interakcije agenta B) Dijagram hijerarhije agenata

Slika 7. Dijagram interakcije agenata (A) i dijagram hijerarhije agenata(B)

Dijagram interakcije agenta se koristi za opisivanje kategorije agenata u posebnim domenima. Dosta su slični i koriste se na sličan način kao i mnogi dijagrami objekata. Definiše postojanje kategorije agenata i njihov odnos u logičkom viđenju sistema.

Dijagram hijerarhije agenata definiše odnose između različitih konverzacija unutar sistema i prikazuje odnose između komunikatora.

Dijagram klase komunikacije predstavlja stanje uređaja pri konverzaciji dva ili više agenata u sistemu.

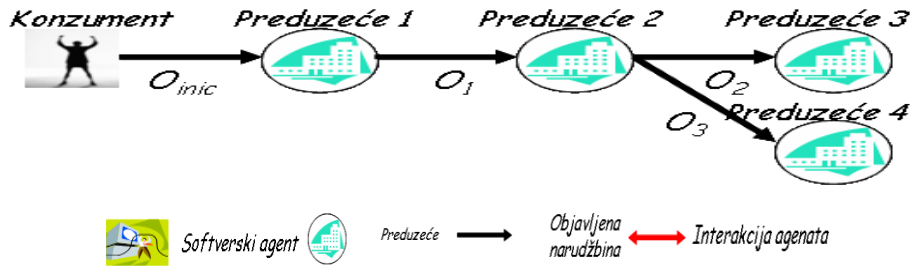


Konverzacija Slanja podataka - Uloga primaoca i Uloga pošiljaoca

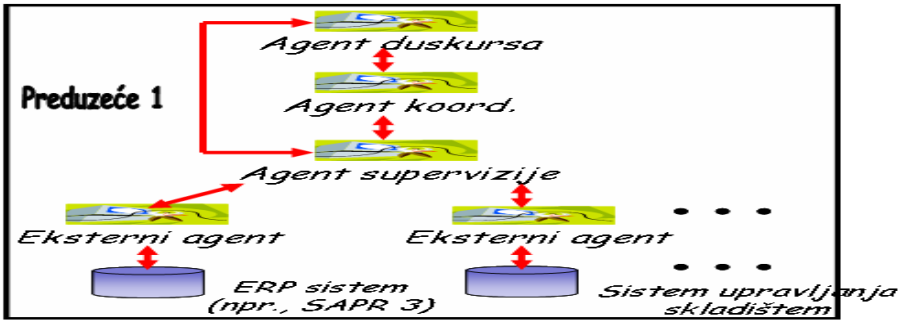
Slika 8. Dijagram klase komunikacije primaoca i pošiljaoca

Dijagram razmeštaja (layout)-agenata u MAS se koristi za definisanje tačnog broja, lokacija i tipa agenata u sistemu. Definiše tačan broj, lokacije i tip agenta u realnom sistemu. U njegovoj strukturi kao efektivno projektovanoj razlikujemo sledeće tipove: Agente sakupljanja podataka; Agente kontrole podataka: Agente kontrolore i Agente procesiranja podataka. Pored toga mogu postojati Agent diskursa, Agent koordinacije, Agent supervizije, Eksterni agent za realni system.

Na slici 10. dat je *objektni model realnog sistema* koji se zove lanac mreže snabdevanja čiju strukturu čine Konzument, kao inicijalni objekat i četiri mrežna objekta (preduzeće1, 2, 3, i 4) koji komuniciraju preko MAS



Slika 9. Model realnog sistema za interorganizacionu komunikacija agenata



Slika 10. Model MAS za intraorganizacionu agentnu komunikaciju u realnom sistemu

Na slici 10. predstavljen je model MAS za prethodno opisani realni sistem u kome su karakteristični tipovi agenata: *Agent diskursa koji* obezbeđuje interfejs ka eksternim partnerima u mreži snabdevanja, sa funkcijama *upravljanja komunikacijom* i *sigurnošću; Agent koordinacije***.** koji ostvaruje saradnju dva sistema koordinacijom inicijalizacije i monitoringa procesa sa distribuiranjem njihovih rezultata, a njegove funkcije su *upravljanje pouzdanošću, upozorenjima* i *profilima; Agent supervizije je* odgovoran za kreiranje proizvodnje informacija iz sakupljanjenih i prezentovanih podataka, tj.

njegove funkcije su *sakupljanje informacija* i *analiza podataka; Eksterni agent* - pokriva heterogene izvore podataka iz realnog sistema i dozvoljava standardni pristup ovim izvorima pomoću funkcija *regeneracije podataka* i *transformacije podataka.*

5. Multimodalni interfejsi u multiagentnoj komunikaciji

U svom osnovnom značenju interfejs predstavlja vezu između sistema koji komuniciraju. Prema softverskoj terminologiji interfejs se može definisati na razne načine. Napr.:*Interfejs* je kolekcija operacija koje opisuju "servis" koje pruža klasa ili komponenta nekog sistema. *Interfejs* predstavlja liniju razgraničenja između specifikacije i implementacije neke apstrakcije.*Interfejs* se koristi da prikaže i dokumentuje granice između podsistema nekog sistema

Deklarisanjem *interfejsa* definiše se željeno ponašanje neke apstrakcije, nezavisno od načina njene implementacije. U interakciji čovek-računar koriste se različite vrste interfejsa koji korisniku omogućavaju različite vrste interakcija sa objektima iz realnog i virtuelnog sveta:

- *2D sinoptički interfejsi* - korisnik može da aktivira udaljene uredjaje birajući odredjenu ikonu
- *3D virtuelni svetski sistemi* - simuliraju navigaciju i interakciju sa stvarnim svetom.
- *GUI klasični grafički interfejs* - zasnovan na prozorima

U užem smislu, čovek-kompjuter interfejs se odnosi na grafičku, tekstualnu ili audio komunikaciju čovek- kompjuter koji su primeri klasičnih interfejsa. Međutim postoji i niz specijalnih interfejsa koji omogućavaju i druge oblike komunikacije čovek računar (taktilni interfejsi, audio interfejsi, Touch Screen Interfejsi, Haptički interfejsi).

Prepoznavanje radnje koju obavlja ljudska figura u jednom frejmu predstavlja problem u emitovanju video snimka, zbog niske rezolucije figure u frejmovima. Za predstavljanje pokreta koristi se grupa histograma koja je zasnovana na optičkom protoku. Dok se za prepoznavanje akcije (radnje) koristi mašina podrške vektora. Eksperimentalni rezultati su pokazali da ova metoda obećava jer integriše okvir multi-modalne analize u video snimke sporta (u našem slučaju tenisa).

Izraz lica je jedno od najmoćnijih, prirodnih i trenutnih sredstava kojima ljudska bića izražavaju svoje emocije i namere. Tehnologija prepoznavanja lica može se koristiti u mnogo aplikacija kao što su autentifikacija identiteta, kontrola pristupa i sistemi nadzora. Sistem prepoznavanja lica treba da bude u mogućnosti da rešava različite promene slika lica. Poslednjih godina, trud istraživača koji tragaju da obezbede prirodnija sredstva okrenuta čoveku za interakciju sa kompjuterima dobijaju sve veće interesovanje. Naročito važan smer je ka perceptivnim korisničkim interfejsima, gde kompjuter dobija perceptivne sposobnosti koji dozvoljavaju prikupljanje implicitnih i eksplicitnih informacija o korisniku i okruženju. Interfejs zasnovan na kontrolisanju

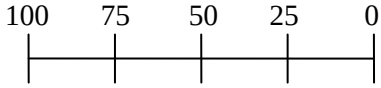
kompjuterskog miša putem 2D i 3D gestova lica od velike je pomoći ljudima sa invaliditetom (naročito za tetraplegičare). Tako sistem nazvan LiceMiš koji koristi „derivativnu paradigmu“, omogućava da uzajamno sa kompjuterom deluju radi svog svakodnevnog života putem pokazivača miša.

U dostignućima i implematacijama savremenog razvoju računarstva, povećava se potreba za alatima „informacionog povraćaja“ ljudskih osećaja i ukusa. Kao što je rečeno, Kansei informacija predstavlja polje koje cilja na obradu i razumevanje kako ljudska inteligencija obrađuje subjektivne informacije ili dvosmislenu osećajnost i kako te informacije mogu da se izvrše računari.

Model za prepoznavanje radnje u emitovanju video snimka tenisa korišćenjem optičkog protoka i SVM

Kao tehniku povraćaja koristi se gradijentni vektor toka GVF (Gradient Vector machine) -zmiju za detekciju objekata. Ova metoda počinje kalkulacijom polja sila, nazvanom GVF sile, nad domenom slika. GVF sile koriste se za vodjenje zmije, modelvane kao fizički objekat koji ima otpor na razvlačenje i savijanje, prema granicama objekta. GVF sile se izračunavaju primenom opšte difuzijske jednačine na obe komponente gradacije mape ivica slike. Poligonalna prezentacija nije pogodna forma za izračunavanje sličnosti izmedju dva oblika, potrebna je alternativna prezentacija kao što je TSR- tangentna preznetacija prostora**.** Sličnost izmedju oblika meri se korišćenjem indeksiranih vrednosti.

Stvaranje KANSEI- rečnika skale prema obliku



Slika 11. Primer Kansei-rečnika skale [6]

Kansei rečnik skale prema obliku napravljen je sa Kansei skalom podataka izmerenom na 250 subjekata putem analize faktora. Svrha analize faktora je uračunati promenljive sa uobičajenim osnovnim dimenzijama koje se sastoje od elemenata promenljivih analizirajući korelacije višestrukih promenljivih. U ovom istraživanju, metoda je korišćena jer minimizira gubitak informacija mnogo reči, ograničava se na minorne faktore, i daje rezultat u osnovnim faktorima Kansei rečnika analizirajući odnose između svih reči Kansei rečnika i odnosa između svakog oblika i njegovog odgovarajućeg Kansei rečnika. Rezultati istraživanja su pokazali da su osobine svakog oblika usko povezane sa osećajnošću ljudi.

Pokreti i radnje koje igrači izvode u teniskom meču može da otkrije proces igre i taktiku igrača, što je od značaja za sportske profesionalce i analizu igre. Prema stopi pojavljivanja terena u jednom frejmu, video snimak se može podeliti na pogled iz bliza i pogled iz daljine. Kod pogleda iz daljine veoma je teško odrediti odvojene pokrete različitih delova tela.

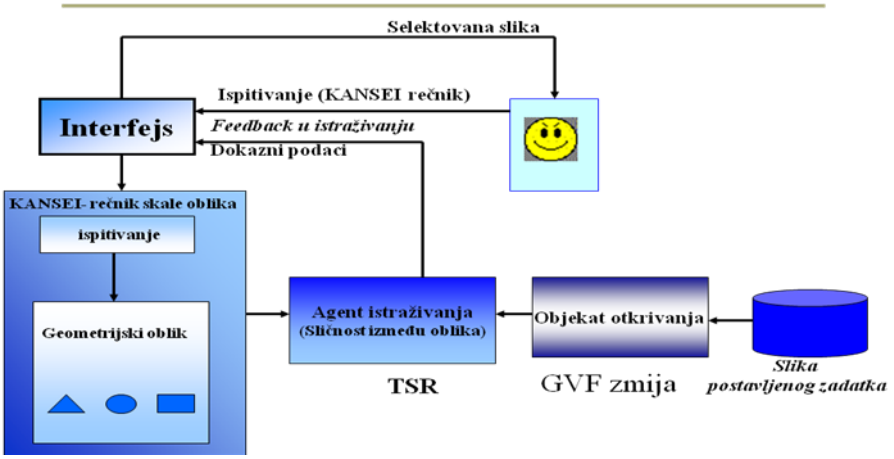
U *eksperimentu* se *i*spitivao *pojam* udoban u Kansei rečniku za *zadatak* povraćaja objekta

Povraćaj objekta koji je „Udoban“, vrši se po formuli [8] :

$$Min\left[a \times S_{TSR}(F,I)\right] = Min\left[D_{|F-V|} \times S_{TSR}(F,I)\right]$$

gde je

- S_{TSR} – sličnost koja koristi TSR između F i I
- $D_{(F,V)}$ – razdaljina između F i V
- F – slika geometrijskog oblika
- V – slika objekta
- TSR (*Tangent Space Representation*)-Tangentna prezentacija prostora za mjeru sličnosti oblika: Alternativna prezentacija, Digitalna kriva linija C je predstavljena u tangentnom prostoru grafikom funkcije koraka
- GVF (*Gradient Vector Flow*) – Gradijent vektora protoka

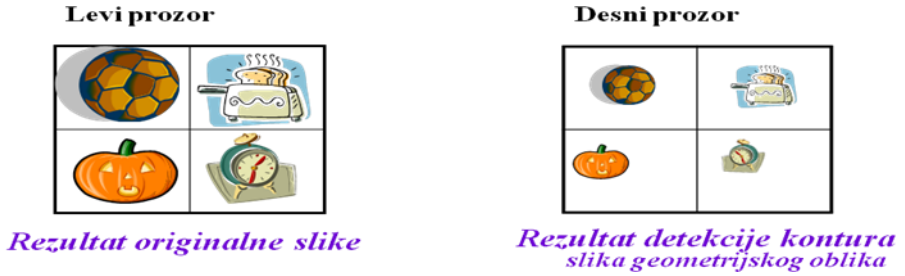


Slika 12. Arhitektura eksperimenta sistema povraćaja objekata [8]

U analizi pokreta igrača iz daleka koristi se metoda koja započinje praćenjem i stabilizovanjem figure igrača u svakom frejmu. Ona koristi sofisticiranu strategiju praćenja SVR filter čestica, što predstavlja poboljšani filter čestica. „Gaussian“ metoda se koristi za ispravljanje polu-talasa, pa se zatim polje optičkog toka deli na komade na osnovu odnosa pokretačkih delova tela i oblasti figure. S-OFH ili novi opisivači pokreta, predloženi su za kompaktno predstavljanje prostorne šeme bučnog optičkog protoka.

Tok pristupa prepoznavanja obuhvata: praćenje igrača i stabilizacija figure; izračunavanje optičkog protoka, ispravljanje, izglađivanje i predstavljanje pokreta.

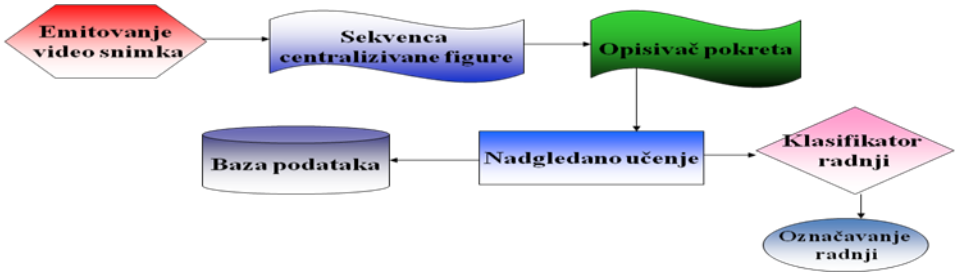
Zmija za detekciju kontura oblika počinje kalkulacijom polja sila, GVF sile, nad domenom slika. Izračunavaju se primenom opšte jednačine za difuziju na obe komponente gradacije mape ivica slike, a u produženom „obimu snimanja“ može da nađe objekte koji su dosta daleko od prvobitne pozicije zmije



Slika 13. je formirana kao vizuelna informacija po boji, obliku, teksturi i šemi. Stopa zadovoljstva korisnika zavisi od drugih faktora. [2]

Dijagram protoka

Za analizu pokreta i prepoznavanje pokreta igrača izdaleka u emitovanim video snimcima koristi se metoda izračunavanja koordinata centroida oblasti figure čiji je dijagram protoka dat na slici 14. i sastoji se iz algoritma -praćenja pokreta igrača i stabilizacije figure i metode izračunavanja optičkog protoka, ispravljanja, izglađivanja i predstavljanja pokreta.



Slika 14. Algoritam praćenja pokreta i stabilizacije figure u dijagramu optičkog protoka [4]

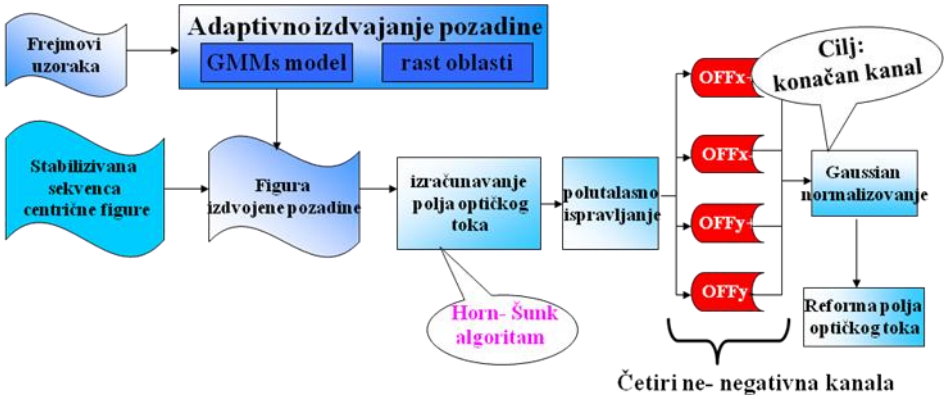
Algoritam stabilizacije započinje stabilizacijom igrača i izračunavanjem centralizovane ljudske figure, što se postiže praćenjem oblasti igrača koji se analizira i konstruisanjem prozora u svakom frejmu centriranom na oblast igrača. SVR (Sophisticated Tracking Strategy), sofisticirana strategija praćenja čestica, poboljšava učinak klasičnog filtera čestica sa malim skupom uzoraka i dovoljno je pouzdan za ometanje u emitovanom snimku. Prozor za praćenje oko oblasti igrača se uvećava do određene skale u jedinici piksela kako bi se izračunale koordinate centroida oblasti igrača, a one se izračunavaju prema formulama :

$$m_x = \frac{\sum x \in R \sum y \in R^{xf(x,y)}}{\sum x \in R \sum y \in R^{f(x,y)}} \qquad m_y = \frac{\sum x \in R \sum y \in R^{yf(x,y)}}{\sum x \in R \sum y \in R^{f(x,y)}}$$

R je oblast zauzeta objektom u ravni slike, *f(x, y)* je sivi nivo na lokaciji.

Kada se video sekvenca jednom stabilizuje, pokret u video emitovanju izazvan ponašanjem kamere može se smatrati otklonjenim.

Izračunavanje opisivača pokreta je izazov, naročito kada se radi o grubim i ometanim podacima kao što su emitovani video snimci. Tako se polja *optičkog toka* tretiraju kao *prostorna šema mera sa šumom*, koja se prikupljaju korišćenjem opisivača pokreta. Jednostavno sredstvo lokalizacije pokreta za prepoznavanje je da se odvojeno fokusira pažnja na različite oblasti oko ljudskog torzoa. Jedan od načina da se ovo uradi je da se polje optičkog toka podeli na različite pod-oblasti, koje nazivamo *komadi*. Ometanje u pozadini ljudske centrične figure vrši značajan uticaj na izračunavanje optičkog protoka unutar ljudske oblasti.



Slika 15. Model odvojenog fokusiranja komada sa adaptivnim izdvajanjem pozadine [11]

Nakon detekcije piksela pozadine, rasterska tehnika oblasti se obavlja kao post-obrada da poveže pozadinske piksele u oblasti, eliminiše šum i ispravi granice[8]. Da bi se eliminisalo ometanje u polju optičkog toka vrši se polutalasno normalizovanje i „Gaussian“ normalizovanje za dobijanje konačnog kanala. Pokret ljudsko-centrične figure nastaje zbog relativnog pokretanja različitih delova tela koji se vide u različitim oblastima figure. Celo polje optičkog toka se deli u tri komada. Visina komada jednaka je visini figure, a širina se može podesiti prema prostornoj strukturi objekta. Metode zasnovane na histogramu se puno koriste za prostorno prepoznavanje. Motivisana centralnom procenom gustine za distribuciju boje, izvodi se grupa histograma optičkog toka zasnovanih na komadu (S-OFH, [8]) .

Za svaku poziciju q unutar polja optičkog toka OFF, uzevši u obzir oblast mreže *R(q)* centriranu u q, verovatnoća skupa *u=1,...,m* u histogramu OFF se tada izračunava kao [11]:

$$h_u = C \sum_{q \in OFF} \sum_{p \in R(q)} k\left(\|p-q\|\right) \delta\left[b(p)-u\right]$$

Gde je

δ -Kronekerova delta funkcija,

C - konstanta normalizacije koja osigurava $\sum_{u=1}^{m} h_u = 1$,

k - konveksni i monotoni opadajući centralni profil koji pripisuje manju težinu lokacijama koje su dalje od centra *q*.

Prema [9] SVM (Support Vector Machine) uspešno se primenjuje na širok opseg prepoznavanja šema i probleme klasifikacije. U poređenju sa veštačkim nervnim mrežama SVM je brži, bolji za interpretaciju i odredjivanje, stiče popularnost zbog svoje sposobnosti da tačno klasifikuje neviđene podatke za razliku od metode najbližih susednih klasifikatora [8].

Umesto zaključka

Praktično primenjeni koncept kensei informacija doprineo je i razvoju *multimodalnih interfejsa* u interakciji ljudskog i računarskih koji:

- omogućavaju korisnicima da sarađuju preko kombinacije modaliteta, na primer, *govor, gestovi, pisanje, ekrani osetljivi na dodir, ekrani-tastature, pokazivači i senzori koji reaguju na dodir*;
- nude bolji potencijal za značajnu *fleksibilnost, u korišćenju od strane mnogo veće i različitije populacije* nego ikada ranije;
- obezbeđuju podršku za superiornije ispravljanje greške, u poređenju sa unimodalnim interfejsima na bazi prepoznavanja, pod uslovima izbegavanja greške i oporavka od greške, ali tradicionalni čovek-kompjuter interfejs ne podržava zajedničko donošenje odluka.

Posebne mogućnosti interfejsa su u interaktivnom praćenju pojedih živih objekata uključujući i određene delove njihovog tela kao što je *praćenje pokreta oka, praćenje pokreta glave, kontrola smera i ugla gledanja (piljenja), ..* Za ova praćenja koristi se *paradigmu pokazivača* („ono što pogledam to želim“) za razliku od *derivativne paradigme* („tamo gde pogledam, tamo želim da idem“).

U radu je reinterpretiran eksperimentalni pristup prepoznavnja pojedinih radnji za analizu pokreta teniskih igrača u emitovanom video snimku realnog teniskog meča ili događaja. Kansei rečnik je osnova za „povraćaj slika prema nameri korisnika“ i koristi se za ocenjivanje zadovoljstva korisnika prema obliku i formi figure. Ovaj princip omogućava dalji razvoj inteligentniog povraćaja digitalnih slika, znanja i informacija i osnovu za dizajniranje ontologije osećajnosti.

Literatura

Hideki Yamazaki, Kunio Kondo 1999: "A Method of Changing a Color Sceme with KANSEI Scales, "Journal for Geometri and Graphics, vol. 3, no. 1, pp. 77-84

Shnji Murai, Kunihiko Ono and Naoyuki Tanaka 2001: "KANSEI- BASED Color Design for CityMap, "ARSPIN 2001, VOL. 1, NO. 3,

Sunkyoung Back, Miyoung Cho, Pankoo Kim 2005: "Matching Colors with KANSEI Vokabulary Using Similarity Measure Based on WordNet, "ICCSA 2005, LNCS 3480, PP. 37-45

Mitsuteru KOKUBUN 2000: "Sistem for Visualizing Individual Kansei Information," Industrial Elektronicks Society, IECON 2000, 1592-1597 vol. 3

Hyunjang Kong, Wonpil Kim, Kunseok Oh, Pankoo Kim 2002: "Building the Domain Ontology for Content Based Image Retrival System, " Korea information processing Society, The proceeding of fall conference, vo. 9, no. 2

Rudolf archaism 1995: "Art and visual perception," Van Nostrand Reinhold, pp.5-8,

Wucius Wong 1972: "Principles of Two- Dimentional Design, "Van Nostrand Reinhold, pp.5-8

C. Xu and J.L. Prince 1997: " Gradient Vector Flow: A new External Force for Snakes, "In CVPR, pp.66-71, Puerto Rico, USA

C. Xu and J.L. Prince 1998: "Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow,"IEEE Transactions o image Processing, 7(3), pp.359-369

http:/ www.math.unihamburg.de/projekte/shape

Longin jan Latecki and Rolf lakaEmper 2000: "Shape Similarity Measure Based on Correspodence of Visual Parts, "IEEE Transactions on Pattern Analysis and machine Intelligence, vol. 22, no. 10

Alberto chavez-Aragon, Oleg Starostenko 2004: "Image Retrieval by Ontological Description of Shapes (IRONS), Early Results, " Proceedings of the First Canadian Cinference on Computer and Robot Vision, pp.341-346

C.E. Osgood, G. J. Suci and P.H. Tannenbaurn 1957: "The Measurement of Meaning, " Univ of Jllinois Press

Hutchinson. T:E White, K.P. Martin 1989: " W.N , Reichert, K.C. Frey. „Human computer interaction using eye-gaze input". IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, 19 1527-1534

Gorodnichy, D 2002: „On importance of nose for face tracking". In: Proceedins of Intl Conf on automatic Face and Gesture Recognition

Зорица Станимировић[*]
Мирослав Марић
Универзитет у Београду
Математички факултет

Оригинални научни рад

ХИБРИДНИ ГЕНЕТСКИ АЛГОРИТАМ ЗА РЕШАВАЊЕ ХАБ ЛОКАЦИЈСКОГ ПРОБЛЕМА НЕОГРАНИЧЕНИХ КАПАЦИТЕТА СА ЈЕДНОСТРУКИМ АЛОКАЦИЈАМА

1. *Увод*

Хаб локацијски проблеми су у последње две деценије доживели праву експанзију, највише захваљујући својој широкој примени у пракси. Мреже хабова (енг. hub networks) су заступљене у модерним транспортним и телекомуникацијским системима, рачунарским и интернет мрежама. Хабови (енг. hubs) представљају центре консолидације и колекције протока у мрежи између две локације. Сваки чвор је придружен једном или већем броју хабова, тако да се проток од једног до другог чвора реализује (али не увек обавезно) преко скупа одговарајућих хабова, који може бити и једночлан.

Уместо директног снабдевања сваког корисника од њему придруженог снабдевача, у хаб мрежама је дозвољен транспорт снабдевач – корисник преко изабраног скупа хабова. Коришћењем хабова као тачака преусмеравања протока и повећавањем транспорта између хабова, капацитет мреже се може искористити доста ефикасније. С обзиром да је цена транспорта између хабова по јединици количине нижа, укупни трошкови транспорта у мрежи се на овај начин смањују.

Хаб локацијски проблеми се интензивно користе за дизајнирање транспортних мрежа: железничких и друмских система, поштанских мрежа, система брзе испоруке, превожења путника и робе у авио-саобраћају, али и у будућем васионском саобраћају. Проток између чворова у мрежи се обично дефинише као број путника или количина робе коју треба транспортовати од снабдевача (почетни чвор) до корисника (крајњи чвор). Хабови у овим системима су, на пример, транспортни терминали, центри селекције, сакупљања или преусмеравања робе и путника и сл.

Телекомуникацијски системи се такође могу конфигурисати као мреже хабова. Информације у рачунарским, телефонским, сателитским и другим комуникацијским системима (као што је интернет, на пример) преносе се преко одговарајућих линкова (телефонским или оптичким кабловима, сателитским каналима), што је често врло скупо. У циљу смањивања цене протока података у овим мрежама, такође се користе хаб

[*] zoricast@matf.bg.ac.rs

чворови (прекидачи, концентратори, портови). Преглед хаб локацијских проблема и метода за њихово решавање може се наћи у радовима: Кембел 2002: 373–407 и Алумур 2008: 1–21).

Предмет истраживања приказаног у овом раду је хаб локацијски проблем неограничених капацитета са једноструким алокацијама позиције хабова (Uncapacitated Single Allocation Hub Location Problem – USAHLP). Циљ овог НП-тешког проблема комбинаторне оптимизације је следећи: успоставити скуп хабова и алоцирати кориснике и снабдеваче елементима скупа успостављених хабова, тако да сума транспортних трошкова у мрежи и фиксних трошкова лоцирања хабова буде минимална.

2. *Математичка формулација*

Нека је $I=\{1,...,n\}$ скуп који садржи n различитих чворова мреже, где сваки чвор представља корисника, снабдевача или потенцијалну локацију хаба. Транспортни трошкови (по јединици количине робе) од снабдевача i до корисника j је C_{ij}. Количина робе коју треба транспортовати од чвора – снабдевача i до чвора – корисника j означена је са W_{ij}. У општем случају, $W_{ij} \neq W_{jj}$ и $W_{ii} \neq 0$.

Променљива одлуке Z_{ik} је дефинисана на следећи начин:

$Z_{ik} = 1$, ако је корисник/снабдевач i придружен успостављеном хабу k,

$Z_{ik}=0$, иначе.

При томе је $Z_{kk} = 1$ ако је хаб лоциран у чвору k, иначе је $Z_{kk} = 0$.

Ненегативне променљиве Y_{kl}^{i} означавају количину робе која полази из чвора снабдевача i и дистрибуира се преко хабова k и l.

Транспорт од чвора – снабдевача до чвора-корисника састоји се од три дела: прикупљање од чвора – снабдевача до првог хаба, пренос између хабова и на крају, расподела (или дистрибуција) од последњег хаба до чвора – корисника. Параметри χ и δ представљају јединичне трошкове прикупљања и расподеле, док $1-\alpha$ представља попуст у цени за транспорт између хабова. Фиксна цена успостављања хаба k (тј. постављања $Z_{kk}=1$) се означава са f_k.

Ради лакшег записа проблема, уводе се следеће ознаке:

$O_i = \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$ је укупна количина робе која полази из чвора i, и

$D_j = \sum_{i=1}^{n} W_{ij}$ је укупна количина робе која долази из чвора j.

Проблем се сада може формулисати на следећи начин:

$$min\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{ik}Z_{ik}(\chi O_i+\delta D_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha C_{kl}Y_{kl}^{i}+\sum_{k=1}^{n}f_kZ_{kk} \qquad (1)$$

при условима:

$$\sum_{k=1}^{n}Z_{ik}=1 \quad \text{за свако } i=1,\ldots,n \qquad (2)$$

$$Z_{ik}\leq Z_{kk} \quad \text{за свако } i,k=1,\ldots,n \qquad (3)$$

$$\sum_{l=1}^{n}Y_{kl}^{i}-\sum_{l=1}^{n}Y_{lk}^{i}=O_iZ_{ik}-\sum_{j=1}^{n}W_{ij}Z_{jk} \quad \text{за свако } i,k=1,\ldots,n \qquad (4)$$

$$Y_{kl}^{i}\geq 0 \quad \text{за свако } i,k,l=1,\ldots,n \qquad (5)$$

$$Z_{ik}\in\{0,1\} \quad \text{за свако } i,k=1,\ldots,n \qquad (6)$$

Циљ USAHLP је минимизација укупних трошкова транспорта у мрежи и фиксних трошкова успостављања хабова (1). Шема једноструке алокације је представљена условом (2), тј. сваки корисник/снабдевач је придружен тачно једном хабу. Ограничење (3) обезбеђује да се транспорт одвија само преко успостављених хабова. Једначина конзервације протока у мрежи представњена је условом (4). Ненегативност променљивих задата је са (5). Бинарна природа променљивих X_{ik} представљена је условом (6).

3. *Претходне методе за решавање USAHLP*

Проблем је први формулисао О'Кели у раду (О'Кели 1992: 293–306), као проблем квадратног програмирања целобројног програмирања. О'Кели је доказао да је проблем НП-тежак и предложио две енумеративне хеуристичке методе за његово решавање. Неколико хеуристика за решавање USAHLP предложено је у литератури: хеуристика кластеровања и замене (Клинцевич 1991: 25–37), похлепна хеуристика (енг .greedy heuristic) и табу претраживање (Клинцевич 1992: 283–302), модификовано табу претраживање (Скорин-Капов 1994: 502–509).

Абдинур-Хелм и Ватаркеман су у раду (Абдинур-Хелм 1998б: 31–50) дали нову квадратну целобројну формулацију USAHLP и предложили егзактну методу гранања и ограничавања (енг. Branch and Bound – BnB). Како метода захтева доста времена за добијање оптималног решења, аутори су имплементирали генетски алгоритам који ефикасно долази до решења.

У раду аутора Абдинур-Хелм (1998а: 489–499) се за решавање USAHLP предлаже хибрид генетског алгоритма и табу претраге и

анализирају добијени резултати када је неколико варијанти овог хибрида коришћено при решавању CAB инстанци проблема. Аутор у раду није дао податке о резултатима примене хибридног алгоритма при решавању AP инстанци проблема.

Топцуоглу и сарадници (2005: 967–984) предлажу примену генетског алгоритма за решавање USAHLP на напреднији начин – користи се ефикасније кодирање јединки, боље иницијално постављање броја хабова у јединки – решењу, напредан оператор укрштања, који је прилагођен домену проблема итд. Међутим, и надаље се, као и код Абдинур-Хелм (1998a: 489–499), користи пропорционална, тј. рулет селекција. Аутори у овом раду дају резултате добијене при решавању инстанци CAB и AP хаб проблема.

У свом раду Чен (2007: 211–220), развија хеуристику SATUHLP за решавање USAHLP. Ова хеуристика је хибрид симулираног каљења (енг. simulated annealing – SA) и табу претраживања и састоји се из три фазе. У првој фази се одређује број хабова које треба успоставити, у другој фази се селектују локације за упостављање хабова, и на крају, у трећој фази врши се алокација чворова корисника/снабдевача лоцираним хабовима. Хеуристика SATUHLP је тестирана на инстанцама CAB и AP проблема и добијени резултати су презентовани и поређени са резултатима (Топцоуглу 2005: 967–984).

Скорији радови у којима се проучава USAHLP су: Силва 2009 (3152–3165) и Филиповић 2009 (149–158). У раду: Силва 2009 (3152–3165), аутори предлажу три варијанте вишестартне хеуристике табу претраживања, као и двофазну интегрисану хеуристику табу претраживања за решавање овог проблема. Филиповић и сар. (Филиповић 2009: 149–158) описују генетски алгоритам као метод за решавање USAHLP, као и енумеративну технику за решавање подпроблема USAHLP са фиксираним скупом хабова.

4. *Предложени хибридни алгоритам за решавање USAHLP*

Појам генетског алгоритма први је увео Холанд у својој књизи из 1975, која се бави теоријом адаптивних система. Основна идеја је симулирање процеса природне еволуције једне популације јединки под дејством генетских оператора. Данас се генетски алгоритми користе за решавање широке класе проблема комбинаторне оптимизације

Генетски алгоритам се примењује на коначном скупу јединки који се назива популација. Свака јединка у популацији је представљена низом карактера (генетским кодом) и одговара неком решењу у претраживачком простору. Циљ алгоритма је да се из генерације у генерацију побољшава квалитет сваке јединке у популацији, као и средњи квалитет целе

популације узастопном применом генетских оператора: селекције, укрштања и мутације.

Важна особинагенетских алгоритама је и могућност њихове хибридизације са неким другим, хеуристичким или егзактним, приступом за решавање задатог проблема. Тај нови, хибридни, метод се креира тако да садржи добре особине и једне и друге методе. Хеуристике (једна или више) се често користе не само за побољшавање почетне популације, већ и сваке наредне генерације. Могу се примењивати на целу популацију, један њен део или на појединачну (често најбољу) јединку. У овом раду, генетски алгоритам се комбинује са хеуристикама локалног претраживања које се примењују на део популације јединки у свакој генерацији алгоритма. Детаљи предложене хибридне методе су описани у наредним подсекцијама.

4.1. *Репрезентација јединки и функција циља*

Генетски код сваке јединке се састоји из два сегмента. Први сегмент дужине n садржи 1 или 0 у зависности од тога да ли је у одговарајућем чвору успостављен хаб, или не. Други сегмент, чији су елементи бројеви из скупа $\{0, 1, ..., n-1\}$ који садржи информацију о хабу који је придружен датом чвору. Ако је корисник/снабдевач придружен најближем хабу, на одговарајућу позицију се уписује нула; ако је придружен хабу, који је даљи од најближег али ближи од осталих, смешта се јединица итд. Сваки хаб чвор је придружен самом себи, тако да се у другом сегменту генетског кода, на позицијама које одговарају успостављеним хабовима, налазе нуле.

Фукција циља се рачуна на следећи начин: из првог сегмента генетског кода добијају се индекси успостављених хабова. По добијању скупа успостављених хабова се, за сваки од чворова корисника/снабдевача, низ успостављених хабова сортира у неопадајући поредак по растојању до тог чвора. Из другог сегмента генетског кода се потом узима елемент који одговара текућем чвору кориснику/снабдевачу. Ако тај елеменат има вредност k, корисник/снабдевач се алоцира k-ом хабу из претходно сортираног низа хабова ($k = 0, 1, ..., n-1$). Ово сортирање успостављених хабова се извршава за сваку јединку у свакој генерацији, што захтева додатни рад процесора, али овај додатни рад не утиче битно на време извршавања алгоритма. На крају, вредност функције циља се добија простим сумирањем растојања снабдевач–хаб, хаб–хаб и хаб–корисник помножених количином протока и одговарајућим параметрима χ, α и δ.

4.2. *Генетски оператори и остале карактеристике HGA*

Предложена HGA имплементација користи следеће генетске операторе:

– Фино градирану турнирску селекцију као селекциони оператор (Филиповић 2003:143–161). Вредност параметра селекције је постављена на 5,4.

– Једнопозиционо укрштање, са вероватноћом укрштања је 0,85, што значи да ће око 85% јединки учествовати у производњи потомака, док у око 15% случајева неће бити укрштања и потомци ће бити идентични родитељима.

– Оператор мутације са замрзнутим битовима, који на случајан начин мења по један бит у оба сегмента генетског кода (Станимировић 2008: 669–692). Основни нивои мутације се разликују међу сегментима у генетском коду. Битови у првом сегменту мутирају са вероватноћом 0,4/*n*, док се сваки бит у другом сегменту мутира са двоструко мањом вероватноћом него претходни (0,3/n, 0,15/n , 0,075/n,…). Основни ниво мутације увећава се само на замрзнутим битовима, и то 3,5 пута.

Величина популације је 150 јединки. При извршавању се користи стационарна верзија алгоритма, као и елитна стратегија. Сто јединки из популације директно прелазе у нову генерацију (елитне јединке) и за њих се функција циља не треба поново израчунавати.

У свакој генерацији HGA дупликати се уклањају из популације. То се реализује постављањем прилагођености дупликата на нулу, тако да не буду изабрани у следећој генерацији. На овај начин се чува разноврсност генетског материјала и спречава преурањена конвергенција. Јединке које имају исту вредност функције циља, али различите генетске кодове, у неким случајевима могу доминирати популацијом. Ако су им генетски кодови слични, то може довести до завршетка HGA у локалном оптимуму. Да би се избегле такве ситуације, ограничава се број јединки које имају исту прилагођеност, а различите генетске кодове.

Код предложене HGA имплементације, извршавање се зауставља после 50 генерација, или ако се вредност функције циља најбоље јединке није поправила током 20 узастопних генерација.

4.3. *Локално претраживање*

У свакој генерацији HGA, након рачунања фунције циља, а пре примене генетских оператора, извршавају се две хеуристике локалног претраживања. Хеуристике се примењују на део популације јединки, а не само на најбољу јединку, што захтева нешто више процесорског времена, али са друге стране, даје шансу и лошијим јединкама да се поправе и усмере алгоритам ка *добрим* регионима простора претраживања.

За сваку јединку у популацији број успостављених хабова се добија из првог дела генетског кода, приликом рачунања функције циља. Применом прве хеуристике локалног претраживања, покушавамо да *искључимо* неки од успостављених хабова, а да *укључимо* неки од потенцијалних хабова који нису претходно лоцирани. Уколико се овом заменом може добити побољшање, врши се измена у генетском коду јединке.

Друга хеуристика локалног претраживања не мења скуп успостављених хабова јединке на коју се примењује. Из другог дела генетског кода, приликом рачунања функције циља, за сваког корисника/снабдевача добијамо информацију којем је хабу придружен. Другом хеуристиком локалног претраживања покушавамо да променимо алокације корисника/снабдевача, тј. да их придружимо неком другом хабу из скупа од успостављених хабова. Ако се овом заменом може смањити вредност функције циља, врши се корекција у генетском коду јединке.

5. *Експериментални резултати*

У овој секцији приказани су резултати експеримената за описану HGA методу и извршено је поређење са постојећим методама. Резултати HGA су добијени на рачунару Intel Core i7-860 2.8 GHz са 8GB RAM меморије под оперативним системом Windows 7 Professional. Алгоритам је тестиран на скуповима CAB и AP инстанци преузетих из: Бизли 1996: 429–433.

Табела 1: Резулати HGA на CAB инстанцама проблема са $n = 10,15$ чворова

Инст.			*CPLEX 10.1*		*HGA*				
n	*A*	*f*	*опт. реш.*	*време*	*најб.реш.*	*време*	*ук. време*	*одст.*	*ген.*
10	0,2	100	791,93	0,172	opt	0,001	0,011	0	24
10	0,2	150	915,99	0,016	opt	0,001	0,012	0	24.1
10	0,2	200	1015,99	0,016	opt	0,002	0,013	0	24.6
10	0,2	250	1115,99	0,032	opt	0	0,011	0	23.9
10	0,4	100	867,91	0,141	opt	0,001	0,012	0	23.9
10	0,4	150	974,3	0,031	opt	0,003	0,012	0	24.6
10	0,4	200	1074,3	0,046	opt	0,001	0,011	0	24.3
10	0,4	250	1174,3	0,047	opt	0,001	0,011	0	24.1
10	0,6	100	932,62	0,172	opt	0,003	0,011	0	25.1
10	0,6	150	1032,62	0,047	opt	0,003	0,013	0	24.9
10	0,6	200	1131,05	0,032	opt	0,001	0,011	0	24.2
10	0,6	250	1181,05	0,016	opt	0,001	0,011	0	24.3
10	0,8	100	990,94	0,140	opt	0,002	0,012	0	25.4
10	0,8	150	1081,05	0,047	opt	0	0,011	0	23.4
10	0,8	200	1131,05	0,031	opt	0	0,011	0	23.5
10	0,8	250	1181,05	0,016	opt	0	0,011	0	23.1
10	1,0	100	1031,05	0,156	opt	0,002	0,012	0	24.6
10	1,0	150	1181,05	0,016	opt	0	0,011	0	23.4
10	1,0	200	1131,05	0,016	opt	0,001	0,011	0	23.1
10	1,0	250	1181,05	0,031	opt	0,001	0,011	0	23.3
15	0,2	100	1030,07	0,265	opt	0,012	0,034	0	30.6
15	0,2	150	1239,77	0,187	opt	0,01	0,025	0	28.1
15	0,2	200	1381,28	0,140	opt	0,006	0,02	0	25.9
15	0,2	250	1481,28	0,078	opt	0,009	0,022	0	28.4
15	0,4	100	1179,71	0,547	opt	0,013	0,032	0.051	32.2
15	0,4	150	1355,09	0,532	opt	0,008	0,021	0	25.4
15	0,4	200	1462,62	0,172	opt	0,007	0,021	0.361	28.1
15	0,4	250	1556,66	0,109	opt	0	0,02	0	22.6
15	0,6	100	1309,92	1,438	opt	0,009	0,025	0.002	27.9
15	0,6	150	1443,97	1,094	opt	0,004	0,021	0.352	25.7
15	0,6	200	1506,66	0,047	opt	0,002	0,019	0	22.9
15	0,6	250	1556,66	0,047	opt	0,003	0,024	0	22.9
15	0,8	100	1390,76	1,157	opt	0,004	0,02	0	23.4
15	0,8	150	1456,66	0,063	opt	0,002	0,019	0	22.7
15	0,8	200	1506,66	0,047	opt	0,002	0,019	0	23.1
15	0,8	250	1556,66	0,046	opt	0,002	0,018	0	22.6
15	1,0	100	1406,66	0,078	opt	0,002	0,02	0	22.8
15	1,0	150	1456,66	0,062	opt	0,002	0,018	0	22.9
15	1,0	200	1506,66	0,046	opt	0,001	0,019	0	22.6
15	1,0	250	1556,66	0,047	opt	0,002	0,016	0	22.6
просек				*0,186*		*0,003*	*0,016*	*0,019*	*24,6*

Табеле 1 и 2 приказују резултате HGA приступа за CAB инстанце са $10 \leq n \leq 25$, а табеле 3 и 4 приказују резултате добијене на AP инстанцама са $10 \leq n \leq 100$. Разматрана су два типа фиксних трошкова за

сваку инстанцу (*T* – тешке и *L* – лаке). Предложена HGA метода се на свакој од инстанци извршавала 20 пута. Оптимална решења су добијена применом софтвера CPLEX 10.1.

Прве две колоне табела 1 и 2 садрже димензије и тип инстанце. Следећа колона *опт. реш.* садржи оптимално решење за дату инстанцу проблема. Најбоље решење до ког је дошао HGA налази се у колони *најб.реш.* (ако се најбоље решење поклапа са оптималним, уписана је ознака *опт.*). Колона *време* садржи просечно време (исказано у секундама) потребно да ГА достигне најбоље решење, док колона *ук. време* садржи време (у секундама) потребно за окончање извршавања HGA. У просеку, HGA завршава извршавање после *ген.* (генерација). Квалитет добијеног решења се исказује као просечно одступање *одст.* (исказано у процентима) у односу на оптимално решење.

Табела 2: Резулати HGA на CAB инстанцама проблема са $n = 20,25$ чворова

Инст.			*CPLEX 10.1*		*HGA*				
n	*A*	*f*	*опт. реш.*	*време*	*најб.реш.*	*време*	*ук. време*	*одст.*	*ген.*
20	0,2	100	967,74	0,407	opt	0,014	0,042	0,051	30,1
20	0,2	150	1174,53	0,703	opt	0,01	0,033	0	26,1
20	0,2	200	1324,53	0,579	opt	0,01	0,034	0	27,3
20	0,2	250	1474,53	1,266	opt	0,012	0,033	0	28,4
20	0,4	100	1127,09	1,625	opt	0,013	0,039	0	28,6
20	0,4	150	1297,76	1,484	opt	0,011	0,033	0	28,3
20	0,4	200	1442,56	2,031	opt	0,01	0,03	0	26,4
20	0,4	250	1542,56	1,157	opt	0,01	0,025	0	25,1
20	0,6	100	1269,15	4,985	opt	0,015	0,041	0	31,3
20	0,6	150	1406,04	3,235	opt	0,011	0,029	0	26,4
20	0,6	200	1506,04	3,063	opt	0,01	0,028	0	25,8
20	0,6	250	1570,91	0,187	opt	0,007	0,022	0	23,6
20	0,8	100	1369,52	15,647	opt	0,01	0,031	0	27,6
20	0,8	150	1469,52	4,699	opt	0,01	0,028	0,009	27,3
20	0,8	200	1520,91	0,188	opt	0,009	0,021	0	24,1
20	0,8	250	1570,91	0,125	opt	0,009	0,021	0	23,8
20	1,0	100	1410,07	5,328	opt	0,01	0,028	0	26,6
20	1,0	150	1470,91	0,250	opt	0,009	0,021	0	23,9
20	1,0	200	1520,91	0,141	opt	0,008	0,021	0	23,6
20	1,0	250	1570,91	0,172	opt	0,009	0,02	0	23,9
25	0,2	100	1029,63	1,328	opt	0,019	0,053	0	29,3
25	0,2	150	1217,34	2,609	opt	0,014	0,043	0	27,9
25	0,2	200	1367,34	2,047	opt	0,014	0,041	0	28,6
25	0,2	250	1500,9	1,547	opt	0,015	0,039	0,11	29,3
25	0,4	100	1187,51	5,578	opt	0,021	0,05	0	30,4
25	0,4	150	1351,69	5,000	opt	0,02	0,045	0	31,3
25	0,4	200	1501,62	5,672	opt	0,018	0,043	0	31,4
25	0,4	250	1601,62	3,140	opt	0,018	0,039	0	31,1
25	0,6	100	1333,56	12,672	opt	0,019	0,045	0	29,9
25	0,6	150	1483,56	9,015	opt	0,016	0,041	0	29,7
25	0,6	200	1601,2	7,547	opt	0,016	0,039	0	30,6
25	0,6	250	1701,2	5,125	opt	0,015	0,038	0	30,3
25	0,8	100	1458,83	33,359	opt	0,019	0,048	0	30,9
25	0,8	150	1594,08	20,468	opt	0,021	0,043	0,011	31,9
25	0,8	200	1690,57	11,531	opt	0,01	0,031	0	24,5
25	0,8	250	1740,57	0,562	opt	0,011	0,031	0	24,3
25	1,0	100	1556,63	40,109	opt	0,022	0,049	0	33,6
25	1,0	150	1640,57	13,688	opt	0,01	0,032	0	24,1
25	1,0	200	1690,57	0,640	opt	0,01	0,033	0	24,6
25	1,0	250	1740,57	0,406	opt	0,01	0,031	0	24,6
просек				*5,733*		*0,013*	*0,035*	*0,004*	*27,7*

Из табела 1 и 2 се види да предложени HGA скоро тренутно достиже оптимална решења на свих 80 CAB инстанци. Максимално укупно време време извршавања HGA је 0,058 секунди, али алгоритам први пут

добија најбоље решење за максимално 0.022 секунди. Највеће средње одступање од оптималног решења је 0,051%. У просеку, алгоритам долази до оптималног решења у највише 33,6 генерација.

У табели 3 приказани су резулати HGA на AP инстанцама проблема са $10 \leq n \leq 100$ чворова, на исти начин као и у табелама 1 и 2. У табели 4 дата су поређења са резултатима метода из литературе које су до сада показале најбоље резултате за USAHLP:

– двофазном интегрисаном хеуристиком табу претраживања HubTS из: Силва 2009: 3152–3165, тестираној на конфигурацији Pentium IV 3.0 GHz са 1 GB of RAM под Windows XP Professional;

– најбољом од три вишестартне хеуристике MSTS-3 из: Силва 2009: 3152–3165, тестираној на истој платфоми као и HubTS ;

– генетским алгоритмом GA из: Филиповић 2009:149–158, тестираним на процесору AMD Sempron 2.3+ са 256 MB RAM под UNIX (Knoppix 3.7) оперативним системом.

У табелама 3 и 4 дато је најбоље решење за сваку од наведених метода, као и укупно време њиховог извршавања. Напоменимо да, према спецификацијама са сајта www.spec.org, конфигурације коришћене за тестирање MSTS-3, HubTS и GA имају сличне перформансе. У односу на ове конфигурације, а према истим спецификацијама, платфома коришћена за извршавање HGA има око 1,5 пута боље перформансе. Ове чињенице су узете у обзир приликом поређења ефикасности наведених метода за решавање USAHLP.

Према резултатима из табела 3 и 4, видимо да је HGA такође ефикасан при решавању AP инстанци проблема, јер брзо достиже сва позната оптимална решења. Просечно укупно време извршавања је 0,195 секунди, док је просечно време за које алгоритам достиже оптимално решење скоро два пута мање – 0,084 секунди. Ниска вредност средњег одступања (0,0226%) на овим инстанцама, као и мали средњи број генерација (28,34) указују на ефикасност и стабилност предложеног HGA приступа.

Имајући у виду разлике у платформама на којима су тестиране горепоменуте методе за решавање USAHLP, можемо закључити да је HGA имплементација око 2,3 и 1,6 пута бржа од хеуристика HubTS MSTS-3 респективно. Овај закључак је изведен на основу резултата на AP инстанцама са $10 \leq n \leq 50$ чворова, јер HubTS MSTS-3 нису тестиране за $60 \leq n \leq 90$. Посматрајући све тестиране AP инстанце $10 \leq n \leq 100$, закључујемо да HGA има око 3,9 пута боље перформансе у поређењу са GA, иако локалне хеуристике имплементиране у оквиру HGA захтевају додатно процесорско време

Табела 3: Резулати HGA на AP инстанцама проблема са $10 \leq n \leq 100$ чворова

Инст.	*CPLEX 10.1*		*HGA*				
	опт. реш.	*време*	*најб.реш.*	*Време*	*ук. време*	*одст.*	*ген.*
10L	224250,05	0,078	opt	0,001	0,011	0,000	24,4
10T	263399,94	0,125	opt	0,001	0,011	0,000	23,8
20L	234690,62	0,22	opt	0,010	0,03	0,000	25,2
20T	271128,18	0,25	opt	0,009	0,03	0,000	25,4
25L	236650,62	0,563	opt	0,013	0,04	0,000	27
25T	295667,84	12,364	opt	0,008	0,031	0,000	21
40L	240986,23	1,002	opt	0,034	0,082	0,011	29,9
40T	293164,84	15,512	opt	0,010	0,06	0,000	21
50L	237421,98	22,771	opt	0,053	0,122	0,002	30,9
50T	300420,98	275,976	opt	0,034	0,106	0,022	24,8
60L	228007,9	11,18	opt	0,093	0,191	0,014	34,3
60T	246285,034	9,53	opt	0,063	0,169	0,000	27,6
70L	233154,289	90,3	opt	0,095	0,235	0,000	28,6
70T	252882,633	22,42	opt	0,120	0,279	0,000	31,5
80L	229240,373	143,39	opt	0,193	0,363	0,020	36
80T	274921,572	140,58	opt	0,160	0,344	0,000	32,9
90L	231236,235	423,14	opt	0,243	0,473	0,009	35
90T	280755,459	153,72	opt	0,223	0,458	0,375	34,1
100L	238016,28	275,976	opt	0,124	0,394	0,000	24,4
100T	305097,96	23,139	opt	0,193	0,478	0,000	28,9
100L	224250,05	0,078	opt	0,001	0,011	0,000	24,4
Просек		*81,112*		*0,084*	*0,195*	*0,0226*	*28,34*

Табела 4: Поређења резултата на AP инстанцама проблема са $10 \leq n \leq 100$ чворова

Инст.	*CPLEX 10.1*	*HGA*		*GA*		*MSTS-3*		*HubTS*	
	опт.реш.	*најб.реш.*	*ук.време*	*најб.реш.*	*ук.време*	*најб.реш.*	*ук.време*	*најб.реш.*	*ук.време*
10L	224250,05	opt	0,011	opt	0,101	opt	0,016	opt	0,015
10T	263399,94	opt	0,011	opt	0,113	opt	0,015	opt	0,015
20L	234690,62	opt	0,03	opt	0,206	opt	0,062	opt	0,046
20T	271128,18	opt	0,03	opt	0,213	opt	0,062	opt	0,062
25L	236650,62	opt	0,04	opt	0,275	opt	0,125	opt	0,125
25T	295667,84	opt	0,031	opt	0,233	opt	0,094	opt	0,031
40L	240986,23	opt	0,082	opt	0,554	opt	0,375	opt	0,781
40T	293164,84	opt	0,06	opt	0,5	opt	0,344	opt	0,188
50L	237421,98	opt	0,122	opt	0,904	opt	0,703	opt	1,891
50T	300420,98	opt	0,106	opt	0,592	opt	0,719	opt	0,469
60L	228007,9	opt	0,191	opt	1,205	-	-	-	-
60T	246285,034	opt	0,169	opt	1,016	-	-	-	-
70L	233154,289	opt	0,235	opt	1,489	-	-	-	-
70T	252882,633	opt	0,279	opt	1,397	-	-	-	-
80L	229240,373	opt	0,363	opt	2,397	-	-	-	-
80T	274921,572	opt	0,344	opt	1,818	-	-	-	-
90L	231236,235	opt	0,473	opt	2,463	-	-	-	-
90T	280755,459	opt	0,458	opt	1,934	-	-	-	-
100L	238016,28	opt	0,394	opt	3,221	opt	7,95	opt	28,515
100T	305097,96	opt	0,478	opt	2,18	opt	5,187	opt	7,141
просек			*0,19535*		*1,14055*				

6. *Закључак*

У раду је предложена ефикасна хибридизација генетског алгоритма и две хеуристике локалног претраживања за решавање НП-тешког хаб локацијског проблема неограничених капацитета са једноструким алокацијама. Коришћено је двосегметно бинарно кодирање решења, адекватни генетски оператори и неколико стратегија за спречавање преурањене конвергенције алгоритма. Имплементиране хеуристике локалног претраживања дају побољшања која представљају импулс генетском алгоритму и усмеравају га ка глобалном оптимуму. Ове хеуристике се релативно брзо извршавају и не утичу значајно на укупно процесорско време. Експериментални резултати показују добре перформансе предложеног хибридног приступа у погледу квалитета решења и времена извршавања.

Литература

Абдинур-Хелм 1998а: Abdinnour-Helm, S., A Hybrid Heuristic for the Uncapacitated Hub Location Problems, *European Journal of Operational Research*, 106, 489–499.

Абдинур-Хелм 1998б: Abdinnour-Helm, S., Venkataramanan M.A., Solution Approaches to Hub Location Problems, *Annals Of Operations Research*, 78, 31–50.

Алумур 2008: Alumur, S., Kara, Y. B., Network hub location problems: The state of the art, *European Journal of Operational Research*, 190, 1–21.

Бизли 1996: Beasley, J. E., Obtaining Test Problems via Internet, *Journal of Global Optimization*, 8, 429–433.

Кембел 2002: Campbell, J. F., Ernst, A. and Krishnamoorthy, M., Hub Location Problemsin Drezner Z. and Hamacher H., eds.: *Facility Location: Applications and Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 373–407.

Клинцевич 1991: Klincewicz, J. G., Heuristics for the p-hub location problem, *European Journal of Operations Research*, 53, 25–37.

Клинцевич 1992: Klincewicz, J. G., Avoiding local optima in the p-hub location problem using tabu search and GRASP, *Annals of Operations Research*, 40, 283–302.

О'Кели 1992: O'Kelly, M. E., Hub facility location with fixed costs, *The Journal of the Science Association International*, 3(71), 293–306.

Силва 2009: Silva, M. R., Cunha, C. B., New simple and efficient heuristics for the uncapacitated single allocation hub location problem, *Computers & Operations Research*, 36, 3152–3165.

Скорин-Капов 1994: Skorin-Kapov, D., Skorin-Kapov, J., On tabu search for the location of interacting hub facilities, *European Journal of Operations Research*, 73, 502–509.

Станимировић 2008: Stanimirović, Z., An efficient genetic algorithm for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem, *Control and Cybernetics*, 37(3), 669–692.

Топцуоглу 2005: Topcuoglu, H., Corut, F., Ermis, M., Yilmaz, G., Solving the Uncapacitated Hub Location Problem Using Genetic Algorithms, *Computers & Operations Research*, 32, 967–984.

Холанд 1975: Holland, J. H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The University of Michigan Press, Ann Arbor .

Филиповић 2003: Filipović, V., Fine-grained tournament selection operator in genetic algorithms, *Computing and Informatics*, 22, 143–161.

Филиповић 2009: Filipović, V., Kratica, J., Tošić, D., Dugošija, Đ., GA Inspired Heuristic for Uncapacitated Single Allocation Hub Location Problem, *Advances in Soft Computing*, 58,149–158.

Чен 2007: Chen, J. F., A hybrid heuristic for the uncapacitated single allocation hub location problem, *OMEGA – The International Journal of Management Science*, 35, 211–220.

Marina Zirojević*
University of East Sarajevo
Production and Management Faculty Trebinje Pregledni rad

MODELING WITH MATHEMATICA 8.0

1. *About Wolfram Mathematica 8.0*

Mathematica is very powerfull and very usefull computation system produced by company named Wolfram Research. Company was founded by Stephen Wolfram in 1987 and throu gh years became one of the world's most respected software companies.

Mathematica is one of the major commercial computer algebra systems which has become a very popular in scientific communities. As well as Mathematica, all Wolfram Research products are useing in faculty and university all over the world. In a aim to dedicate more attention to education they built the world's largest free network of technical information websites, such is MathWorld, Wolfram Demonstration Project, Wolfram Alpha, etc.

When the first time was released, Mathematica achieved an important impact on useing math in all fields of technics. Mathematica was made turning point of a modern era in mathematical calculation. Users oriented design is one of the features which brought Mathematica such a popularity.

At a begining, individual packages had existed for specific numerical, algebraic, graphical and other tasks, but the aim of Mathematica was to create one software which will be suitable for a different areas of technics. It became possible when the new kind of programming language was invented which allows us to works with wide range of objects.

At first, Mathematica has been used in the physical sciences, engineering and mathematics. But over the years, Mathematica has become an important part of many science fields (biology, chemistry, medicine, geography, economics, statistics).

She had made many important discoveries easier. Mathematica also has been the basic for thousands of technical papers.

2. *Work in Wolfram Mathematica 8.0*

When we run Mathematica, the first what we see is interactive document known as notebook. Mathematica front end is separate from the kernel which perform computations. Front end (notebook) handles interaction with user and create interactive documents. The notebook includes many menus and graphical tools for creating and reading notebook documents. It also mixing text, graphics and Mathematica input and output.

* matematika@filozof.org

Mathematica notebook consist of sequences of cell. Cell can be a variety of styles: input, output, text, graphics, titles, sections and figures. Cells are marked with the square brackets [3].

We already sad that when user started Mathematica on his display he can see notebook. Now, we enters input into the notebook. After that, user type *Shift+Enter* to make Mathematica process his input. Users input and output Mathematica will label with *In[n]:=* and *Out[n]=*. Next picture shows standard Mathematica display.

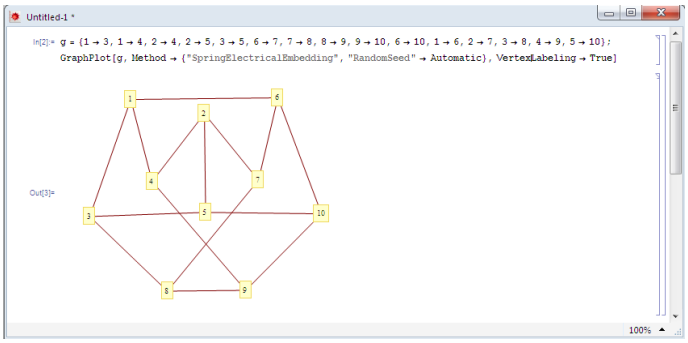


Figure 2: Mathematica display

Wolfram Mathematica 8.0 has a lot of palettes which helps us to work. To see palettes click on Palettes from the main menu. The most common Palettes are: Basic Math Input, Basic Math Assistant, Classroom Assistant, Writing Assistant, etc. This palettes allow access to the mathematical symbols by mouse click [1].

2.1. *Mathematica syntax*

Mathematica has a rich, carefully designed syntax. There is huge number of defined symbols, which purpose is to label built-in functions and constance. Four important rule are [1]:

1. $f[x,y]$ – function arguments go in square brackets;
2. $Sin, Sqrt, Plot \ldots$ – built-in symbols have names beginning with capital letters;
3. $\{x,y,z\}$ – curly brackets are used for lists;
4. Mathematica is case sensitive (*Sqrt* and *sqrt* are different).

For example, command Integrate computes antiderivates $\int f(x)\,dx$. The command begins with a capital letter and arguments goes in square brackets:

```
Integrate[x^2 Log[x], {x, 1, 2}]
```

$$\frac{1}{9}\,(-7 + 8\,\mathrm{Log}[8])$$

3. *Connection with other applications*

Mathematica has a thousands capabilities. Users can apply Mathematica in industry, research and education. Mathematica is used by students, teachers and researchers.

Mathematica is built to help you with all your technical tasks. It is connects to all existing applications and databasics (Java, C, Excel).

Interesting thing about Mathematica is the way it transform notebook in a different form. Mathematica can generate many types of documents directly from notebook. For example, if you have a Mathematica 8.0 notebook which you want to convert into TeX source code and insert it somewhere in document, it can be done in several ways. Mathematica can also import formatted documents.

TeX is typesetting system and programming language which is commonly used for typesetting mathematical and scientific publications and other technical documents. Developed since 1977 by Donald Knuth.

If you want to merge your work with existing material in TeX, you can use TeXForm to convert expressions in Mathematica into a form suitable for input to TeX. TeXForm translates standard mathematical functions and produce AMS-LaTeX compatible TeX output. It can easily done as follows:

If we type next code $TexForm\left[\frac{x}{\sqrt{5}}\right]$, the Wolfram Mathematica gives us as a result:

```
\frac{x}{\sqrt{5}}
```

Mathematica notebook you can convert to LaTeX by choosing LaTeX document for a *Save as type* from a *File/Save as* menu.

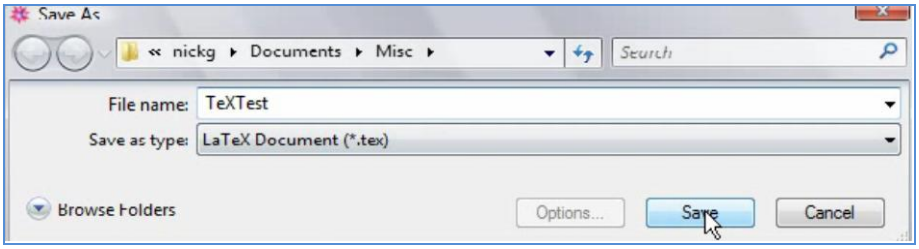


Figure 4: Generate TeX with Mathematica 8.0

4. *Demonstrations in Mathematica 8.0*

A Demonstration is a small program created with Mathematica. It's an interactive visualization of a concept. Demonstrations can be about any topic. As you move a controls, you see a change in its output that helps you understand the concept being shown.

Wolfram Mathemtica has a lot of functions, which allow us to make demonstrations. The most common used are Manipulate, Animate, `Dynamic`. For any expression, graphic or other object with symbolic parameters, Manipulate automatically creates an interface for manipulating the parameters.

For example, if we want to animate a picture of $\sin nx$ for a different values of n, we use next code:

```
Manipulate[Plot[Sin[n x], {x, 0, 2 Pi}], {n, 1, 10}]
```

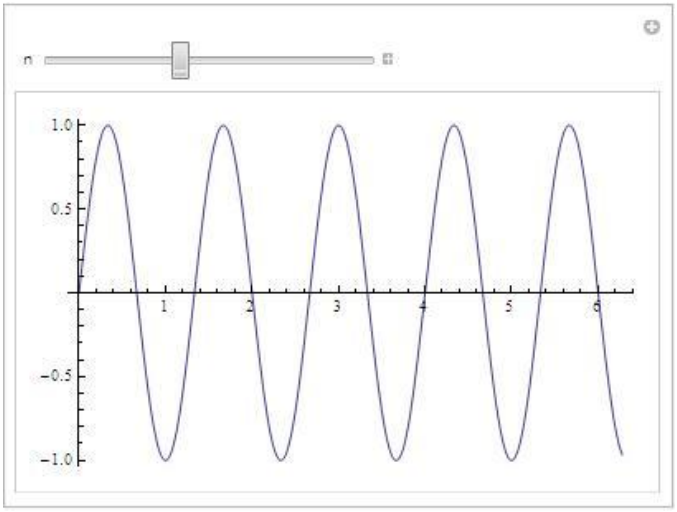


Figure 5: Manipulate a continuous parameter

4.1. *The central limit theorem*

In this section we show you a demonstration of theorem which has fundamental importance to statistics. The central limit theorem is one of the most remarkable results of the theory of probability. The central limit theorem states that the sampling distribution of the sample mean approaches a normal distribution as the size of the sample grows. This means that the histogram of the means of many samples should approach a bell-shaped curve. Each sample consists of 200 pseudorandom numbers between 0 and 100, inclusive [7].

This theorem says that if S_n is the sum of n mutually independent random variables, then the distribution function of S_n is well-approximated by a certain type of continuous function known as a normal density function, which is given by the formula [5]:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

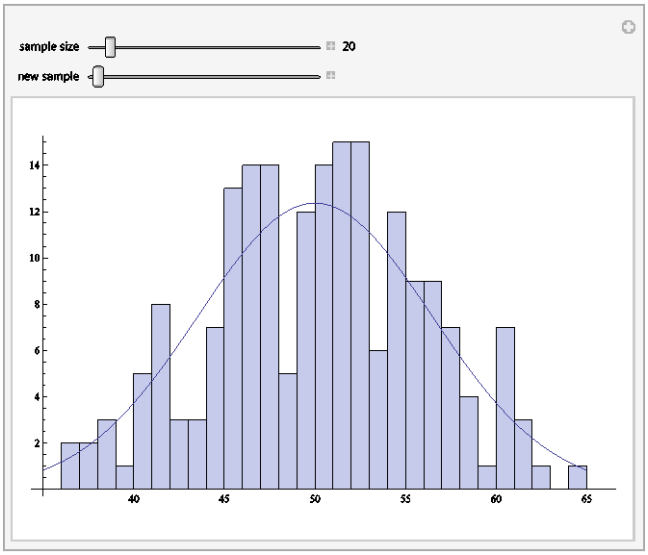


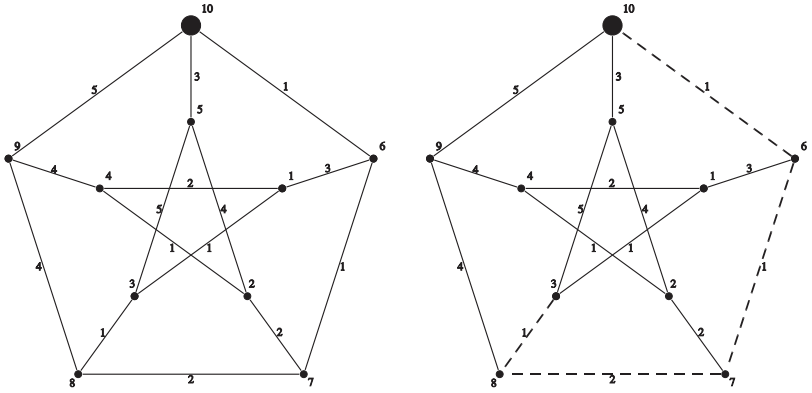
Figure 6: The central limit theorem

4.2. *Path and cycles in graph*

In our closing section we give an applications of Mathematica in graph theory. One of the key problems in graphs is finding the shortest path between two vertices. The shortest path problem is the problem of finding a path between two vertices in a graph such that the sum of the weights of its constituent edges is minimized. An example is finding the quickest way to get from one location to another on a road map. In this case, the vertices represent locations and the edges represent segments of road and are weighted by the time needed to travel that segment [6].

```
g = PetersenGraph[5, 3, VertexSize → {10 → Medium}, VertexLabels → "Name",
   EdgeWeight → {1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 1, 4, 3, 1, 2, 4, 5, 1},
   EdgeLabels → {1 ⟷ 3 → 1, 1 ⟷ 4 → 2, 1 ⟷ 6 → 3, 2 ⟷ 4 → 1, 2 ⟷ 5 → 4,
     2 ⟷ 7 → 2, 3 ⟷ 5 → 5, 3 ⟷ 8 → 1, 4 ⟷ 9 → 4, 5 ⟷ 10 → 3, 6 ⟷ 7 → 1,
     7 ⟷ 8 → 2, 8 ⟷ 9 → 4, 9 ⟷ 10 → 5, 10 ⟷ 6 → 1}]
FindShortestPath[g, 10, 3]
{10, 6, 7, 8, 3}

FindShortestPath[g, 10, 3];
HighlightGraph[g, PathGraph[%]]
```



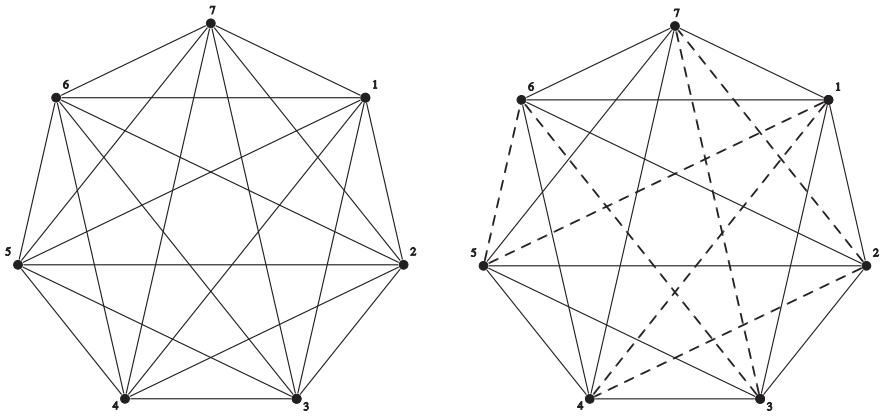
Hamilton path is a path in an undirected graph that visits each vertex exctly once. A Hamilton cycle is a cycle in an undirected graph that visits each vertex exactly once and returns to the strarting vertex. [6]

```
g = CompleteGraph[7, VertexLabels → "Name", ImagePadding → 20]
```

```
First@FindHamiltonianCycle[g]
```

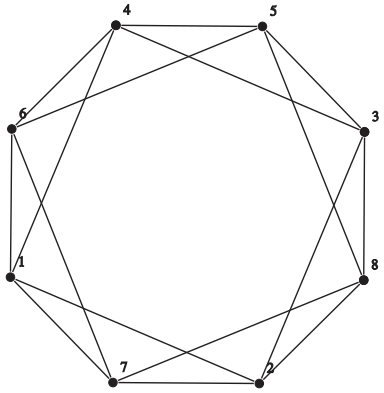
```
{1 ⟷ 4, 4 ⟷ 2, 2 ⟷ 7, 7 ⟷ 3, 3 ⟷ 6, 6 ⟷ 5, 5 ⟷ 1}
```

```
HighlightGraph[g, PathGraph[%]]
```



In graph theory, an Eulerian trail is a trail in a graph which visits every edge exactly once. An Eulerian cycle is a Eulerian trail which starts and ends on the same vertex. They were first discussed by Leonhard Euler while solving the famous Seven Bridges of Königsberg problem in 1736. [6]

```
g = Graph[{1 ⟷ 2, 2 ⟷ 3, 3 ⟷ 4, 4 ⟷ 1, 4 ⟷ 6, 4 ⟷ 5, 3 ⟷ 5, 3 ⟷ 8, 2 ⟷ 7, 2 ⟷ 8, 1 ⟷ 7,
    1 ⟷ 6, 6 ⟷ 7, 7 ⟷ 8, 8 ⟷ 5, 5 ⟷ 6}, VertexLabels → "Name", ImagePadding → 60]
```




```
FindEulerianCycle[g]
```

```
{{1 ⟷ 6, 6 ⟷ 5, 5 ⟷ 8, 8 ⟷ 7, 7 ⟷ 6, 6 ⟷ 4, 4 ⟷ 5,
  5 ⟷ 3, 3 ⟷ 8, 8 ⟷ 2, 2 ⟷ 7, 7 ⟷ 1, 1 ⟷ 4, 4 ⟷ 3, 3 ⟷ 2, 2 ⟷ 1}}
```

References

Don 2009: Eugene Don, Ph. D, *Mathematica*, Schaum's outlines.

Stanimirović, Milovanović 2002: Predrag S. Stanimirović, Gradimir V. Milovanović, *Program Package Mathematica and Application, Faculty of Electronic Engineering*, Niš.

Wolfram 2003: Stephen Wolfram, *The Mathematica Book*, 5th ed., Wolfram media.

Internet sources

<http://wolfram.com/>
<http://mathworld.wolfram.com/>
<http://en.wikipedia.org/>
<http://demonstrations.wolfram.com/>

Милован С. Миливојевић [*]
Јелена Недовић
Висока пословно-техничка школа Ужице
Информатички одсек

Прегледни рад

РАЗВОЈ ИНТЕРАКТИВНОГ СОФТВЕРА ЗА АНАЛИЗУ ТОКА ФУНКЦИЈА, НУМЕРИЧКО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ И ИНТЕГРАЦИЈУ

1. *Увод и циљ*

Један мали, али неопходни корак ка звезданим стазама математичких сазнања, је разумевање и физикално-визуелно поимање математичких функција дефинисаних у аналитичкој форми. Диференцијабилни и интегрални рачун употпуњује једну од димензија у реторти науке. Дискретна математика и итеративне и рекурзивне формуле указују на пут „нумеричког" испитивања токова функција и омогућују комјутерску визуелизацију која у крајњем помаже да се почетни „опори" укус претвори у „математичку сласт (и) или страст.

Лепоте математичких форми и могућности математичких формулација воде ка вишем нивоу апстракције и доприносе развоју креативне духовности. Овај дар од Бога, инспирише у трагању за одговорима који побуђују најтајанственије димензије човековог поимања „апстрактног" и „рационалног".

Како разумети граничне вредности, лимесе? Или, појмити дељење нулом! Како дочарати уму Лопиталово правило? Како физикално „разумети" појам конвергенције? Или, како „склопити" идеје комплексних бројева и апстракције да је „корен из минус један ($\sqrt{-1}$) једнак имагинарној јединици i ? Да ли је стварно могуће математичким једначинама описати читаву васељену? Каква је формула која описује „Велики Прасак"? Колика је снага ума потребна да се схвате „генијални" Миланковићеви „Канони осунчавања"? Где се купује „улазница" за „свет математике"? ...

Одговори на претходна и слична питања постављају изазове који инспиришу.

У овом раду је описан покушај да се кроз развој математичког софтвера допринесе лакшем схватању математичких форми и функција из домена нумеричке анализе и диференцијабилног и интегралног рачуна. Посебан акценат стављен је на: нумеричке итеративне методе и појам итерације уопште, методе одређивања корена алгебарских и трансцедентних једначина, одређивање дефиниционог домена (ДД) и

[*] milovan.milivojevic@vpts.edu.rs

својстава парности/непарности, коначне разлике и њихову улогу у интерполацији, нумеричку диференцијацију и одређивање екстрема функција као и на нумеричку интеграцију.

Такође, тежило се разради технике VBA (Visual Basic for Application) програмирања као и: употреби објектно орјентисаних парадигми, разради стратегије „хватања" програмских грешака у VBA процедурама са посебним освртом на одређивање дефиниционих домена и разради методологије динамички анимираних „графичких" приказа функција на апликацијским формама

Коначно идеја је да се софтвер примењује као „user friendly" апликација која помаже процесе „учења" и „поимања" математике као и процес инжењерских прорачуна у различитим дисциплинама почев од машинства и грађевине па до генетског инжењеринга.

Поред наведеног, математички softwape-и као што су *MatCAD, MatLab, Mathematica, Euklid, GeoGebra* или *Euler* као и многи други који доприносе да се прелепа „слушкиња физике" одене у чаробну одору, инспирација су за *писање* интерактивног софтвера за анализу функција задатих у аналитичкој форми и динамичку визуелизацију процеса диференцирања и интеграције.

2. *Математичка подлога*

Теоријску подлогу за развој апликације чине сегменти нумеричке анализе са нумеричким методама. Теоријске поставке преточене су у следеће модуле: *Модул за испитивање токова функција једне променљиве са посебним освртом на дефиниционi домен и понашање функција у околини тачака прекида као и на решавање корена фунција различитим нумеричким методама, Модул за Нумеричко диференцирање (Коначне разлике) и модул за Нумеричку интеграцију.* У тексту који следи дају се главне теоријске поставке коришћених математичких знања.

2.1. *Испитивање графика функција*

У модулу за анализи функција посебна пажња посвећена је;

- Нумеричком решавању алгебарских и трансцедентних једначина
- Нултом приближењу корена
- Одређивању корена са задатом тачношћу и
- Методама итерације

Наредни текст приказује одабране теоријске поставке који представљају основу развијеног софтвера.

2.1.1. *Итерација*

Корени алгебарских једначина само прва четири степена и неких трансцендетних једначина могу бити нађени у експлицитном облику као функције коефицијената датих једначина. За већину једначина чији су коефицијенти задати нумерички, неопходно је ограничење на нумеричко израчунавање њихових корена, па и то само приближно [1].

Проблем решавања једначине f(x) =0 која је дефинисана и непрекидна у околини корена, односно одређивања *корена једначине* реализује се у оквиру две фазе:

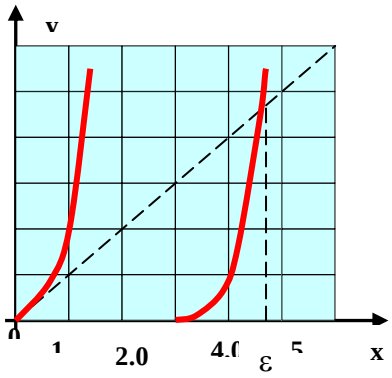
- „изоловање" решења, односно проналажење *нултог решења* и
- одређивање *нуле функције* са задатом тачношћу

За одређивање *нултог решења* често се користи графичка метода. Циљ је да се уочи довољно уска област у којој се налази само један корен једначине $f(x)=0$. Поред класичног начина који подразумева цртање графика функције и визуелног утврђивања области у којој се налази изоловани корен, често је корисно функцију чије се нуле траже трансформисатри у облик $\varphi(x)=\psi(x)$. Затим се конструишу графици функција $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и нађу тачке пресека тих графика. Апсисе тих тачака су једнаке коренима једначине. На пример, на сл.1 приказано је графичко решење једначине функције (1).

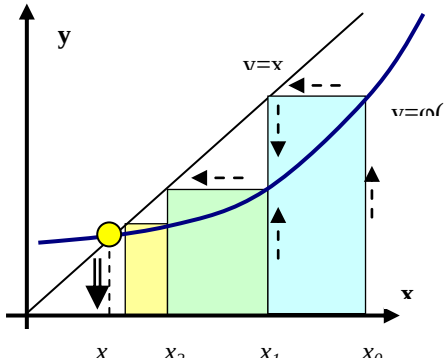
$$f(x)=tgx-x \qquad (1)$$

Тражени корен је приближно $\varepsilon=4.5$. Описани поступак омогућава да се корени одреде са малом тачношћу. Зато се те вредности узимају само као *нулта апроксимација*.

Друга фаза проблема састоји се у одређивању корена са жељеном тачношћу полазећи од *нулте апроксимације*. У пракси се најчешће користи нека од метода итерације, тако што се једначина $f(x)=0$ преводи у еквивалентни облик $x=\varphi(x)$. Прелаз на нови облик $x=\varphi(x)$ може бити извршен на различите начине, што утиче на брзину конвергенцију у налажењу решења. У сукцесивним корацима замене x_0, x_1, x_2 ... уместо x у једначини $x=\varphi(x)$ добија се $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, $x_3=\varphi(x_2)\ldots$, $x_n=\varphi(x_{n-1})$, све дотле док у границама жељене тачности не буде $x_n\cong x_{n-1}$. Геометријска интерпретација методе итерације дата је на сл. 2.



Слика 1.
Графичка метода приближног одређивања корена функције



Слика 2.
Геометријска интерпретација методе итерације

Да би се обезбедила конвергенција итерационог процеса једначина $f(x)=0$ се може трансформисати кроз међуоблике (2), (3) и (4):

$$\lambda \cdot f(x)=0 \tag{2}$$

$$\lambda \cdot f(x)+x=x \tag{3}$$

$$\varphi(x)=\lambda \cdot f(x)+x \tag{4}$$

где је λ константа коју треба бирати тако да буде $|\varphi'(x)<1|$, на интервалу $[a,b]$ на коме се налази изоловани корен [1].

2.1.2. *Метода Њутна*

Нека је дата једначина $f(x)=0$ која је два пута диференцијабилна у околини траженог корена, при чему су $f'(x)\neq 0$ и $f''(x)\neq 0$ и сталног су знака. Такође нека почетна апроксимација x_0 припада датој околини и нека је са h означена вредност за коју важи једначина (5).

$$f(x_0+h)=0 \tag{5}$$

Облик (5) може се развити у Тејлоров ред у околини тачке x_0 (6).

$$f(x_0+h)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\cdot f''(x_0)+\ldots=0 \tag{6}$$

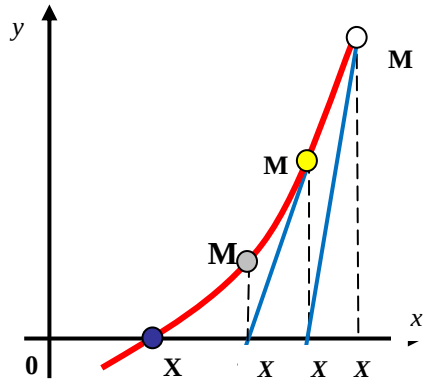
Одбацивањем чланова реда који садрже изводе више од првог реда и уопштавањем, добија се једначину за одређивање приближне вредности корена (7):

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},(k=0,1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

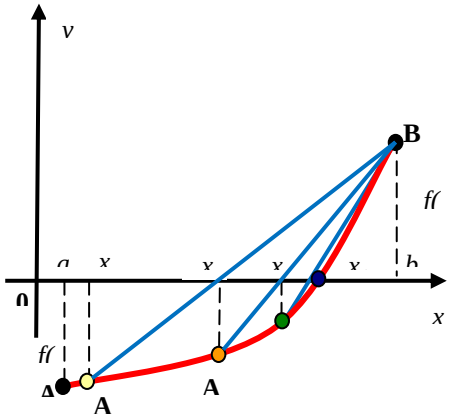
На сл. 3 дата је геометријска интерпретација Њутнове методе за случај да је $f(x_0)>0$, $f'(x_0)>0$, и $f''(x_0)>0$. Итеративну формула се примењује док се две узастопне итерације не поклопе у границама задате тачности.

2.1.3. *Метода сечице*

Једна од врло распрострањених приближних метода за решавање једначина $f(x)=0$ је метода сечице (сл. 4).



Слика 3.
Геометријска интерпретација Њутнове методе



Слика 4.
Геометријска интерпретација методе сечице

Ако се за нулту апрокисимацију одабере неки број x_0 из сегмента $[a,b]$ и повуче сечица кроз тачке A_0 и Б, прва апроксимација корена биће апциса x_1 пресека тетиве A_0Б са x осом. Понављањем поступка добија се низ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots$ приближних вредности корена. Рекурентна формула (9) се добија пресеком једначине сечице (8) која пролази кроз тачке $A(x_n, f(x_n))$ и Б (b, f(b)) и x осе.

$$\frac{y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}=\frac{x-x_n}{b-x_n} \tag{8}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(b-x_n)\cdot f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} \tag{9}$$

2.2. *Коначне разлике и Њутнов интерполациони полином*

Пошто *коначне разлике* и *интерполациони полиноми* представљају основу нумеричког диференцирања у наставку се даје приказ основних теоријских појмова коју су били платформа за развој софтвера.

Ако се низу еквидистантних тачака x_0, x_1, …… , x_n, придруже вредности функције $y_0 = f(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, ... , $y_0 = f(x_0)$., онда се разлике (10)

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0, \qquad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \qquad y_3 - y_2 = \Delta y_2, \ldots\ldots ,$$
$$y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1} \tag{10}$$

називају се *коначним разликама првог реда* функције $f(x)$. Разлике првих разлика називају се разликама другог реда функције и израчунавају се помоћу уопштене формуле (11),

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = y_n - 2 \cdot y_{n-1} + y_{n-2}. \tag{11}$$

Аналогно се дефинишу коначне разлике трећег реда, итд. Коначна разлика реда k<n дефинише се помоћу једначине (12) на бази разлика претходног реда :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \tag{12}$$

Коначне разлике се често записују у облику дијагоналне таблице. Коначне разлике омогућују увид у "степен глаткости" функције. При томе велику улогу играју следеће теореме [1] које се наводе без доказа:

Теорема 1. Ако је функција $f(x)$ *полином степена* ***n*** *са најстаријим чланом* a_0x^n *и h корак таблице, тада за било које* k<n *разлика* Δ^k *у је полипом степена n-k са најстаријим чланом n((n-1)(n-2) …. (n -* $k+1)a_0h^kx^{n-k}$.

Последица теореме је да је за полином $y = f(x)$ степена n, разлика n-тог реда константна и износи $\Delta^n y = n! \cdot a_0 \cdot h^n$.

Теорема 2. Ако су копачне разлике n-тог реда за било који корак h конспаптне, то је посматрапа фупкција $f(x)$ *полипом n-тог степена.*

На наведеним теоремама заснива се следеће практично правило: степен интерполацоног полинома при апроксимацији бирати тако да се он поклапа са редом практично константних коначних разлика. Наводи се пример:

Пример 1. Одредити коначне разлике функције $f(x) = x^4$ за вредности x=0,1,2,3,4,5,6,7,8. *Решење је у Табели 1.*

Табела 1. Пример одређивања коначних разлика

x	з	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0	1				
1	1	15	14	36		
2	16	65	50	60	24	0
3	81	175	110	84	24	0
4	256	369	194	108	24	0
5	625	671	302	132	24	0
6	1296	1105	434	156	24	
7	2401	1695	590			
8	4096					

За многе проблеме практичне природе у домену нумеричких метода неопходна је употреба интерполационих полинома. Примарни полином у овом домену је *први интерполациони полином Њутна* приказан помоћу коначних разлика у једначини (13).

$$P_n = y_o + u\Delta y_o + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_o \ldots \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_o \quad (13)$$

где је $u = \frac{x - x_0}{h}$, а h корак еквидистантних интерполационих тачака.

Једначина (13) омогућује формирање интерполационог полинома за низ задатих парова $\{(x_0, f(x_0)); (x_1, f(x_1)); \ldots; (x_n, f(x_n))\}$ или одређивање приближне вредности функције $f(x_0)$ за задато x_0, при чему се у апроксимацији практично иде до коначних константних разлика (коначних разлика које се стабилно понашају).

Наводи се пример:

Пример:. За функцију задата табелама 2. и 3. одредити f(1.73)

Табела 2. Подаци о тачкама функције

x	1,72	1,74	1,76	1,78
f(x)	0,179066	0,175520	0,172045	0,168638

Табела 3. Коначне разлике за податке из Табеле 2.

x	**y**	**Δy**	**Δ^2y**	**Δ^3y**
1,72	0,179066	-0,003546		
1,74	0,175520	-0,003475	0,000071	-0,000003
1,76	0,172045	-0,003407	0,000068	
1,78	0,168638			

Решење: У овом примеру је x_0=1,72; x=1.73; h=0,02; $u = \frac{1.73-1.72}{0.02} = \frac{1}{2}$;

$$f(1.73) \approx 0.179066 + \frac{1}{2}\cdot(-0.003546) + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2}\cdot 0.000071 + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{2\cdot 3}\cdot(-0.000003) =$$

0,179066 – 0,001773 -0,000009=0,177284

Добијена вредност се поклапа са вредношћу која се добија помоћу функције $y = e^{-1.73} = 0.17728441$ јер Табела 3. представља експоненцијалну функцију $y = e^x$.

2.3. *Нумеричко диферепцирање*

Нумеричко диференцирање је засновано на Њутновој интерполационој формули. Функција $f(x)$, која је n пута диференцијабилна на интервалу [a,b] може се апроксимирати полиномом (13), односно може се, узимајући у обзир додатак, написати у краћем облику (14),

$$f(x) \cong P_n(x) + R_n(x) \tag{14}$$

Занемаривањем остатка добијају се изводи (15),

$$f'(x) \cong P_n'(x);\ f''(x) \cong P_n''(x);...;\ f^k(x) \cong P^{(k)}{}_n(x) \tag{15}$$

Сукцесивним диференцирањем полинома (13), узимајући у обзир (16) добијају се изводи (17)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{1}{h} \tag{16}$$

$$y' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o + (u-\tfrac{1}{2})\Delta^2 y_o + (\frac{1}{2}u^2 - u + \frac{1}{3})\Delta^3 y_o + (\frac{1}{6}u^3 - \frac{3}{4}u^2 + \frac{11}{12}u - \frac{1}{4})\Delta^4 y_o + ...\right]$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o + (u-1)\cdot\Delta^3 y_o + (\frac{1}{2}\cdot u^2 - \frac{3}{2}\cdot u + \frac{11}{12})\cdot\Delta^4 y_o + ... + ...\right] \tag{17}$$

Када се изводи рачунају баш у тачки $x = x_0$, претходне формуле су значајно једноставније (18),

$$y' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o - \frac{1}{2}\cdot\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\cdot\Delta^3 y_o - \frac{1}{4}\cdot\Delta^4 y_o + ...\right]$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o - \Delta^3 y_o + \frac{11}{12}\cdot\Delta^4 y_0 ... + ...\right] \tag{18}$$

Облици једначина (17) и (18) су представљали подлогу за развој апликације приказану у овом раду.

2.4. *Нумеричка интеграција*

Формуле за приближно израчунавање одређених интеграла називају се *квадратурним формулама*. Квадратурне формуле базирају се на приближној формули (19),

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot y_i \qquad (19)$$

где је c_i константа од чијег избора зависи облик квадратурне формуле. Ако се подинтегрална функција (подинтервали $[x_k,x_{k+1}]$) апроксимира полиномом (13), добијају се редом *квадратурне формуле*:

- Формула правоугаоника (20), ако се у полиному задржи само први члан
- Трапезна формула (21), ако се у полиному задрже прва два члана и
- Симпсоново правило (22), ако се у полиному посматрани подинтервал интервал $[x_k,x_{k+2}]$ апроксимира полиномом другог степена

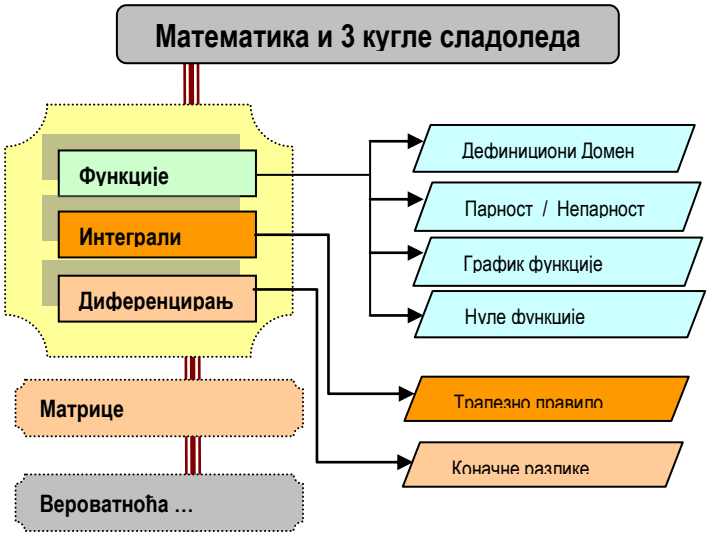
$$\int_a^b f(x)\cdot dx \cong h\cdot\left[f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right] \qquad (20)$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \cong h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right] \qquad (21)$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \cong h\cdot\{f(x_0)+f(x_{2n})+4\cdot(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+ f(x_{2n-1}))+2\cdot(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n}))\} \qquad (22)$$

3. *Структура и* interface *апликације*

Апликација „Математика и 3 кугле сладоледа” је креирана кроз модуле који прекривају различите области математике средњег нивоа (средње школе, високе школе, факултети...) и намењен је за „лакше” учење математике и примену у инжењерско-техничким прорачунима (сл. 5).



Слика 5. Структура аликације „Математика и 3 кугле сладоледа”

Апликација је креирана са намером да буде *user-friendly*. Њен *interface* је приказан на сл.6. За *брзо учење* у програму је дефинисана огледна функција која се активира опцијом *Demo funkcija* које се налази при врху екрана. Функција има облик (23)

$$y = f(x) = \left|\sin(2 \cdot x) - 0.9\right| - 3 \qquad (23)$$

Слика 6. *Interface* апликације

Након активирања *DEMO funkcije*, програм поставља унапред дефинисане вредности *Граница интервала* у којима се приказује и испитује

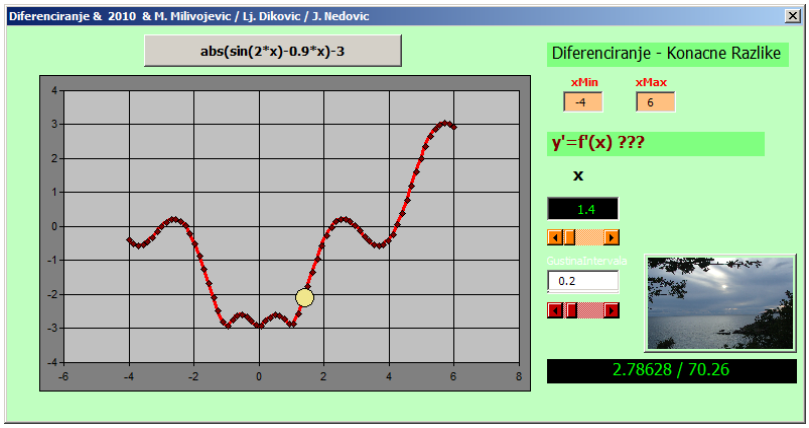
функција, *Броја тачака* за „оквирно" исцртавање функције као и задате *Тачности* за одређивање нула функције. Поред наведене функције корисник може задати произвољну функцију, и поставити параметре по жељи, поштујући уобичајену математичку нотацију при „исписивању функције у *text box*-у за унос једначине функције.

Горњи десни део екрана намењен је за испитивање Дефиниционог Домена (ДД) и одређивање „парности" функције. Област дефинисаности и испитивање парности се реализује за задати интервал. Такође, како је реч о нумеричким методама за испитивање ових својстава функција, може се задавати „финоћа" претрага. Програм аутоматизовано „испитује област" и дефинише могуће или стварне вертикалне асимптоте, за тачке прекида и генерише поруке о карактеристичним вредонстима и тачкама недефинисаних зона. Поред наведеног, апликација „нумерички испитује" особину парности/непарности функције. У циљу сагледавања генералног изгледа функције, помоћу командног дугмета *Grafik*, апликација на дијаграму доле десно, даје приказ задате функције. Могући прекиди, области недефинисаности или различите форме *run-time* грешака *software*-ски су предупређене.

Командно дугме *Metod Secice*, активира модул који одређује нуле функције са задатом тачношћу. Разрађена је и коришћена итеративна метода, метода сечице. Остале итеративне методе су планиране за даљи развој апликације и испитивања брзине конвергенције. Прве три нуле (уколико функција има више нула) исписују се на командним дугмадима на средини екрана. Такође, све нуле (без обзира на број се записују у *spreadsheet*-у горе десно са основним параметрима функције. Детаљнији приказ нула са анимацијама креира се у дијаграму доле лево.

Нумеричко диференцирање реализовано је Њутновим интерполационом полиномом по концепту *Коначних Разлика*. Програмски је решен део за одређивање првог извода (*y'*). Остали елементи (други извод, екстреми, превојне тачке...) планирани су за будући развој.

Interface форме која се добија активирањем обрачуна првог извода дат је на сл. 7.

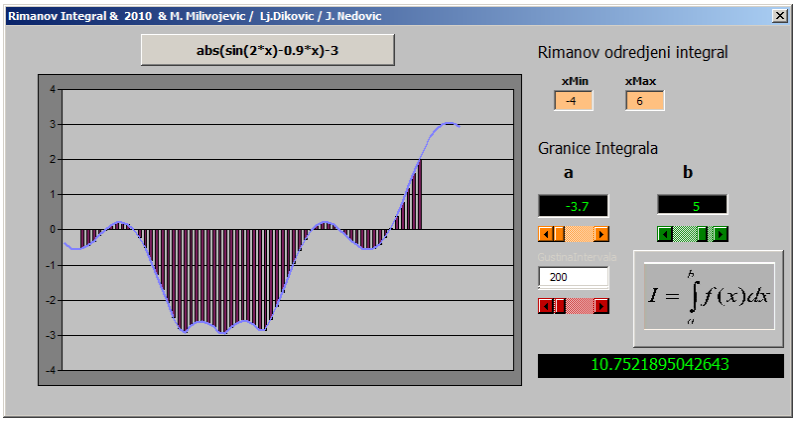


Слика 7. Дијалошки оквир за одређивање првог извода уз анимацију

Програм одређује вредност првог извода *y'=f'(x)* за задату тачку, односно апцису ***x***. Вредност за ***x*** се задаје помоћу *SrollBar*-а или се уноси у *TextBox* испод лабеле *X*. Програм приказује приближну позицију тачке у облику жутог круга због визуелизације и за задату густину интервала Њутновог интерполационог полинома, помоћу *Коначних Разлика* израчунава вредност првог извода. Вредности првог извода *y'=f'(x)*, за задату тачку као и одговарајући угао нагиба тангенте у задатој тачки, приказане су доле десно. Програм у реалном времену омогућује обрачун првог извода *y'=f'(x)* дуж задате функције уз занимљиву анимацију.

Овај модул је намењен за праћење брзине промена неке варијабле.

Нумеричка интеграција је разрађена за методу одређивања Римановог одређеног интеграла по *методи трапеза*. Остале методе: *Метода правоугаоника* и *Симпсонова метода* планиране су за будући развој. *Software*-ски модул који обухвата ову област приказан је на сл. 8.



Слика 8. Форма за одређивање Римановог интеграла

Функција за коју се рачуна Одређени интеграл (24) је приказан на командном дугмету у горњој зони екрана.

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (24)$$

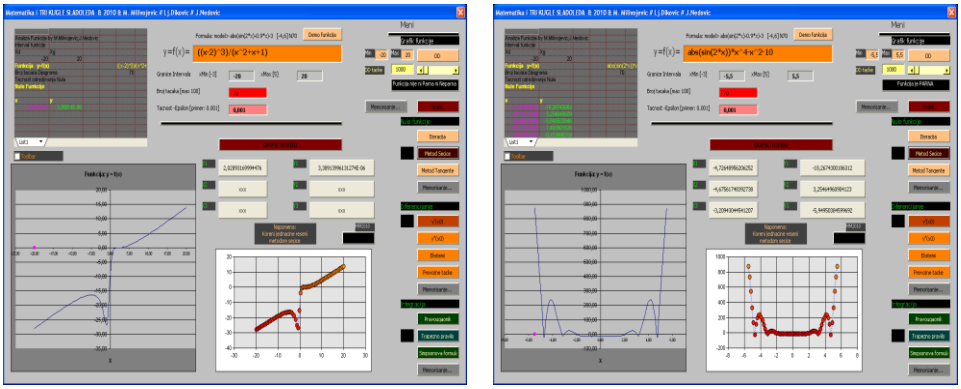
Задавањем граница интеграла (доње границе-*a*; или горње границе-*b*) помоћу *ScrollBar*-ова, у реалном времену се обрачунава вредност интеграла уз визуелизацију на дијаграму у средини форме. Такође, може се подесити тачност интеграције помоћу подешавања *ГустинеИнтервала*.

У даљем тексту се наводе одабрани карактеристични примери функција са циљем упознавање могућности разрађене апликације.

Примери испитивања тока једне разломљене (25) и једне парне функције (26) дати су на сл.9.

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x^2+x+1)}, \text{ на интервалу [-20,20]} \qquad (25)$$

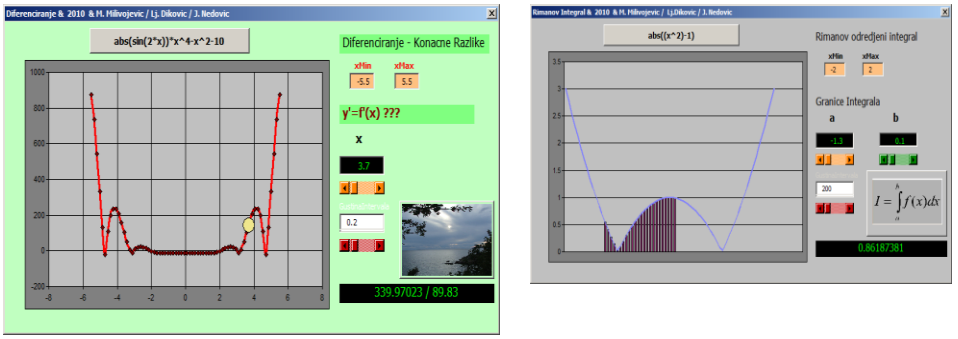
$$f(x) = \left|\sin(2\cdot x)\right| \cdot x^4 - x^2 - 10, \text{ на интервалу [-5.5,5.5]} \qquad (26)$$



Слика 9. Графици и корени огледних функција

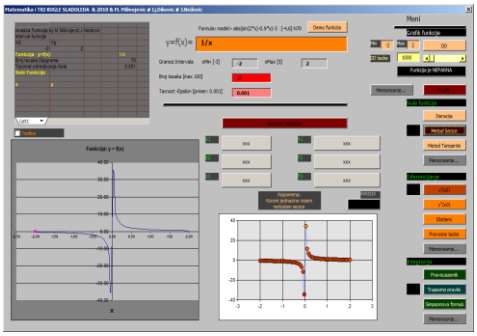
Примери одређивања првог извода и израчунавања интеграла за две огледне парне функције (26) и (27) дати су на сл. 10.

$$f(x) = \left|x^2 - 1\right|, \text{ на интервалу [-1.3,0.1]} \qquad (27)$$

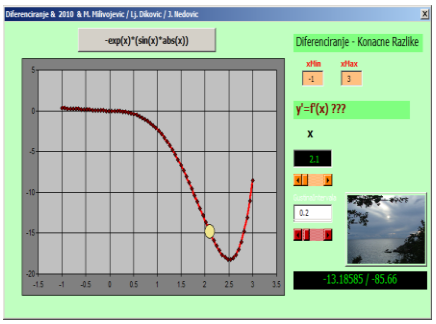


Слика 10. Први извод и одређени интеграл за задате парне функције

Пример испитавања графика функције са вертикалном асимптотом (равностранa хипербола, $f(x)=\frac{1}{x}$) и тока комплексне функције $f(x)=-e^{x}\cdot\sin x\cdot|x|$ дат је на сл. 11 и сл. 12, респективно.



Слика 11. Равностранa хипербола



Слика 12. Први извод комплексне функције

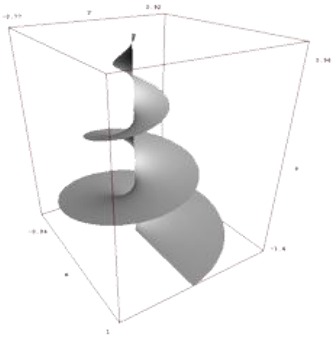
4. *FOSS software*

Постоји велики број математичких пакета опште намене који се могу преузети са Интернета, јер припадају класи FOSS (*Free Open Source Software*) програмских алата. Наводе се кратки прикази два одабрана математичка програма: *Euler* и *GeoGebra* [5].

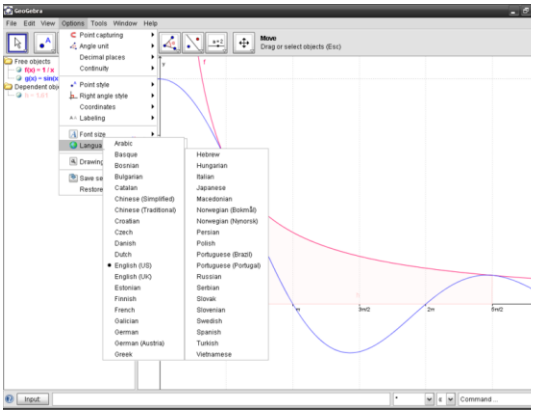
Euler је бесплатан и *open-source* нумерички програмски пакет који је дизајниран за виши ниво математике, као што су нумеричке методе, оптимизација и статистика. Овај програм може да ради са реалним и комплексним бројевима, векторима и матрицама и може да генерише 2D/3D приказе дијаграма.

GeoGebra је динамичан математички софтвер за школе који спаја геометрију, алгебру и рачун. Може оперисати са тачкама, векторима, сегментима, линијским и коничним пресецима, варијаблама....бројевима. Овај програм уз визуелизацију решава питање нумеричких интеграција и диференцијација. Такође, може се користити за визуелизацију доказа геометријских теорема. На сл. 13. и сл 14., дати су прикази 3D дијаграма (*Euler*) и изгледа радног окружења *GeoGebra* софтвера.

„Домаћи" софтвер приказан у раду проткан је сличним идејама.



Слика 13.
Приказ дијаграма / *Euler*



Слика 13.
Приказ екрана / *GeoGebra*

5. *Даљи развој*

Будући развој софтвера биће усмерен на отклањање уочених недостатака и продор у друге области математике (матрице, системи једначина, вишедимензиони проблеми, вероватноћа и статистика...). Такође, планирана је миграција на потпуно објектно орјентисано програмирање и усмерење ка *cloud computing*-у. Другим речима, план је да апликација буде постављена на *web*-у са могућностима интерактивне употребе.

Литература

Симоновић 1987: В.Симоновић, *Нумеричке методе*, Београд, Машински факултет

Хансен 2005: S. Hansen, *Excel 2003-programiranje u VBA-bez tajni*, KomBib, Чачак

Диковић и др 2010: Љ. Диковић, Н.Ивковић, М. Миливојевић, *Visualizing and understanding limits via Internet technologies*, ВПТШ Ужице, SED конференција, 2010

www.geogebra.com

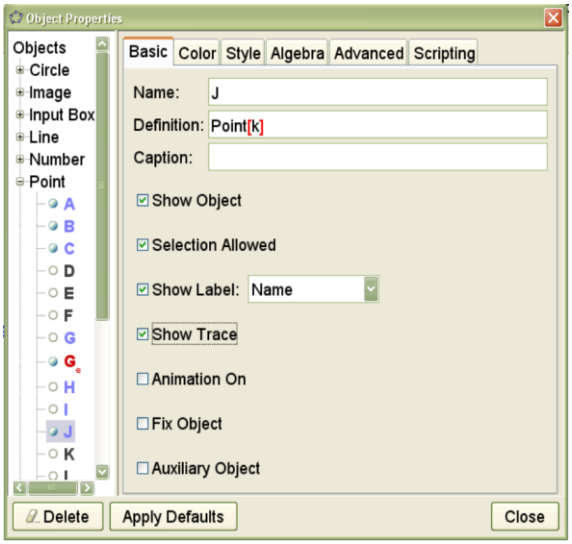
www.eumat.sourceforge.net

Милан В. Живановић*
Висока школа струковних студија за образовање васпитача
Крушевац

Прегледни рад

ГЕОГЕБРА И ГЕОМЕТРИЈСКА МЕСТА ЗНАЧАЈНИХ ТАЧАКА ТРОУГЛА

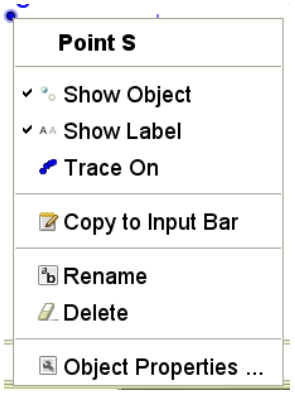
Задаци одређивања геометријског места тачака у равни које задовољавају неке задате услове спадају међу теже проблеме у настави геометрије у основној и средњој школи. Апликативни програми за динамичку геометрију су доста олакшали решавање ових задатака. Један такав, у новије време све популарнији, програм је GeoGebra. Значајно је да је програм преведен и на наш језик те се може лакше научити и користити. У овом тексту ћемо применом функције Trace on (Укључи траг), овог програма за тачке, предочити могућности решавања неких задатака о геометријским местима значајних тачака троугла. За дату тачку функцију Trace on најчешће укључујемо на следећа два начина. Прво двоструким кликом на жељену тачку отвара се мени за њено редефинисање. У левом доњем углу менија изаберемо опцију Object properties. Отвориће нам се мени који на левој страни има списак свих објеката са слике и 6 језичака подменија за одређивање додатних особина објеката. Изаберемо први од тих језичака, Basic и у његовом падајућем менију чекирамо команду Show trace (слика 1).



Слика 1.

* mzivanovic@vaspks.edu.rs

Исти ефекат можемо добити кликом десним тастером миша на одабрану тачку. Отвара нам се падајући мени у којем такође можемо чекирати опцију Trace on (слика 2), после чега ће изабрана тачка остављати траг при свом кретању на радној површини.



Слика 2.

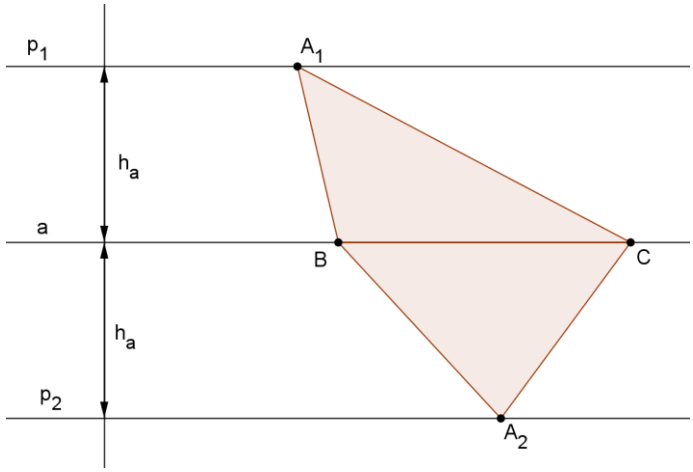
Укључивањем опције Trace on за неку значајну тачку троугла када су два темена троугла фиксирана, а треће покретно, добићемо путању посматране значајне тачке троугла у функцији положаја покретног темена троугла. На тај начин у самој анализи проблема добијамо визуелно решење (идеју) шта би тражено геометријско место тачака могло да буде. Преостаје аналитички део решавања проблема, одређивања једначине, или система једначина, или неједначина које задовољавају захтеване услове. У овом тексту ћемо се ограничити само на слику траженог геометријског места тачака, без одређивања њихових једначина.

Погледајмо конкретне примере:

Пример 1. Одредити геометријска места основних[1] значајних тачака троугла ABC, ако су фиксирана његова темена B и C и чија је висина из темена A једнака датој дужи h_a.

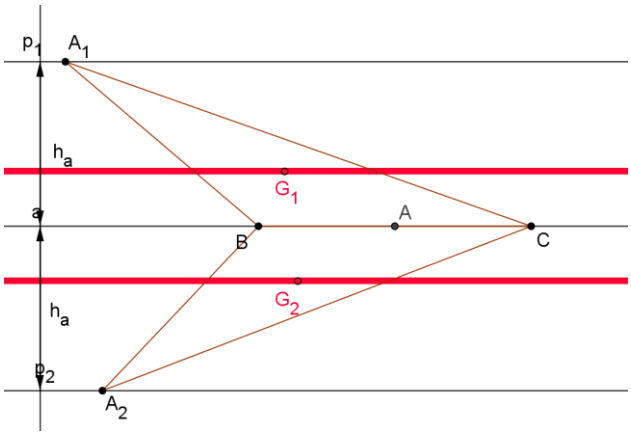
Решење: У програму GeoGebra изаберимо две фиксиране тачке B и C. Кроз њих поставимо праву a. Са обе стране праве a конструишимо праве p_1 и p_2 чије је растојање од праве a једнако датој дужи h_a. Ове праве представљају геометријска места трећег темена A троугла ABC. Уочимо два таква положаја троугла као на слици 3.

[1] Под основним значајним тачкама троугла подразумевамо: тежиште, центар уписане кружнице, центар описане кружнице и ортоцентар.



Слика 3.

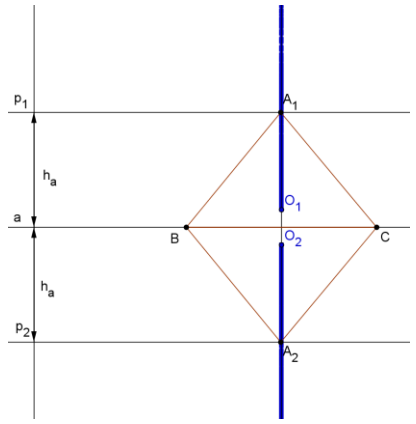
Одредимо тежишта G_1 и G_2 та два троугла и за тежишне дужи и средишта страница троугла искључимо опцију Show Object, а за троуглове A_1BC и A_2BC у менију Object Properties у картици Style опцију Opacity свести на 0 ради боље прегледности. Тачкама G_1 и G_2 променити боју (рецимо у црвену) и укључити им опцију Trace on. Изабрати тачке A_1 и A_2 и са притиснутим левим тастером миша шетати их по правама p_1 и p_2. Тачке G_1 и G_2 ће оставити траг своје путање који представља тражено геометријско место тежишта (слика 4).



Слика 4.

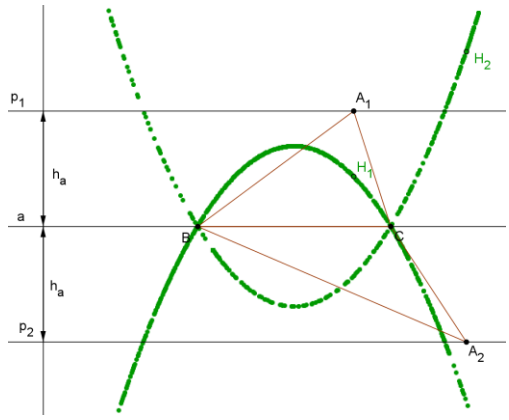
На слици 5 се види да је геометријско место центара описаног круга троугла ABC под задатим условима једнако унији две полуправе са

почецима у O_1 и O_2 где су ове тачке гранични случајеви центара описаних кружница троугла, у случају једнакокраког троугла.

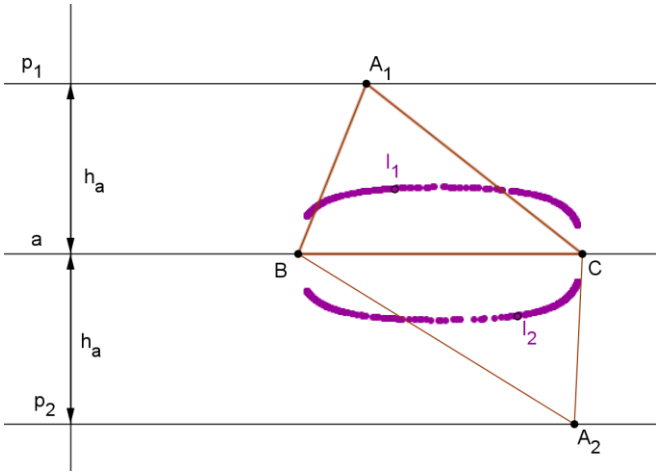


Слика 5.

На аналоган начин се добија да је геометријско место ортоцентара истих троуглова представљено са две параболе које се секу у фиксираним теменима B и C троугла ABC (слика 6).



Слика 6.

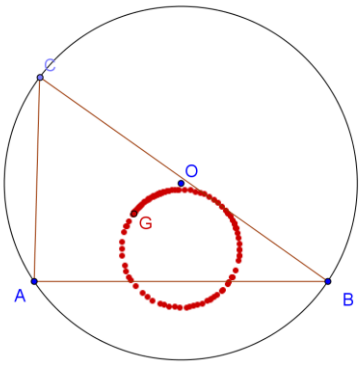


Слика 7.

На слици 7 је геометријско место центара уписаних кружнице задатог скупа троуглова.

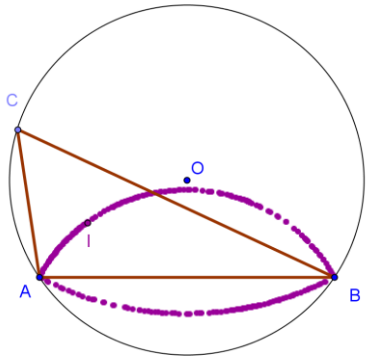
Пример 2. Одредити геометријска места значајних тачака троугла којем су фиксирана темена B и C и центар описане кружнице O.

Решење: Кретањем темена C по описаном кругу задатог троугла, тежиште G ће описати црвену кружницу као на слици 8.



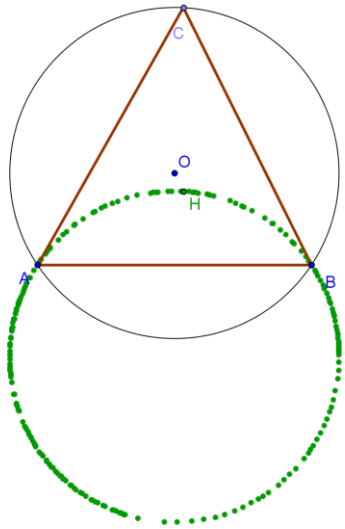
Слика 8.

Геометријско место центара уписаних кружница I у троугао ABC када су фиксирана темена A и B и центар описане кружнице O је унија два лука као на слици 9.



Слика 9.

Тачкасти круг на слици 10. је геометријско место ортоцентара H троуглова ABC при постављеним условима задатка.



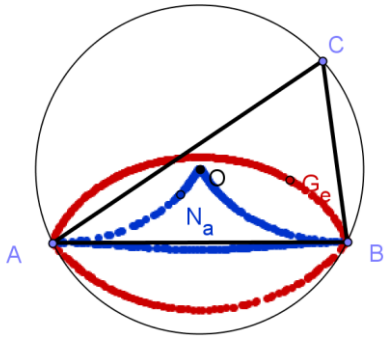
Слика 10.

Пример 3. У троуглу ABC фиксирана је страница AB и полупречник описане кружнице R. Одредити геометријска места Жергонове[2] и Нагелове[3] тачке кад се теме C креће по описаној кружници.

[2] Дужи одређене теменима и тачкама у којим уписани круг додирује наспрамне странице троугла секу се у једној заједничкој тачки коју зовемо Жергонова тачка.

[3] Дужи одређене теменима и тачкама у којим споља приписани кругови додирује наспрамне странице троугла секу се у једној заједничкој тачки коју зовемо Жергонова тачка.

Решење: На слици 11 црвена линија представља скуп тачака које описује Жергонова (G_e), а плава је геометријско место Нагелових (N_a) тачака троугла ABC при кретању темена C по описаној кружници.



Слика 11.

Изузетно плодан стваралачки рад у области геометрије троугла оставио је и наш прерано преминули математичар, професор Милорад Р. Стевановић. Тако је на сајту WolframMathWorld представљен Стевановићев круг,[4] карактеристичан по томе што је ортогоналан на девет других кругова троугла: Аполонијев, Беванов, описани, радикални круг приписаних кругова, круг девет тачака, ортоцентроидални, ортоптик круг Штајнерове уписане елипсе, поларни и тангенцијални (Стевановић 2011). Поред тога енциклопедију значајних тачака троугла професор Стевановић је обогатио са 12 тачака од којих се оне под редним бројевима 3020–3026 налазе на уписаном кругу троугла.

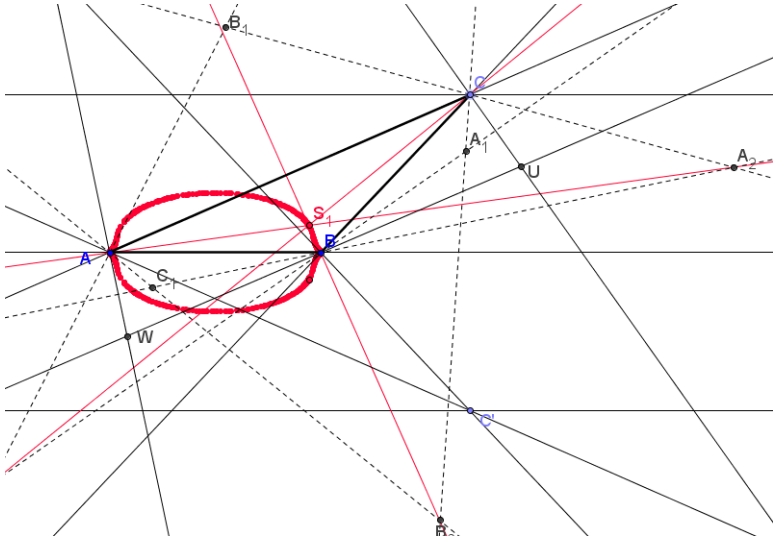
Прва Стевановићева тачка у енциклопедији центара троугла заведена је под редним бројем 1130. Конструишемо је на следећи начин: Нека је U центар споља приписаног троугла наспрам темена A. Са A_1 обележимо центар кружнице уписане у троугао BCU. На аналоган начин одредимо тачке B_1 и C_1. Пресечну тачку правих BC_1 и CB_1 обележимо са A_2. Такође нека је $AC_1 \cap CA_1 = B_2$ и $AB_1 \cap BA_1 = C_2$. Праве AA_2, BB_2 и CC_2 се секу у Стевановићевој првој тачки S_1.

Пример 4. Под условима првог примера, одредити геометријско место положаја Стевановићеве прве тачке троугла ABC.

Решење: Напоменимо још да је конструкција фигура у равни пакетом GeoGebra олакшана директним командама за конструкцију средишта дужи, симетрала страница и углова, конструкције нормале и

[4] <http://mathworld.wolfram.com/StevanovicCircle.html>

паралеле из дате тачке на дату праву, осно симетричних објекат итд. Дакле, за задати троугао ABC конструишимо S_1 прву Стевановићеву тачку на претходно описан начин. Изборимо функцију Trace on за тачку S_1 и њену осносиметричну слику у односу на праву AB. Покретањем темена C тачка S_1 и њена поменута осносиметрична слика оставиће траг који представља тражено геометријско место тачака (слика 12).



Слика 12.

Неке од примера примена и упутства за коришћење GeoGebre могу се погледати и на WEB страницама на адресама:
<http://infoteh.etf.unssa.rs.ba/zbornik/2011/radovi/E-V/E-V-7.pdf>,
<https://sites.google.com/site/pitagorac/geogebra> и
<http://www.geogebra.org/help/docusr.pdf>.

Литература

Стевановић 2011: М. Стевановић, *Геометрија троугла*, Београд, Пале, Филозофски факултет Пале, Висока техничка школа Нови Београд

Kimberling's, Clark. *Encyclopedia of Triangle Centres – ETC* <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> 30. 1. 2012.

Интернет извори

<http://infoteh.etf.unssa.rs. ba/zbornik/2011/radovi/E-V/E-V-7.pdf>;
<https://sites.google.com/site/pitagorac/geogebra>;
<http://www.geogebra.org/help/docusr.pdf>.

Љубица Ж. Диковић[*]
Висока пословно-техничка школа струковних студија
Ужице
Прегледни рад

ИНТЕРАКТИВНИ ЈАВА АПЛЕТИ У ФУНКЦИЈИ ИНТЕГРАЦИЈЕ

1. *Примена технологије у настави математике*

Уважавање когнитивних стилова и стилова учења обезбеђује индивидуализацију процеса учења, што и јесте тенденција савременог образовања. Једино такво учење ће имати успеха и решавати проблеме школског неуспеха, пре свега у настави математике. Када наставници уважавају когнитивне стилове и стилове учења својих ученика, ученици постижу боље резултате у учењу, мотивисани су у раду, у процесу учења користе своје јаче стране и развијају се у складу са својим потенцијалима (Хусарић 2011).

Информационо-комуникационе технологије и *Компутерски подржана настава* су постале важан део свакодневног живота и широко се користе да унапреде технике подучавања и учења. Циљ употребе технологије јесте да обезбеди окружење за активно истраживање математичких структура путем вишеструких репрезентација, или да покаже студентима неке аспекте математике који нису могући употребом оловке и папира. Многи наставници ће се сложити са тим да после ручно развијених техника израчунавања, употреба машинске аритметике може бити веома пожељна и корисна (Диковић, 2007).

Истраживања указују да упркос бројним погодностима о употреби технологије у математици, процес примене технологије у разредима је спор и веома комплексан, као и да употреба информационо-комуникационих технологија у разреду зависи од сваког наставника појединачно (Hohenwarter, Lavicza 2007).

У документу НЦТМ (2000), такође стоји: „Ефективна употреба технологије у математичким учионицама зависи од наставника. Као и свако друго наставно средство и ово може бити искоришћено потпуно, или слабо. Наставници би требало да користе технологију у одабиру или креирању математичких активности које се ефикасно могу извршити уз помоћ технологије – графика, визуелизација и израчунавања, како би се повећале могућности студената“ (п. 25).

При решавању проблема и креирању концепата, студенти имају велику предност, јер имају нумерички, графички и симболички приступ ситуацијама (Wurnig 2008).

[*] ljubica.dikovic@vpts.edu.rs

Концепти диференцирања и интеграције су фундаментални за разумевање многих математичких веза са осталим природним и друштвеним наукама. За потпуно разумевање тих математичких концепата, неопходно је да студенти стекну обострано искуство: као пасивни посматрачи наставниковог рада, али и кроз сопствени, активни рад са вишеструким и међусобно повезаним репрезентацијама (вербалне, симболичке, нумеричке и графичке) тих концепата (Blubaugh 2004).

У сваком случају, одговарајући инструкциони алат мора бити одабран и коришћен на такав начин, да технологија не представља препреку између студента и концепта на који се односи.

Већина истраживања из области примене технологије у настави показује да студенти који користе технологију у своме учењу постижу боље излазне резултате у односу на студенте који у свом учењу не користе технологију (Waxman, Connell, Gray 2002).

Једна од главних препрека у разумевању наставе интегралног и диференцијалног рачуна је велики опсег сложених, апстрактних математичких појмова и динамичких концепата, који се углавном нису изучавали у претходном школовању. Затим, у настави високошколске математике још увек доминирају традиционалне методе рада.

2. *Нумеричка апроксимација површине*

Питања која се посебно наглашавају у настави интегралног рачуна су: Шта је примитивна функција? Шта је неодређени интеграл? Шта је одређени интеграл? Како се израчунава површина равног лика? Израчунати површину фигуре у равни, ограничену графицима више функција. Израчунати запремину ротационог тела које настаје ротацијом фигуре Ф око осе Ох. Израчунати дужину лука криве. Чему служи нумеричка апроксимација одређеног интеграла?

Посебно се истиче да је резултат решавања неодређеног интеграла класа функција, док је резултат решавања одређеног интеграла број, као и да се нумеричке методе примењују само за израчунавање одређених интеграла.

У већини случајева, примена основне теореме интегралног рачуна не може довести до резултата. Некада је поступак проналажења примитивних функција веома компликован или немогућ. Често се јавља и ситуација када није познат аналитички облик подинтегралне функције, већ су задате њене вредности у коначно много тачака посматраног интервала интеграције.

Основни задатак нумеричке интеграције јесте приближно израчунавање вредности одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ из вредности подинтегралне функције датих табелом уређених парова

$(x_i, f(x_i)), i = 0,1,\ldots n$, при чему се претпоставља да је $a \le x_0$, $x_n \le b$ Велики број квадратурних формула се базира на апроксимацији подинтегралне функције интерполационим полиномом $f(x) \approx P_m(x), m \le n$, кога је лако интегралити $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx$. Основна идеја нумеричке интеграције је израчунавање интеграла коришћењем вредности функције на неком коначном скупу тачака $(x_i, f(x_i)), i = 0,1,\ldots n$. Овакве формуле за приближну интеграцију функција једне промењиве често се зову и квадратурне формуле због интерпретације интеграла као површине испод криве.

Да би ублажили тешкоће у разумевању наставе диференцијалног и интегралног рачуна, наставници често упадају у замку, стављајући акценат на серију рутинских правила које студенти треба да усвоје, што нажалост не доприноси суштинском, концептуалном разумевању материје.

Дешава се да неки студенти солидно овладају скупом рутинских правила, да успешно решавају чак и сложене изводе/интеграле, а да при том уопште не разумеју суштину процеса диференцирања/интеграњења, њихову динамичност и примену.[1]

У циљу бољег концептуалног разумевања правила која служе за нумеричку апроксимацију површине, у следећим деловима рада се демонстрира употреба Јава аплета. Избор таквих алата за представљање тих процеса је погодан за ову наставну јединицу, јер на интерактиван, визуелан и анимиран начин симулира саму суштину ових динамичних и активних процеса.

3. *Јава аплети у функцији римановских сума*

Најједноставнији начин нумеричке апроксимације одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ јесте преко Риманових сума. Употребом Јава аплета студент ће јасно сагледати начин конструкције Риманових сума и њихову геометријску интерпретацију. За непрекидну функцију $f(x)$ на интервалу $a \le x \le b$, дељењем интервала $[a,b]$ на n мањих интервала ширине $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, при чему су крајње тачке свих интервала $x_0 = a,\ x_n = b,\ x_i = a + i\Delta x,\ i = 1, n-1$, лева (LRS) и десна Риманова сума (RRS) се дефинишу као

[1] <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/simpson.4/index.html>

$$LRS = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x = \Delta x\left[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

$$RRS = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \Delta x\left[f(x_n) + f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1)\right].$$

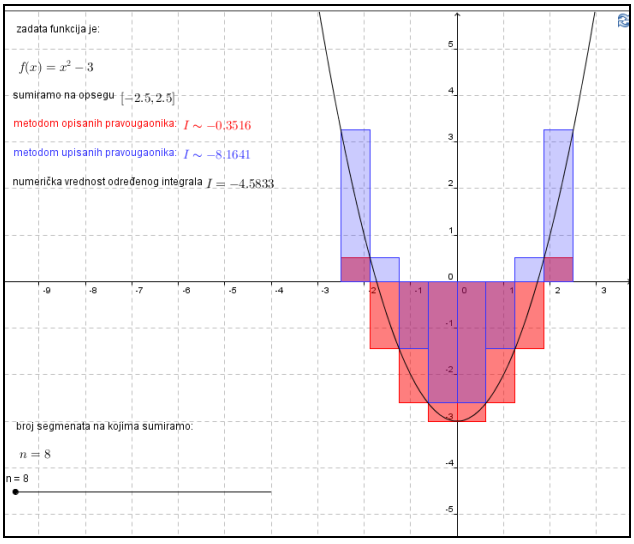
Односно функција је интеграбилна ако и смао ако постоји заједничка гранична вредност Риманових сума :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n->\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right) = \lim_{n->\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right).$$

Како би израчунавање сума за велику вредност подеока n, било немогуће израчунати ручно, управо у овом случају се препоручује употреба рачунара.

Циљ аплета је да демонстрирају на који начин Риманове суме апроксимирају вредност одређеног интеграла. Аплети су дизајнирани за визуелно истраживање Риманових сума и помажу развијању витуелне интуиције овог математичког концепта. При томе су могућности рачунара на пољу експериментисања заиста фасцинантне. Студент лако визуелно уочава да како се број правоугаоника који *исцрпљују* површину повећава, апроксимација се побољшава.

Уобичајено, аплети дозвољавају да корисник произвољно задаје функцију, почетну и крајњу тачку интервала, као и број подеока (слика бр. 1).[2]

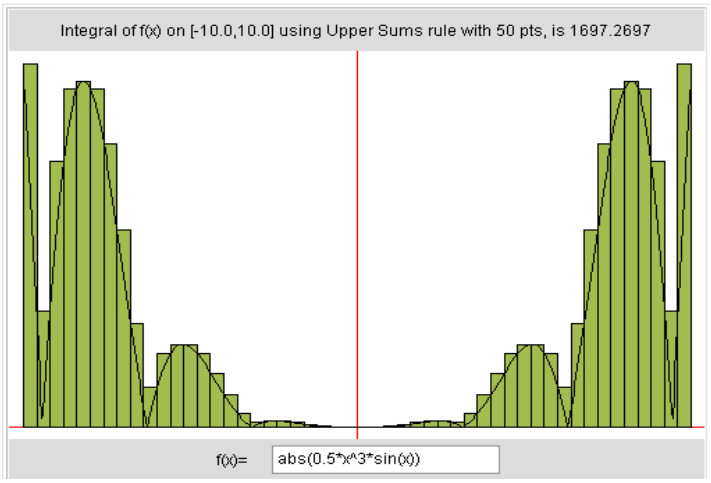


Слика 1

[2] <http://symbolicalgebra.etf.rs/GG_integrali/rimanove_sume.html>

Такође, могу се користити ресурси на адресама:
<http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc2/Riemann.html>,
<www.calculusapplets.com/riemann.html>,
<www.intmath.com/Integration/Riemann-sums.php>,
<http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc2/Riemann.html>.

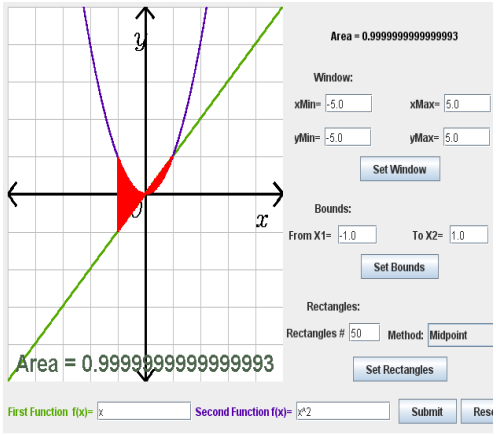
Поједини интерактивни аплети омогућавају истраживање и израчунавање веома комплексних кривих, као на пример израчунавање $\int_{-10}^{10} \left|0.5x^3 \sin(x)\right| dx$ (слика 2).[3]



Слика 2

У случају израчунавања површине између две криве, некада је тешко, или чак немогуће прецизно доћи до пресечних тачака. Тада би било препоручљиво користити или графички калкулатор, или неки други алат, ради добијања пресечних тачака, а затим наставити процедуром апроксимирања или израчунавања тражене површине (слика 3).[4]

[3] <www.math.tamu.edu/AppliedCalc/Classes/Riemann/index.html>
[4] <http://curvebank.calstatela.edu/areabetcur/areabetcur.htm>



Слика 3

4. *Интерактивни приступ трапезном и Симпсоновом правилу*

Трапезно правило за нумеричку интеграцију омогућава апроксимирање тражене површине сумом елементарних површина појединих трапеза, односно $T_n = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{j=1}^{n-1} y_j + y_n \right)$.

Корисно би било на примеру који је ручно урађен, рецимо $\int_0^9 (x^3+3)dx$, за $n=5$, све то визуелно истражити помоћу интерактивног аплета.

У овом случају, добијамо

$$n=5, \quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{9}{5}$$

$$y_0 = f(0) = 3,\ y_1 = f(h) = 8.832,\ y_2 = f(2h) = f(\frac{18}{5}) = 49.656,\ y_3 = f(3h) = 160.464,$$

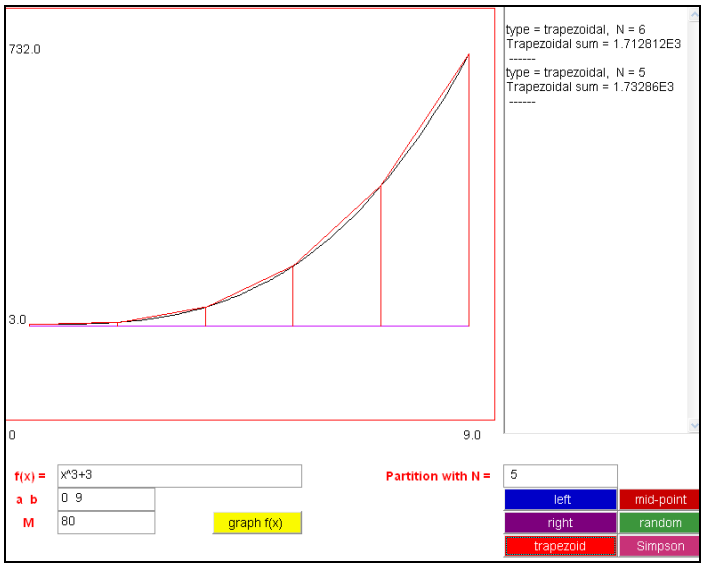
$$y_4 = f(4h) = 376.248,\ y_5 = f(9) = 732,$$

па је апроксимативна вредност суме трапеза

$$T_5 = \frac{9}{10}[3+732+2(8.832+49.656+160.464+376.248)] = 1732.86.$$

Израчунавањем тачне вредности интеграла применом Њутн-Лајбницове формуле добијамо $\int_0^9 (x^3+3)dx = \frac{x^4}{4}+3x\Big|_0^9 = 1667.25$, па је

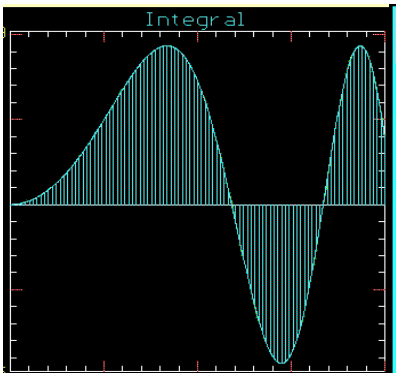
добијена разлика $1732.86 - 1667.25 = 65.61,$ и проценат грешке $\frac{65.61}{1667.25} = 3.935\%$ (слика 4).[5]



Слика 4

У Симпсоновом правилу се користе параболе (квадратна апроксимација, уместо линеарне) за апроксимацију сваког дела криве, при чему број тачака подеока мора бити паран, $I_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 2(y_2 + y_4 + \ldots y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots y_{n-1}) + y_n)$. Слика 5[6] се односи на визуелизацију примене Симпсоновог правила на примеру израчунавања $\int_0^3 \sin(x^2)dx$.

[5] <http://mathforum.org/mathtools/cell/c,15.16,ALL,ALL/>
[6] <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/simpson.4/index.html>

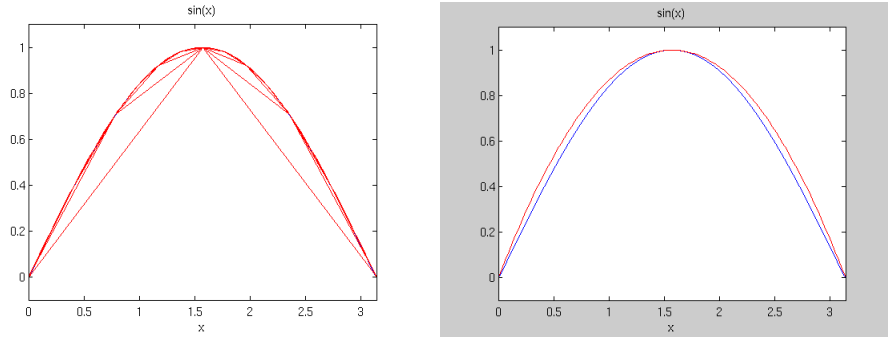


n	Sum of areas of parabolas
4	0.79420139
8	0.77495438
16	0.77364287
32	0.77356744
64	0.77356283
128	0.77356255
256	0.77356253
512	0.77356253
1024	0.77356253

Слика 5.

Затим би било пожељно илустровати упоредно решавање неког познатог проблема, на пример $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2,$ користећи најпре трапезно, а потом Симпсоново правило.

Користећи трапезно правило добиће се, за на пример $n = 64, I \approx 1.9995983886, n = 128, I \approx 1.9998996002$, док користећи Симпсоново правило за исти број подеока, добија се боља апроксимација $n = 64, I \approx 2.0000000645, n = 128, I \approx 2.0000000040$ (слика 6) (Диковић, Банковић 2009). У овом случају, Симсоново правило је бољи избор методе јер се генерално базира на апроксимацији криве луковима парабола. Наравно, да би у случајевима линеарних функција, изломљених кривих, примена Трапезног правила дала боље резултате.



Слика 6.

На крају, студенти треба да уоче разлику да је код правоугаоног правила функција апроксимирана константом на једном подинтервалу поделе, код трапезног правила је апроксимација вршена линеарном

функцијом, а код Симпсоновог правила се подразумева интерполација полиномом другог степена.

Такође, савремени наставни трендови треба да утичу, кад год је то могуће, на смањење времена утрошеног на манипулативни приступ, уз могућност брзог генерисања визуелног решења.

С обзиром на високу апстрактност наведене материје, постоји потреба за изналажењем нових методологија рада, користећи савремене и квалитетно примењене могућности технологије. У претходно наведеним примерима потенцира се на комбинованом приступу проблему: традиционалном и помоћу технологије.

5. *Закључак*

Показано је да за неке теме интегралног рачуна наставници могу релативно лако интегрисати расположива технолошка решења у редовну наставу, чиме студентима пружају више могућности за сопствено истраживање и дубље разумевање материје. На тај начин, студенту ће бити доступна вишеструка репрезентација датог концепта: вербално, алгебарски, нумерички и графички.

У овом раду је показано како софтверско окружење може лако и брзо оплеменити и унапредити традиционални приступ методама нумеричке интеграције. Аутори рада сматрају да не треба фаворизовати употребу технолошких ресурса у настави, али да их треба користити кад год доприносе бољем разумевању нарочито сложених математичких концепата.

Погодно софтверско окружење, какво су, на пример, Јава аплети, омогућава наставнику да ефикасно прилагоди одређени наставни садржај и наставне методе појединачним потребама студената. Показано је да такво окружење омогућава да се студентима демонстрира дубље разумевање одређених математичких концепата, које није могуће на традиционални начин. Боља визуелизација одређених математичких концепата додаје нову димензију у настави математике. Сматрамо да би било корисно да наставници математике треба да усаврше своје вештине у примени технологије у настави, да их пренесу студентима и тиме створе могућности за атрактивнију и ефикаснију наставу.

Литература

Blubaugh 2004: Blubaugh, W., 2004: Teaching and Learning Business Calculus Through Technology, *Electronic Proceedings of the Seventeenth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics New Orleans*, Louisiana, ISBN 0-321-43792-6, Paper S052.

Calculus Concepts and Applications, Paul A. Foerster, <http://www.keypress.com/x5224.xml>.

Diković 2007: Lj. Diković, An Interactive Learning and Teaching of Linear Algebra by Web Technologies: Some Examples, *Journal The Teaching of mathematics*, X_2, 109–116, Beograd.

Diković, Banković 2009: Diković, Lj., Banković, D., Vizuelni pristup izvodu funkcije podržan Web tehnologijama, *XVIII Conference on Applied Mathematics*,
Subotica, Serbia.

Hohenwarter, Lavicza 2007: Hohenwarter, M., Lavicza, Z., Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute, in D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the Britmish Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), University of Northampton, UK: BSRLM.

Husaric 2011: Husaric, M., Važnost uvažavanja kognitivnih stilova i stilova učenja kod učenika u procesu poučavanja, *Metodicki obzori 6*, Pula.

NCTM 2000: *Principles and Standards for School Mathematics*, <http://standards.nctm.org>.

Waxman, Connell, Gray: Waxman, H., Connell, M., Gray, J., *A Quantitative Synthesis of Recent Research on the Effects of Teaching and Learning With Technology on Student Outcomes*, NCREL, available on address <www.coe.ufl.edu/Courses/eme5054/Foundations/Articles/waxman.pdf >.

Wurnig 2008: Wurnig O., Some Problem Solving examples of Multiple solutions using cas and dgs, Proceedings of the Discussing Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education, *The 11th International Congress on Mathematical Education*, Mexico.

Vinuesa, Fornos 2007: Vinuesa, T. S., Fornos, R. M., A virtual mathematics learning environment for engineering students, *Interactive Educational Multimedia*, Number 14, 1–18, <www.ub.edu/multimedia/iem>.

Интернет извори

<http://symbolicalgebra.etf.rs/GG_integrali/rimanove_sume.html>;
<http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc2/Riemann.html>;
<www.calculusapplets.com/riemann.html>;
<www.intmath.com/Integration/Riemann-sums.php>;
<http://www.plu.edu/~heathdj/java/calc2/Riemann.html>;
<www.math.tamu.edu/AppliedCalc/Classes/Riemann/index.html>;
<http://curvebank.calstatela.edu/areabetcur/areabetcur.htm>;
<http://mathforum.org/mathtools/cell/c,15.16,ALL,ALL/>;
<http://www.math.psu.edu/dlittle/java/calculus/area.html>;
<http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/simpson.4/index.html>;
<http://www2.math.umd.edu/~jmr/141/SimpsonDemo.html>.

Дарко З. Дракулић[*]
Универзитет у Источном Сарајаву
Филозофски факултет Пале
Катедра за математику и рачунарство

Прегледни рад

ИНВЕРЗИЈА У ПРОГРАМСКОМ АЛАТУ ГЕОГЕБРА

1. *Увод*

Геогебра је интерактивни математички софтверски алат који повезује геометрију, алгебру и анализу а чија је основна намјена употреба у настави математике на свим нивоима образовања. Развој овог софтвера започео је 2001. и до сада је издато неколико званичних верзија, а актуелна је верзија 4, која је објављена 20. септембра 2011. године. У овом раду биће описана инверзија у Геогебри (GeoGebra) која је потпуно имплементирана од верзије 4, а чијој имплементацији је дао допринос и аутор овог рада.

2. *Инверзија*

Инверзија се може дефинисати као инволуциона трансформација која пресликава скуп тачака P у скуп тачака P' у односу на кружницу $K(O, k)$ тако да важи

$$\frac{OP}{k} = \frac{k}{OP'} \tag{7}$$

односно

$$k^2 = OPxOP'^{**} \tag{8}$$

Општа једначина за израчунавање координата (x', y') тачке P' инверзне тачки $P(x, y)$ у односу на кружницу са центром у (x_0, y_0) и полупречником k гласи:

$$x' = x_0 + \frac{k^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{9}$$

$$y' = y_0 + \frac{k^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{10}$$

Директно из дефиниције инверзије могу се одредити објекти у које се инверзно пресликавају основни геометријски објекти (права, дуж, кружни лук, полигон и кружница). У табели 1 дат је приказ основних геометријских објеката и објеката који настају њиховом инверзијом.

---

[*] ddrakulic@gmail.com

[**] Формална дефиниција инверзије може се пронаћи у: Lopandić 1981.

Објекат	*Објекат који се добија инверзијом*
Права	Права или кружница
Дуж	Дуж или кружни лук
Полигон (низ дужи)	Низ дужи или лукова
Кружница	Права или кружница
Кружни лук	Кружни лук или дуж
Конусни пресјек	Алгебарске криве трећег или четвртог степена

Табела 1: Објекти који настају инверзијом основних геометријских објеката

Инверзија се најчешће користи у конструктивним задацима и најилустративнија примјена је у рјешавању 10 Аполонијевих[1] проблема о додиру кругова. Због тога инверзија алгебарских кривих није тако честа у математичкој литератури а њен резултат није тако интуитиван као код осталих објеката.

Нека је дата алгебарска крива произвољног степена у имплицитном облику

$$a_{n0}x^n + a_{n-11}x^n y + \cdots + a_{1n-1}xy^{n-1} + a_{0n}y^n = 0 \qquad (11)$$

Објекат који настаје инверзијом ове алгебарске криве у односу на кружницу са центром у (x_0,y_0) полупречника k добија се када се једначине за израчунавање координата инверзне тачке (3) и (4) уврсте у једначину криве (5). Тада се добија једначина облика

$$b_{n+20}x^{n+2} + a_{0n+2}y^{n+2} + \cdots = 0 \qquad (12)$$

одакле се закључује да се инверзијом алгебарске криве произвољног степена n добија алгебарска крива степена n+2.

Иако инверзија за произвољни објекат није била имплементирана у ранијим верзијама Геогебре, постојала је могућност конструкције инверзне слике за све објекте осим за конусне пресјеке. Имплементација рада са алгебарским кривима произвољног степена у Геогебри 4 отворила могућност имплементације инверзије за све објекте.

3. *Инверзија у Геогебри*

Инверзија у Геогебри, као и већина операција, може се извршити на два начина – бирањем команде *Reflect Object in a Circle*[2] у палети алата или уносом команде reflect[<Object>, <Circle>][3] у командну линију.

[1] Apollonius of Perga (приближно 262. г. п. н. е – 190. г. п. н. е.), грчки математичар и астроном.

[2] У верзији на српском језику *Inverzija u odnosu na kružnicu*.

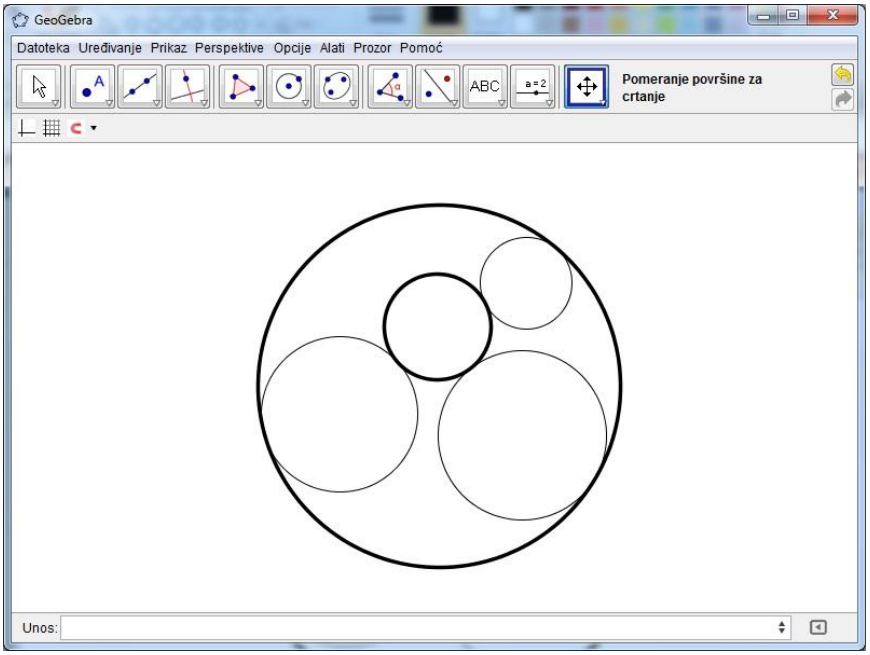
Објекти који се могу инверзно пресликати су:
– тачке,
– дужи,
– праве,
– комплексни бројеви,
– полигони,
– кружнице и дијелови кружнице,
– конусни пресјеци,
– функције једне промјењиве,
– параметарске криве и
– имплицитне (алгебарске) криве двије промјењиве.

Умјесто закључка

Геогебра је први међу софтверским алатима за динамичке геометријске конструкције отвореног кода која омогућава инверзију за произвољне геометријске објекте. Ово отвара могућности примјене поменутог алата у напреднијим конструкцијама, као и истраживањима везаним за геометрију троугла.

На слици 1 приказан је дио Жаргоновог[4] рјешења Аполонијевог проблема три кружнице, конструисаног у алату Геогебра. Насупрот традиционалним методама конструкције, које захтијевају доста времена и труда, ова конструкција је технички лака и брза уз помоћ посљедње верзије Геогебре.

[3] У верзији на српском језику *ogledanje[<Objekat>, <Kruznica>]*.
[4] Joseph Diaz Gergonne (1771–1859), француски математичар.



Слика 1: Жаргоново рјешење Аполонијевог проблема три круга. На слици су приказана два од могућих

Литература

Weisstein a: Eric Weisstein, *Apollonius' Problem*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusProblem.html>, 17. 2. 2011.

Weisstein b: Eric Weisstein: *Inversion*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/Inversion.html>, 17. 2. 2011.

Gisch, Ribando 2004: David Gisch and Jason M. Ribando, *Apollonius' Problem: A Study of Solutions and Their Connections*, American Journal of Undergraduate Research, vol. 3 No. 1 (2004), pages 15–26.

Lopandić 1981: Dragomi

Небојша В. Ивковић*
Висока пословно-техничка школа струковних студија
Ужице
Стручни рад

ИНТЕРПОЛАЦИЈА РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ СА ДВЕ НЕЗАВИСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ ПОМОЋУ ПОЛИНОМИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. *Увод*

За одређивање адекватног облика полиномијалних функција коришћени су вишефакторни планови првог и вишег реда, као и статистичка теорија вишефакторне регресионе анализе. У поступку интерполације коришћени су полиноми четвртог реда. Процедуром математичког моделирања су одређени параметри модела односно коефицијенти полинома. У поступку математичког моделирања, кренуло се од простијег облика полиномијалне функције, а у наредним циклусима, ишло се до сложенијих облике полиномијалих функција вишег реда, све док се није добио адекватан математички модел.

2. *Поступак интерполације задате рационалне функције са две независне промењиве помоћу полиномијалне функције*

Циљ овог рада је био да се рационалних функција

$$z = \frac{20}{(1 + 0.2\,x^2 + 0.5\,y^2)} + \frac{1}{4}\,x\,y^2 + \frac{1}{6}\,x^2\,y^2 \qquad (1)$$

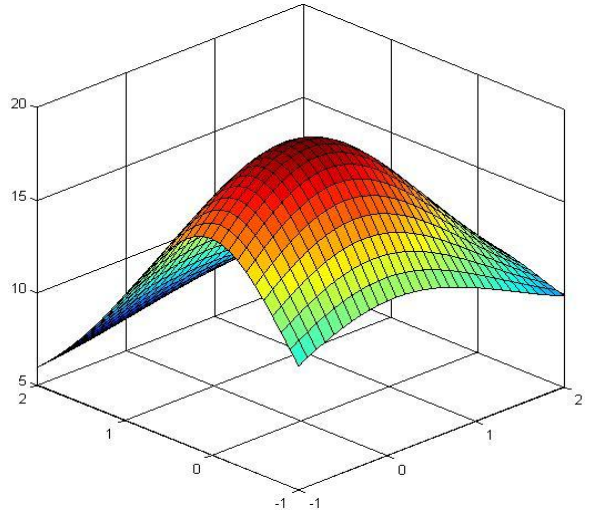
интерполира са полиномијалном функцијом у подручју које је дефинисано интервалом:

$x \in (-1\,,\ 2)$

$y \in (-1,\ 2).$

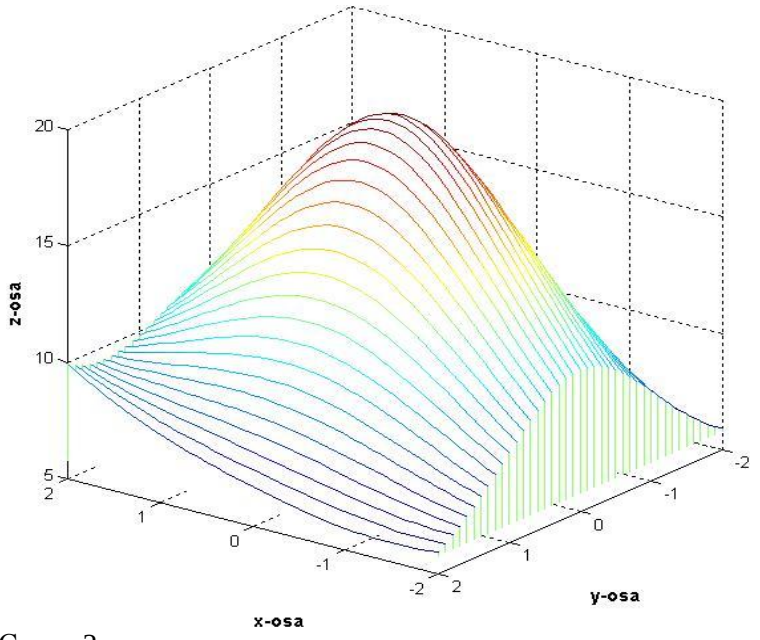
Најпре помоћу програмског алата MATLAB дат је графички приказ у 3D простору рационалне функције z у дефинисаном подручју (сл. 1).

* prof.ivkovic@gmail.com



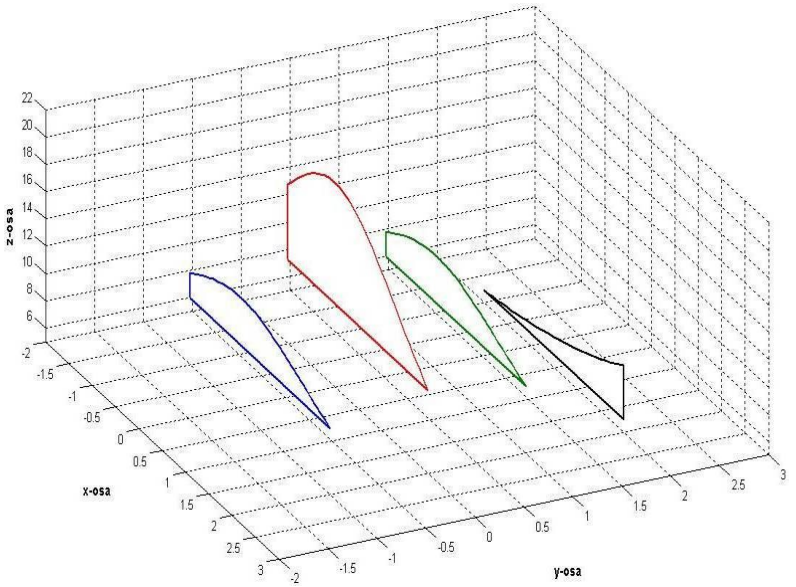
Слика 1.

У даљем поступку, такође коришћењем програмског алата MATLAB, приказан је у 3D простору законитост задате рационалне функције *z* у зависности од променљиве *x* за дискретне вредности **y** на интервалу $y \in (-1, 2)$ са кораком рачунања $\Delta y = 0.1$, (сл. 2).



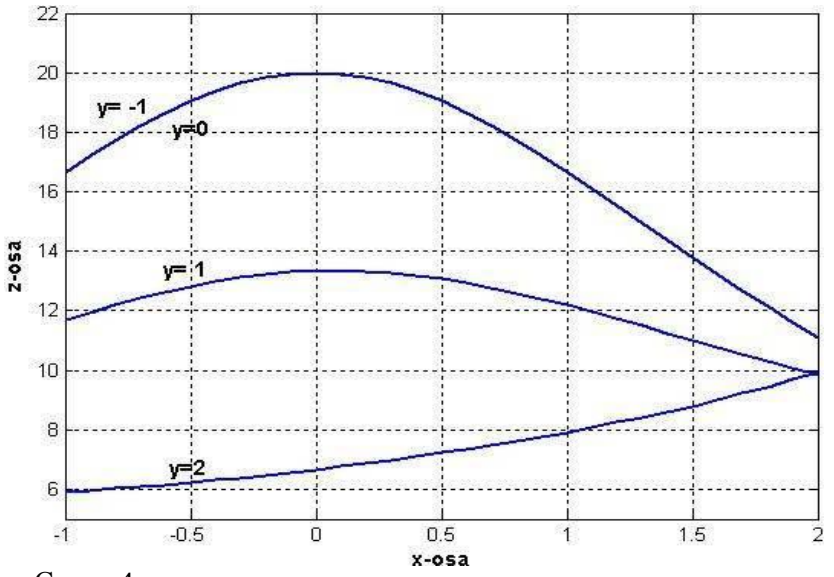
Слика 2.

На сл. 3 приказана је законитост задате функције z у 3D простору у зависности од промењиве x за дискретне вредности $y = \{-1, 0, 1, 2\}$.



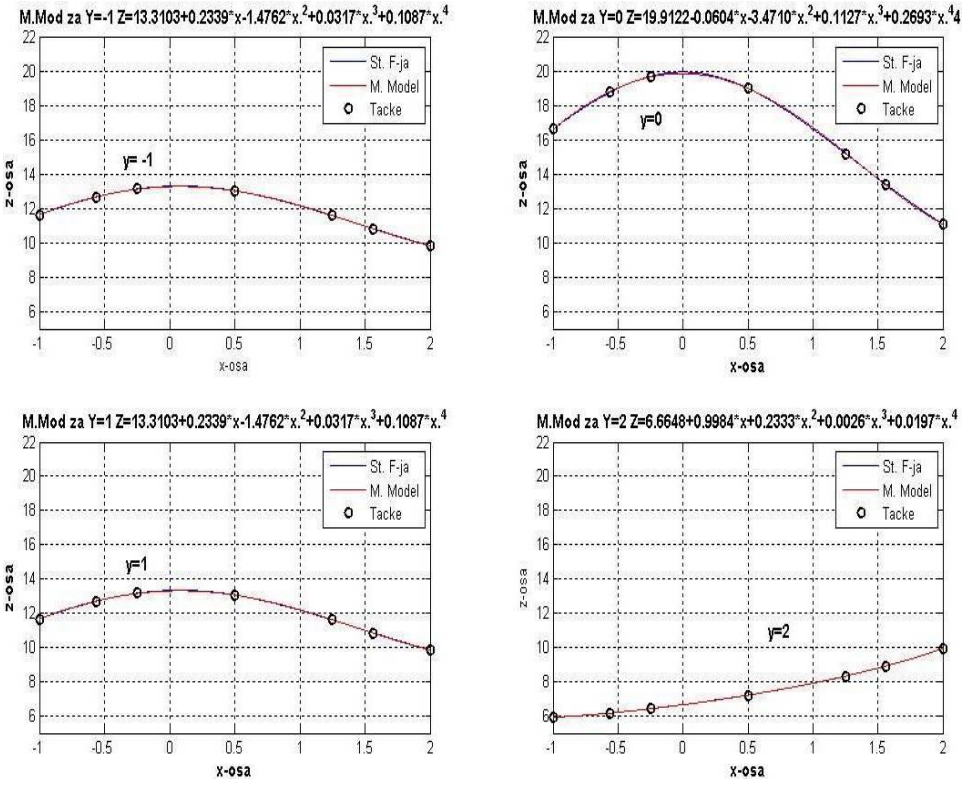
Слика 3.

На сл. 4 приказана је у 2D простору законитост задате функције z у зависности од промењиве x за дискретне вредности $y = \{-1, 0, 1, 2\}$.



Слика 4.

На сл. 5 дат је графички приказ задате функције *z* као и полиноми четвртог степена, добијени у поступку математичког моделирања, са којима је извршена интерполација задате рационалне функције *z* у зависности од промењљиве *x* за вредности $y = \{-1, 0, 1, 2\}$.



Слика 5.

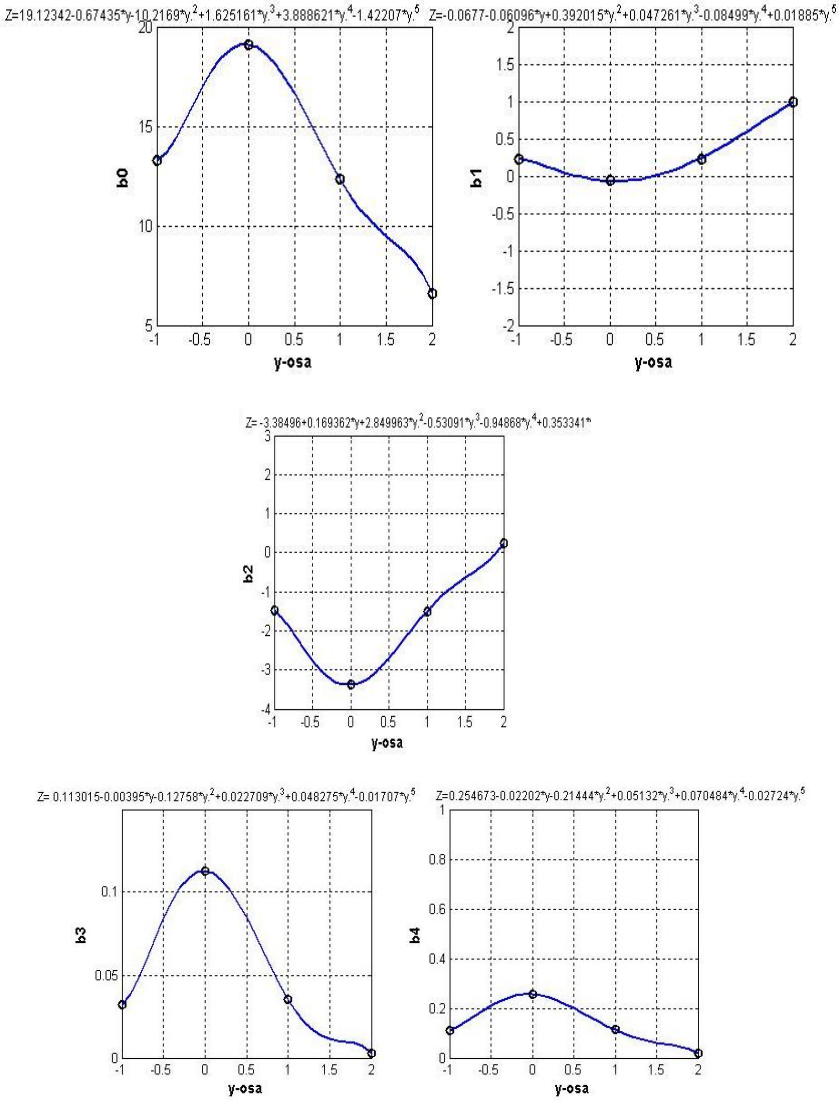
Општи облик полинома четвртог степена који су приказани на сл. 5 се може написати као:

$$\begin{aligned} z_1 &= b_0^1 + b_1^1 x + b_2^1 x^2 + b_3^1 x^3 + b_4^1 x^4, \quad y = -1 \\ z_2 &= b_0^2 + b_1^2 x + b_2^2 x^2 + b_3^2 x^3 + b_4^2 x^4, \quad y = 0 \\ z_3 &= b_0^3 + b_1^3 x + b_2^3 x^2 + b_3^3 x^3 + b_4^3 x^4, \quad y = 1 \\ z_4 &= b_0^4 + b_1^4 x + b_2^4 x^2 + b_3^4 x^3 + b_4^4 x^4, \quad y = 2. \end{aligned} \tag{2}$$

У даљем поступку треба одредити законитост параметара $\{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ у зависности од промењиве у.

На сл. 6 приказане су вредности параметара $\{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ који проистичу из полинома четвртог степена за вредности $y = \{-1, 0, 1, 2\}$, сл. 5.

Такође, на сл. 6 приказана је законитост параметара $\{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ која је исказана у облику полинома петог степена у зависности од промењиве у.



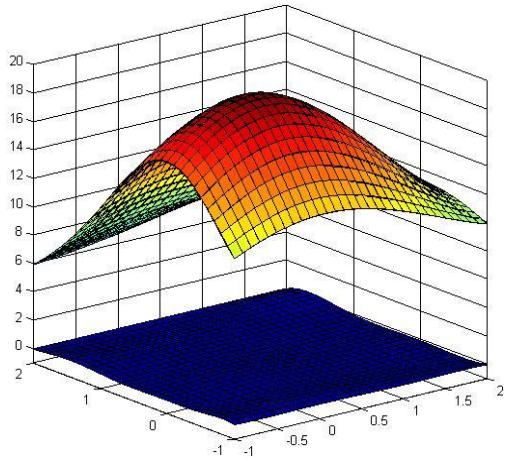
Слика 6.

Када се законитост ових параметара убаци у израз (2) добиће се:

$$
\begin{aligned}
z = {} & 19.12342 - 0.67435\ y - 10.2169\ y^2 + 1.625161\ y^3 + 3.888621\ y^4 - 1.42207\ y^5 + \\
& x\ (-0.0677 - 0.06096\, y + 0.392015\, y^2 + 0.047261\ y^3 - 0.08499\ y^4 + 0.01885\ y^5) + \\
& x^2(-3.38496 + 0.169362\ y + 2.849963\ y^2 - 0.53091\ y^3 - 0.94868\, y^4 + 0.353341\, y^5) + \\
& x^3\,(0.113015 - 0.00395\, y - 0.12758\, y^2 + 0.022709\, y^3 + 0.048275\, y^4 - 0.01707\, y^5) + \\
& x^4(0.254673 - 0.02202\, y - 0.21444\, y^2 + 0.05132\, y^3 + 0.070484\ y^4 - 0.02724\, y^5)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

На сл. 7 у 3D простору приказана је задата рационална функција (1), полиномијална функција петог реда са којом је извршена интерполација (3) и грешка интерполације као разлика између задате рационалне функције (1) и полиномијалне функције (3).

Грешка интерполације је занемарљиво мала што се и визуелно може видети на сл. 7.



Слика 7.

3. *Закључак*

У овом раду приказан је пример у коме је задата рационална функција представљена на адекватан начин помоћу математичког модела у облику полиномијалне функције петог реда у дефинисаном подручју. Такође, у овом раду на визуелан начин у 3D простору приказана је грешка интерполације која је занемарљиво мала чиме је постигну циљ овог рада.

Допринос овог рада је у томе што се преко овог примера показује да се било која рационалана функција може представити са полиномијалном функцијом на адекватан начин.

Практичан значај овог рада је велики. На пример, ако је потребно интегралити подинтегралну функцију, која је у облику рационалне

функције, у неком дефинисаном интервалу, онда то може бити тежак посао и у већини случајева се овај проблем своди да се не може решити у коначном облику. Међутим, ако подинтегралну рационалну функцију интерполирамо са полиномијалном функцијом у подручју на коме се врши интеграљење, онда интеграљење са полиномијалном функцијом постаје врло једноставно, а решење се своди на коначан облик.

Литература

Ивковић 1992: N. Ivković, *Izrada softvera za matematičko modeliranje složenih višefaktornih stohastičkih objekata istraživanja i njegova praktična primena*, Magistarski rad, Mašinski fakultet, Beograd.

Ивковић, Диковић 2008: N. Ivković, Lj. Diković, *Multifactorial mathematical modelling and simulation in 2d and 3d space supported by software*, 12th Serbian mathematical congress, N. Sad, Srbija.

Ивковић, Урошевић, Диковић 2009: N. Ivković, V. Urošević, Lj. Diković, *Simulacija matematičkog modeliranja trofaktornog procesa pomoću polinomijalnih funkcija*, XV Medjunarodna konferencija YUINFO 2009 Conference and Exhibition, Kopaonik, Srbija.

Станић 1981: J. Stanić, *Metod inženjerskih merenja-osnove matematičke teorije eksperimenata*, Mašinski fakultet, Beograd.

Тихонов 1974: V. B. Tihonov, *Planirovanie i analiz eksperimenta*, Legkaja industrija, Moskva.

Slobodan Sekulović*
Hot Springs
USA
Huse H. Fatkić
Aleksandar L. Mastilović
University of Sarajevo

Originalni naučni rad

STRUCTURAL IDENTITY FORMULAS AND SERIES WITH APPLICATION TO ELASTICITY WITH THE STATISTICAL INDEX

This paper is dedicated to V. Perić and B. Schweizer who have passed away recently

1. *Background*

It is almost impossible to find domain, whether it be in technical or social sciences, where the concept of elasticity is not present. This all-out presence springs from the fact that all measures of elasticity whether they be analytic (elasticity coefficient) or graphic have advantage over other variability measures: they represent statistical invariants.

The theory of „The Complete or Total Coefficient of the Aggregate Demand Elasticity“ was introduced and published in three follow-up papers. With the Average Base Index and Average Chain Index (the final form of which was constructed on the smooth arc of the hypercurve (S. Sekulovic, [4]) this theory was developed in E^n with the usual or standard metric/norm. In it, only implicit definition of the Fractional Market Shares with their inception formula in non-analytic form was introduced. Need for its improvement towards easier practical use has become imperative.

2. *Structural Identity Formulas – Concept and Interpretation*

Definition 2.1. Formulas

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(1+\lambda_k)}, \quad (m \in \mathbb{N})(m > 1), \\ p_q &= \frac{\lambda_q}{\prod_{k=q}^{m-1}(1+\lambda_k)}, \quad (q = 1, 2, \ldots, m-1), \\ (\lambda_k &\geq 0)(\forall k)(k = 1, 2, 3, \ldots, m-1) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

are called the *Structural Identity Formulas* (SIF).

* slobodan.sekulovic@gmail.com

Theorem 2.1. *(SIF Theorem).* SIF satisfy the following identity:

$$p_0 + \sum_{q=1}^{m-1} p_q = 1, \quad (\forall m \in \mathbb{N})(m > 1). \tag{2}$$

Proof. We shall derive the proof by mathematical induction:

1° For $m = 2$ expression (2) becomes

$$p_0 + p_1 = \frac{1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} = 1.$$

Thus it is valid for $m = 2$.

2° Suppose that (2) is valid for $m = u \geq 2$, i. e.

$$p_0 + \sum_{q=1}^{u-1} p_q = \frac{1}{\prod_{k=1}^{u-1}(1+\lambda_k)} + \sum_{q=1}^{u-1} \frac{\lambda_q}{\prod_{k=q}^{u-1}(1+\lambda_k)} = 1. \tag{3}$$

3° Let us prove that expression (2) is valid for $m = u + 1$. We have

$$p_0 + \sum_{q=1}^{u} p_q = \frac{1}{\prod_{k=1}^{u}(1+\lambda_k)} + \sum_{q=1}^{u} \frac{\lambda_q}{\prod_{k=q}^{u}(1+\lambda_k)}. \tag{4}$$

Note that expression (4) can also be written as

$$p_0 + \sum_{q=1}^{u} p_q = \frac{1}{1+\lambda_u} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{u-1}(1+\lambda_k)} + \sum_{q=1}^{u-1} \frac{\lambda_q}{\prod_{k=q}^{u}(1+\lambda_k)} + \frac{\lambda_u}{1+\lambda_u} \tag{5}$$

or

$$p_0 + \sum_{q=1}^{u} p_q = \frac{1}{1+\lambda_u} \cdot \left[\frac{1}{\prod_{k=1}^{u-1}(1+\lambda_k)} + \sum_{q=1}^{u-1} \frac{\lambda_q}{\prod_{k=q}^{u-1}(1+\lambda_k)} \right] + \frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}. \tag{6}$$

By assumption (3) the expression in the bracket is equal to one and thereby

$$p_0 + \sum_{q=1}^{u} p_q = \frac{1}{1+\lambda_u} + \frac{\lambda_u}{1+\lambda_u} = 1.$$

Thus expression (2) is valid for $m = u + 1$, and consequently represents an identity for $m > 1, (m \in \mathbb{N})$. We shall call it the *Structural Identity* (SI).

3. *The SIF Interpretations*

Exposition in this paragraph will bring out some interpretations many of which can be very usuful in its domain. We shall consider the following four:

(i) the SIF and the Figurate Numbers;
(ii) the geometrical interpretation;
(iii) a technical interpretation;
(iv) the statistical interpretation with application in economics.

3.1. *The SIF and the Figurate Numbers*

It has been demonstrated that the following identity is valid:

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(1+\lambda_k)}+\sum_{q=1}^{m-1}\frac{\lambda_q}{\prod_{k=q}^{m-1}(1+\lambda_k)}=1,\quad \begin{cases}(m\in\mathbb{N})(m>1),\\(\lambda_k\geq 0)(\forall k)(k=1,2,3,\dots,m-1).\end{cases} \tag{7}$$

For $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{m-1}=\lambda,\ (\lambda\geq 0)$ it assumes the form:

$$\frac{1}{(1+\lambda)^{m-1}}+\sum_{q=1}^{m-1}\frac{\lambda}{(1+\lambda)^{m-q}}=1,\ (m\in\mathbb{N})(m>1). \tag{8}$$

Let $\lambda=\frac{n+1-i}{i}$, $(n\in\mathbb{N})(i=1,2,\dots,n)$. Substituting it into (8) we obtain:

$$\frac{i^{m-1}}{(n+1)^{m-1}}+\sum_{q=1}^{m-1}\frac{(n+1-i)i^{m-q-1}}{(n+1)^{m-q}}=1,\quad \begin{cases}(n\in\mathbb{N}),\\(m\in\mathbb{N})(m>1),\\(i=1,2,\dots,n).\end{cases} \tag{9}$$

Adding up (9) for all i yields:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}i^{m-1}}{(n+1)^{m-1}}+\sum_{q=1}^{m-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i^{m-q-1}}{(n+1)^{m-q}}=n,\quad \begin{cases}(n\in\mathbb{N}),\\(m\in\mathbb{N})(m>1).\end{cases} \tag{10}$$

For different values of m expression (10) yields some interesting formulas:

Let $m = 2$. Then

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n+1} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)}{n+1} = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (11)$$

since

$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)$.

This is to say that for $m = 2$ expression (10) yields the formula for the *n*-th *Triangular Numbers*.

For $m = 3$ we have

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{(n+1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i}{(n+1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)}{n+1} = n, \quad (12)$$

where:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}, \\ \sum_{i=1}^{n}(n+1-i) &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

By solving (12) for $\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i$ we arrive at the following expression:

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}. \quad (14)$$

This is to say that for $m = 3$ expression (10) yields (14), the right-hand side of which is known as the formula for the *n*-th *Tetrahedral Numbers*.

For $m = 4$ expression (10) becomes

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^3}{(n+1)^3} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i^2}{(n+1)^3} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i}{(n+1)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)}{n+1} = n, \quad (15)$$

where:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\\ &\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},\\ &\sum_{i=1}^{n}(n+1-i) = \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}\right\}$$

By solving (15) for $\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i^2$ we have:

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i^2 = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n}\ . \qquad (16)$$

By analogy we can generate the formula for the computation of the sum $\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)i^m$ for $m = 5, 6, \ldots$. The formula can be very useful and applicable in solving many problems in mathematics and its applications.

3.2. *The Geometrical Interpretation*

Here, we shall demonstrate that the coefficients of any arbitrary convex linear combination of a finite number of vectors $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \ldots, \overrightarrow{r_n} \in E^n$ can be expressed by SIF.

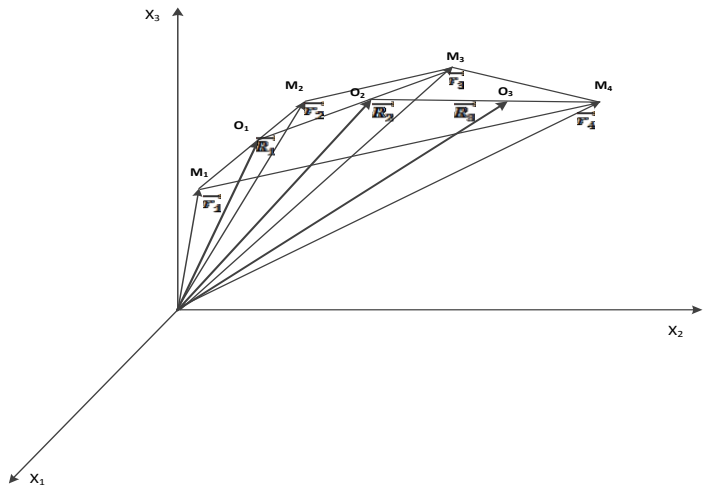


Fig. 1.

Let us consider the space convex polygon, which is bounded by the polygonal line $M_1M_2M_3M_4M_1$. By Fig. 1, we are about to calculate the radius

vector $\overrightarrow{R_3}$ of any arbitrary point of the given space convex polygon. The radius vector $\overrightarrow{R_1}$ of the point O_1 divides the line segment M_1M_2 in the ratio

$\lambda_1 = \frac{M_1O_1}{O_1M_2}, \quad \lambda_1 \geq 0.$

From Fig. 1 we have

$$\overrightarrow{M_1O_1} = \lambda_1\overrightarrow{O_1M_2} ,$$

$$\overrightarrow{R_1} - \overrightarrow{r_1} = \lambda_1\left(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{R_2}\right) ,$$

$$\overrightarrow{R_1} + \lambda_1\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{r_1} + \lambda_1\overrightarrow{r_2} ,$$

and finally

$$\overrightarrow{R_1} = \frac{1}{1+\lambda_1}\overrightarrow{r_1} + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\overrightarrow{r_2} . \qquad (17)$$

By analogy, the position vector $\overrightarrow{R_2}$ of the point O_2 divides the line segment O_1M_3 in the ratio

$\lambda_2 = \frac{O_1O_2}{O_2M_3}, \quad \lambda_2 \geq 0,$

and has the form

$$\overrightarrow{R_2} = \frac{1}{1+\lambda_2}\overrightarrow{R_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\overrightarrow{r_3} \qquad (18)$$

or (after substituting (17) into (18))

$$\overrightarrow{R_2} = \frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}\overrightarrow{r_1} + \frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}\overrightarrow{r_2} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\overrightarrow{r_3} . \qquad (19)$$

By proceeding similarly, the radius vector $\overrightarrow{R_3}$ of the point O_3 divides the line segment O_2M_4 in the ratio

$\lambda_3 = \frac{O_2O_3}{O_3M_4}, \quad \lambda_3 \geq 0,$

and has the form

$$\overrightarrow{R_3} = \frac{1}{1+\lambda_3}\overrightarrow{R_2} + \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\overrightarrow{r_4} \qquad (20)$$

or (after substituting (19) into (20) and arranging)

$$\overrightarrow{R_3} = \frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\overrightarrow{r_1} + \frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\overrightarrow{r_2} + \frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\overrightarrow{r_3} + \frac{\lambda_3}{(1+\lambda_3)}\overrightarrow{r_4} \quad . \qquad (21)$$

The computed radius vector $\overrightarrow{R_3}$ is a function of:

a) radius vectors of the points $M_1 = (\overrightarrow{r_1})$, $M_2 = (\overrightarrow{r_2})$, $M_3 = (\overrightarrow{r_3})$, $M_4 = (\overrightarrow{r_4})$;

b) weights, i.e. the convex linear combination cofficients

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}, \quad (p_0 \geq 0) \\ p_1 &= \frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}, \quad (p_1 \geq 0) \\ p_2 &= \frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}, \quad (p_2 \geq 0) \\ p_3 &= \frac{\lambda_3}{(1+\lambda_3)}, \quad (p_3 \geq 0) \end{aligned}\right\}, \quad p_0 + \sum_{q=1}^{3} p_q = 1.$$

By analogy we introduce $\overrightarrow{r_5}$, $\overrightarrow{r_6}$,..., $\overrightarrow{r_n} \in E^n$ and obtain the convex linear combination coefficients which mimic the SIF. And that is what we set out to demonstrate.

3.3. *Technical Interpretation*

This interpretation asserts how and why individual voltage drops in a simple electric circuit can be expressed by SIF.

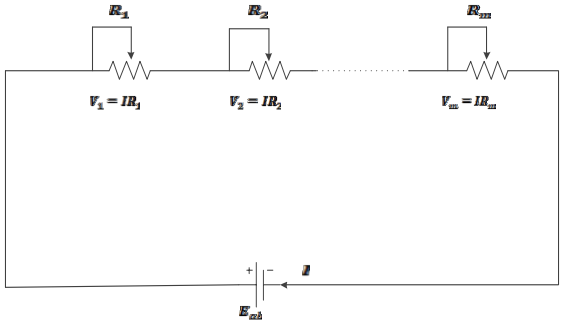


Fig. 2.

Fig. 2 shows the circuit diagram of a simple circuit composed of:
(a) battery power supply E_{ab};
(b) series connection of m circuit components, resistors R_k $(k = 1, 2, 3 \ldots\ldots, m)$ with variable resistance.

Applying *Kirchoff's voltage law* to the circuit by starting at the positive terminal a of the battery, traversing the loop clockwise, and taking the voltage drops as positive, we have the following balance equation

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_m - E_{ab} = 0,$$

or

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 + \cdots + IR_m = E_{ab}.$$

Note that by simple arrangements of the balance equation, individual voltage drops V_k $(k = 1, 2, \ldots., m)$ can also be expressed as a percentage of E_{ab}, i.e.

$$\frac{V_k}{E_{ab}} = \frac{R_k}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{R_j}{R_1}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{22}$$

Let $k = 4$ (4 resistors in the circuit). Consider the following ratios:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{V_2}{V_1} = \lambda_1 \Longrightarrow \frac{R_2}{R_1} = \lambda_1, \ (\lambda_1 > 0), \\ &\frac{V_3}{V_1 + V_2} = \lambda_2 \Longrightarrow \frac{R_3}{R_1} = (1 + \lambda_1)\lambda_2, \ (\lambda_2 > 0), \\ &\frac{V_4}{V_1 + V_2 + V_3} = \lambda_3 \Longrightarrow \frac{R_4}{R_1} = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)\lambda_3, \ (\lambda_3 > 0). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

After substituting expressions for the resistance relatives $\frac{R_2}{R_1}$, $\frac{R_3}{R_1}$ and $\frac{R_4}{R_1}$ into (22) and
arranging we have:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{V_1}{E_{ab}} &= \frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} (= p_0),\\
\frac{V_2}{E_{ab}} &= \frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} (= p_1),\\
\frac{V_3}{E_{ab}} &= \frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} (= p_2),\\
\frac{V_4}{E_{ab}} &= \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3} (= p_3),
\end{aligned}\right\} , \quad (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1).$$

By analogy, for *k*=*m* we take the following ratios into consideration

$$\frac{V_2}{V_1} = \lambda_1 , \qquad \frac{V_3}{V_1 + V_2} = \lambda_2 , \qquad \frac{V_4}{V_1 + V_2 + V_3} = \lambda_3 , \dots , \frac{V_m}{\sum_{k=1}^{m-1} V_k} = \lambda_{m-1},$$

from which we derive expressions for the resistance relatives $\frac{R_2}{R_1}$, $\frac{R_3}{R_1}$, ... , $\frac{R_m}{R_1}$. After substituting the resistance relatives into (22) and arranging, percentage voltage drops $\frac{V_k}{E_{ab}}$ assume the SIF form.

3.4. *The Statistical Interpretation with Application in Economics*

The statistical interpretation (with application in economics) of the SIF springs from economic system which is far more susceptable to human subjective perception than the technical system from the previous exposition. To illustrate this, we opt for an example related to market competition.

Suppose:

a_1) Geographical, i.e. the spatial dimension of the market under observation is clearly defined;

a_2) Time frame, i.e. the period of observation $[T_0, T]$ is set up;

a_3) Present in the market is a limited number *m* of independent firms which constitute an industry. They compete over the same payment limited available demand with their homogenous and brand-name goods/services.

On these grounds, the aggregate demand of the set of homogenous (competitive) and brand-name goods/services is defined as

$$q := \sum_{i=1}^{m} q_i \qquad (24)$$

wherein the system[1]:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= f_i(X), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ X &:= (x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

represents the subfunctions, i.e. demand functions q_i for the brand-name product i; X is the price vector which reflects the price level $x_1, x_2, \dots, x_m$ of each rival product $i = 1, 2, \dots, m$ respectively. The theorem follows:

Theorem 3.1. *(Fractional Market Shares Theorem).* If demand functions q_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ are related by expression

$$\frac{f_j(X)}{f_i(X)} = \frac{x_i}{x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m; \ i \neq j) \tag{26}$$

throughout the observed market in the observed time period, then the share of an industry's sales made by each (firm) is given by the formula:

$$\varphi_k(X) = \frac{f_k(X)}{q} = \frac{x_1}{x_k} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=2}^{m} \frac{x_1}{x_j}}, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{27}$$

We leave out the proof which is straightforward, and it only employs simple arrangements of the balance equation (24) and expression (26). From the mathematical point of view, formula (27) holds true. But, the formula (22) which depicts a technical system holds true as well, and yet technical laws and conditions which generate it are deterministic by their nature, whereas *the conditions which give rise to* (26) *and consequently* (27) *are more or less probabilistic ones.* This translates into understanding that formula (22) and its analogon, the SIF, can stand up under scrutiny, whereas the extent to which (26) that is (27) is reliable is influenced by the market conditions which calls for two notes:

a$_4$) Expression (26), i.e.

$$\frac{f_j(X)}{f_i(X)} = \frac{x_i}{x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m; \ i \neq j)$$

exploits a „silent assumption" that the price competition has primary sway in the observed market, and in the observed time period. The impact of other variables (e.g., quality, design, service abilities etc.) in terms of boosting stronger preference for consumption of one given brand-name product over the

[1] In broader sense $q_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)] = F_i(t), (i = 1, 2, \dots, m)$, i.e. each demand function q_i for the specific brand-name product i is a composite function which indirectly depends on time. Also, other mathematical considerations such as continuity, differentiability etc., are not vital for the point we want to make. 10

other, can be disregarded because the brand-name products are identical in this respect. However, this is only approximate truth in reality!

a_5) Suppose consideration a_4) utterly holds. Even then, degeneration of expression (26) resulting from persistant unallowed practices (e.g., price fixing, i.e. prices unilaterally set by large corporations, selling items below cost to lessen competition and to injure competitors, etc.) and in particular from the monopolistic practices can take place. The regulations prohibiting unallowed practices should be vigorously enforced. Yet, it is not easy to identify monopolistic practices with certainty. A number of indicators for empirical identification whether an industry is monopolized or competitive has been launched. The level of an industry concentration (the share of an industry's sales controled by a few largest firms) is among traditional ones. However, historical evidence has it that the antitrust cases related to and derived from a significant level (60% or more) of an industry concentration "... rested more upon consensus than upon evidence ... that this level of industry concentration allowed a substantial amount of noncompetitive behavior"[2]. In general, all measures indicators of monopolistic power differ in their perception: what does generate, that is what does the market power arise out of (e.g., market share, governmental regulations which favor or tend to impair competition, etc.)?!

Having taken the market conditions a_4) and a_5) into consideration, we proceed to establishing the connection between expression (27) and the SIF. Let $k = 4$ (4 competitors in the observed market). Consider the following ratios:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\varphi_2(X)}{\varphi_1(X)} = \lambda_1 \Longrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \lambda_1\,,\ (\lambda_1 > 0), \\ \frac{\varphi_3(X)}{\varphi_1(X)+\varphi_2(X)} = \lambda_2 \Longrightarrow \frac{x_1}{x_3} = (1+\lambda_1)\lambda_2,\ (\lambda_2 > 0), \\ \frac{\varphi_4(X)}{\varphi_1(X)+\varphi_2(X)+\varphi_3(X)} = \lambda_3 \Longrightarrow \frac{x_1}{x_4} = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\lambda_3,\ (\lambda_3 > 0). \end{array}\right\} \quad (28)$$

After substituting expressions for the price relatives $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}$ and $\frac{x_1}{x_4}$ into (27) and arranging we have:

[2] George J. Stigler (1988), Memoirs of an Unregulated Economist, New York: Basic Books, Inc., Publishers, p. 100.

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(X) &= \frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} (= p_0),\\
\varphi_2(X) &= \frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} (= p_1),\\
\varphi_3(X) &= \frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} (= p_2),\\
\varphi_4(X) &= \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3} (= p_3),
\end{aligned}\right\} \quad (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1).$$

By analogy, for $k = m$ we take the following rations into account

$$\frac{\varphi_2(X)}{\varphi_1(X)} = \lambda_1, \qquad \frac{\varphi_3(X)}{\varphi_1(X) + \varphi_2(X)} = \lambda_2, \qquad \dots, \frac{\varphi_m(X)}{\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(X)} = \lambda_{m-1},$$

from which we derive expressions for the price relatives $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}, \dots, \frac{x_1}{x_m}$. After substituting the price relatives into (27) and arranging, *the Fractional Market Shares* $\varphi_k(X)$ *assume the SIF form.* And that is what we laid out to demonstrate.

4. *Series with Probability Normed Coefficients*

Definition 4.1. Infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots), \tag{29}$$

wherein

$$\left.\begin{aligned}
f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)},\\
f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) &= \frac{\lambda_{n-1}}{\prod_{k=n-1}^{\infty}(1+\lambda_k)} = \frac{\lambda_{n-1} \cdot \prod_{k=1}^{n-2}(1+\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)}, \qquad (n \geq 2),\\
\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0, \dots
\end{aligned}\right\}$$

is called *the Series with Probability Normed Coefficients* or *the Structural Series* (*SS*).

Theorem 4.1. *(SS Theorem).* The Structural Series converges for all $\lambda_k \geq 0$. It converges to 1 if the series $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ converges, and if $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ diverges it converges to zero.

Proof. Let the series $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ be convergent. Then infinite product $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)$ converges as well, and the following inequality is valid:

$$0 < \frac{\prod_{k=1}^{n-2}(1+\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)} < 1. \tag{30}$$

Multiplying expression (30) by λ_{n-1} yields

$$0 < \frac{\lambda_{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-2}(1+\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)} < \lambda_{n-1}, \qquad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 2),$$

or

$$0 < f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) < \lambda_{n-1}, \qquad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 2). \tag{31}$$

Based on the First Comparision Principle for the series with positive terms, it follows from expression (31) that SS is convergent. Its partial sums form the bounded and monotone-increasing sequence:

$$\left.\begin{aligned} 0 < S_1(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)} < 1, \\ 0 < S_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(1+\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)} < 1, \qquad (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 2), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

and

$$S_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)} = \frac{(1+\lambda_n)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(1+\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)} = (1+\lambda_n)\cdot S_n > S_n. \tag{33}$$

Since obviously

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)\right) \longrightarrow \left(\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)\right) (n \longrightarrow \infty), \tag{34}$$

then

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) = S = 1. \tag{35}$$

Now, let the series $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ be divergent. Then infinite product $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)$ diverges as well and $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots) = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$. Consequently, SS converges to zero. Thus the proof is complete.

Corollary 4.1. Let $S:\left(\prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}\right) \to \{0,1\}$ be a function defined by

$$\left(\forall\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}\right) S(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots), {R_0}^{+} = [0, \infty).$$

Then the family, defined by

$$Ker(S) := \{S^{-1}(0), S^{-1}(1)\},$$

where $S^{-1}(0) = \left\{(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}:\ \lambda_k \in {R_0}^{+} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty\right\}$ and

$$S^{-1}(1) = \left\{(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}:\ \lambda_k \in {R_0}^{+} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty\right\} \subset l_1$$

is a partitioning of a set $\prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}$ induced by function S.

Proof. This follows easily from the definition of the Strucutral Series (SS) and the SS Theorem.

Corollary 4.2. Let $S_p:\left(\prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}\right) \to \{0,1\}, p \in \mathbb{N}$, be a family of functions defined by

$$\left(\forall\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}\right) S_p(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\lambda_1^p, \dots, \lambda_k^p, \dots\right), p \in \mathbb{N}, {R_0}^{+} = [0, \infty).$$

Then

(i) $(\forall p \in \mathbb{N})\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty \implies S_p(\lambda) = 1,$

(ii) $S_p^{-1}(1) = \left\{(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}: \lambda_k \in {R_0}^{+} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p < \infty\right\} \subset l_p$ for every $p \in \mathbb{N}$.

Proof: (i) Note that

$$\left(\forall\lambda \in \prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}\right)(\forall p \in \mathbb{N}) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p < \infty.$$

Then we employ the steps of SS Theorem to get:

$(\forall p \in \mathbb{N}) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p < \infty \implies S_p(\lambda) = 1.$

So (i) is proved.

(ii) Follows directly from (i).

Corollary 4.3. Let $G: (\prod_{i=1}^{\infty} R) \to \{0,1\}$ be a function defined by

$$\left(\forall \lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} R\right) \; G(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_k|, \dots).$$

Then

(i) the family, defined by $Ker\,(G) := \{S^{-1}(0), S^{-1}(1)\}$, where $S^{-1}(0) = \{(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} : \lambda_k \in R \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| = \infty\}$ and $S^{-1}(1) = \{(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} : \lambda_k \in R \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty\} = l_1$ is a partitioning of a set $\prod_{i=1}^{\infty} R$ induced by function G,

(ii) function S is a restriction of G to $\prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}$, i.e. $S = G \mid \prod_{i=1}^{\infty} {R_0}^{+}$.

Proof. Follows easily from the definition of SS, SS Theorem and Corollary 4.1.

5. *Final comments*

There is considerable evidence to support a conjecture that the results obtained in this paper for the concept of the Complete or Total Coefficient of Aggregate Demand Elasticity, initially developed in R^n with the usual or standard metric/norm, can be applied and extended to more generalized situation - to probabilistic normed (PN) spaces in the sense of C. Alsina, B. Schweizer and A. Sklar.

PN spaces are real linear spaces in which the norm of each vector is an appropriate probability distribution function rather than a number. Such spaces were first introduced by A. N. Šerstnev (*Dokl. Akad. Nauk SSSR* 149 [1963], 280–283). But C. Alsina, B. Schweizer and A. Sklar (*Aequationes Math.* 46 [1993], no. 1–2, 91–98) developed a new definition of PN spaces which includes the definition of Šerstnev as a special case (see [6–8]).

References

Bartkowiak 1985: R. Bartkowiak, *Electric Circuit Analysis*, John Wiley & Son, Inc., New York.

Fomin, Budak 1973: S. V. Fomin, B. M. Budak, *Multiple Integrals, Field Theory and Series*, English translation, Mir Publishers, Moscow.

Sekulović 1990: S. Sekulović, *The Generalization of the Complete or Total Coefficient of Aggregate Demand Elasticity*, Economic Analysis and Worker's Management, 24. 4.

Sekulović 1991: S. Sekulovic, *The Complete or Total Coefficient of Aggregate Demand Elasticity on the Smooth Arc of the Hypercurve*, Economic Analysis and Worker's Management, 25. 3.

Stigler 1988: J. G. Stigler, *Memoirs of an Unregulated Economist*, Basic Books, Inc., Publishers.

Schweizer, Sklar 1983: B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic metric spaces*, North-Holland Publishing Co., New York; 2nd ed. Dover Publ., Mineola, NY, 2005.

Fatkić, Mastilović 2010: H. Fatkić, A. Mastilović, Further results on the completness and compactness in probabilistic normed spaces, the Fifth Bosnian-Herzegovinian Mathematical Conference, July 7 and 8, 2010, Tuzla (Bosnia & Herzegovina), in: *Resume of the Bosnian-Herzegovinian Mathematical Conference*, Sarajevo J. Math. 6, no. 2, 298 - 299.

Lafuerza-Guillen, Sempi, Zhang 2010: B. Lafuerza-Guillen, C. Sempi, G. Zhang, *A study of boundedness in probabilistic normed spaces*, Nonlinear Anal. 13, no. 5. 1127–1135.

Секција за методику наставе
математике и информатике

Нела Т. Малиновић-Јовановић*
Универзитет у Нишу
Учитељски факултет Врање

Кратко саопштење

ПОВЕЗАНОСТ ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА О ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА У ОКВИРУ САДРЖАЈНОГ И КОГНИТИВНИХ ДОМЕНА У IV РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

У настави математике знања се стичу као систем појмова и чињеница, при чему се свако ново знање логички надовезује на одговарајућа претходна сазнања. Садржаји једне тематске целине структуирани су тако да се ланчано могу повезати у низ чији се сваки члан може извести тј. упознати преко садржаја који му претходе у низу. Појмови се уводе поступно и распоређени су тако да се знања програмских целина стечена у једном разреду надограђују и проширују у наредним разредима.

С друге стране, појмови се уводе у складу са нивоима знања који се имају постићи у процесу учења, а који су хијерархијски распоређени тако да развијеност когнитивних способности једног нивоа укључује развијеност истих на нижем по комплексности нивоу.

То значи да се одређују задаци за поједини предмет, али и за сваки разред и то тако да се прецизирају: *садржаји* програма, односно шта ученик треба да зна, *квантум* (колико) и *ниво* знања по квалитету, али не са становишта шта наставник да предаје, већ шта ученик треба да зна. Садржаји су условљени програмским задацима датим у Наставном програму математике за основну школу, а нивои знања (когнитивни домени), неком од савремених таксономија.

У уређивању било које од наведених компоненти увек треба полазити од одговарајуће научне *методологије*. Најкомпликованије, а делом и најдубиозније је одређивање *образовних* нивоа (когнитивни домени). Амерички научник Бењамин С. Блум (Bloom 1981) је један од аутора који је, заједно са својим сарадницима, међу првима успео да систематизује циљеве и задатке наставе. Имајући у виду чињеницу да се знања која су организована у некакав систем боље усвајају и брже памте од изолованих и неповезаних чињеница, он је разрадио *таксономију* у области *когнитивног* подручја која садржи васпитно-образовне циљеве поређане у хијерархијски низ, од најједноставнијих (памћење, разумевање, примена) па до оних највиших и најсложенијих (анализа, синтеза, евалуација), где доминирају виши когнитивни процеси.

С обзиром на структуру садржаја који се изучавају у почетној настави математике, као и хијерархијску одређеност когнитивних нивоа, очекује се да су знања која ученици стичу повезана, како у садржајном,

* nmalinovic@yahoo.com

тако и у когнитивним доменима, односно очекује се да ученици знања стичу као систем чињеница и генерализација што ће се испитати овим истраживањем. Проблем је актуелан с аспекта педагошког, практичног и друштвеног значаја. Педагошки значај заснива се на потреби за променом циљева и задатака образовања који претендују на квалитетније тј. савременије образовање. Практични значај огледа се у припремању и организацији наставе у којој се знања из математике усвајају као систем појмова, а не као скуп изолованих чињеница. Друштвени значај проистиче из чињенице да ефикасније образовање утиче на формирање и развијање зреле личности ученика, како би формирали критичан и независтан став у процењивању и одређивању сопственог понашања у различитим животним околностима.

1. *Методолошки оквир истраживања*

У сагледавању повезаности успеха ученика пошло се, с једне стране, од програмских задатака који се односе на садржаје о природним бројевима који се изучавају у IV разреду датих у Наставном програму математике за основну школу. Њима је одређен садржајни домен, односно шта ученици треба да науче у области онога што је планирано. С друге стране, пошло се од таксономије циљева и задатака наставе и нивоа знања по квалитету које они треба да мере, односно когнитивних домена. С обзиром да је наставним програмом у IV разреду предвиђено 132 часа за област која се односи на садржаје о природним бројевима, овим истраживањем обухваћено је преко 75% садржаја који се изучавају у овом разреду.

Циљ истраживања био је да се: *изради таксономски модел којим би се мерио ниво знања ученика по квалитету, инструменти провере, утврди степен остварености задатака наставе о природним бројевима у четвртом разреду за сваку категорију знања дату у таксономском моделу и на основу тога да се утврди повезаност успеха ученика, како у садржајном домену, тако и у когнитивним доменима одређеним конструисаним таксономским моделом.*

У складу са постављеним циљем издвојени су следећи задаци: *утврдити повазаност успеха ученика међу когнитивним доменима, односно међу категоријама знања таксономског модела и утврдити повезаност успеха ученика у решавању задатака који се односе на садржајни домен о природним бројевима, односно између програмских задатака и то за сваку категорију знања таксономског модела.*

У истраживању је коришћена *дескриптивна метода* у аналитичкој, компаративној и класификационој варијанти. Анализом се дошло до података о таксономским моделима, циљевима и програмским задацима наставе, односно колико су они операционализовани и класификовани у погледу конкретизације, реализације и могућности провере остварености

захтева. Класификацијом програмских задатака датих у Наставном програму математике за основну школу конструисан је таксономски модел према нивоима знања по квалитету.

Избор технике и инструмената који су примењивани у овом истраживању, извршен је у складу са природом проблема и метода у истраживању. Унутар дескриптивне методе примењивана је *техника анализе садржаја* и *тестирање.*

Техника *анализе садржаја* коришћена је да би се дошло до података о описима нивоа знања по квалитету који обезбеђују основу за доношење закључака о успеху ученика, као и приликом испитивања валидности задатака датих у тестовима. Логичком анализом испитана је садржајна валидност датих задатака којом је утврђено да ли задаци обухватају све захтеве дате у одговарајућим програмским задацима и да ли су у складу са нивоима знања које треба да мере, а који су одређени таксономским моделом.

Техника *тестирања* и *тест* као мерни инструмент коришћени су за утврђивање успеха ученика. Коришћен је критеријски тест којим се утврђује шта и до ког нивоа су ученици научили у области планираног.

Таксономски модел и критеријски тестови знања

За потребе истраживања конструисан је таксономски модел образовних циљева и задатака у когнитивном подручју, који мери квалитет стеченог знања и развој неопходних способности. Категорије су хијерархијски поређане према нивоима знања по квалитету. Квалитет знања изражава се у степену усвојености чињеница и генерализација. Зависно од степена усвојености, знање може бити различитог квалитета. Таксономија садржи пет главних категорија: *препознавање, репродукција, схватање, уопштавање и примена и решавање проблема.* За сваку категорију, дефинисане су поткатегорије које ближе одређују садржаје образовних циљева сваке категорије, а које овде наводимо.

1. Препознавање

1.1. Упознати појединости садржаја (појмове, чињенице, правила, појаве): стећи представу о појмовима природног броја; препознати предмете (цртеже) који у себи садрже појам, у низу понуђених одговора препознати тражени податак, правило, принцип и сл.

1.2. Именовање појединости садржаја (вербално и невербално): вербално именовање појмова природног броја, својстава операција и релација; невербално (симболичко) записивање појмова, процеса, правила.

1.3. Знање значења појединости садржаја: значење броја, релација и операција препознати путем перцепције и бројања; знати значење вербалних и невербалних симбола.

2. Репродукција

2.1. Знати правила повезивања чињеница грађе у целину: повезује научене појмове у оквиру наученог правила (о релацијама и операцијама) с конкретним предметима, али још не разуме та научена правила; зна појмове, чињенице, принципе, правила и може да их репродукује на репрезентативним примерима, али без дубљег улажења у њихово значење.

2.2. Знати методе класификовања делова садржаја при стварању целине: знати начине формирања класа једнакобројних скупова при образовању коначног низа природних бројева; знати поступак настанка вишецифреног броја помоћу бројевних класа.

2.3. Знати смисао, логику повезивања делова садржаја у целину: знати логику записивања бројева помоћу цифара у декадном бројевном систему; знати логику ређања природних бројева у коначан бројевни низ; знати логику придруживања бројева тачкама бројевне праве.

2.4. Знати писмено или усмено објаснити градиво према „оригиналу“: знати верно образложити својим речима или навођењем примера, чињенице, повезаност чињеница, узроке, последице и закључке; користити стечена знања за решавање познатих (шаблонских) задатака, али не и код решавања сасвим нових и непознатих.

Знања на степену препознавања и репродукције су *основна знања* и представљају минимум знања која треба да поседује сваки ученик.

3. Схватање

3.1. Превођење научених садржаја из једног у друго подручје: знати путеве, начине, методе превођења математичких садржаја из описа у цртеж, илустрацију, графикон, схему, модел итд.; знати превођење математичког вербалног садржаја у форму математичке симболике и обратно.

3.2. Тумачење садржаја: знати другачије посматрање садржаја (способност редефинисања); знати уочити скривено значење неког податка (способност увиђања необичног); знати према тезама верно изложити чињенице, извести последице и закључке.

4. Уопштавање и примена (оперативно знање)

4.1. Познавање смисла, логике уопштавања: знати логику индуктивног начина упознавања појмова; познавати смисао генерализације при усвајању правила, метода и закона (особина) рачунских операција; изложити садржаје логички и с разумевањем.

4.2. Знати стечено знање примењивати у пракси: примењивати знање у ситуацијама сличним упознатим; знати издвојити битно и апстраховати споредно при изграђивању појмова природног броја; знати логички поступак долажења до решења задатка.

5. Креативно (стваралачко) решавање проблема

5.1. Анализа садржаја проблема и проблемске ситуације: знати уочити проблемску ситуацију и дефинисати проблем; рашчланити проблем на познате елементе (претпоставке), открити односе међу њима и начин повезивања.

5.2. Синтеза елемената проблема у целину: знати објединити елементе у целину (израз, формулу); знати логички поступак долажења до решења проблема.

5.3. Евалуација (процена) решења: знати извршити евалуацију према унутрашњим критеријумима, тј. извршити проверу тачности решења; знати проценити шта ће се десити изменом неких елемената у проблему.

Аналогно Блумовој таксономији у когнитивном подручју, и ова таксономија се може поделити у две групе. У *прву групу* улазе ниже категорије знања и једноставнији облици понашања (препознавање, репродукција, перцепција, памћење), а у *другу* виши нивои знања (схватање, примена, уопштавање, решавање проблема, интелектуалне способности). Прва група, сходно *Блумовој таксономији* у когнитивном развоју којом се стичу основна знања названа је група за стицање *знања*, а друга, група за стицање знања с *разумевањем*, јер све категорије те групе подразумевају таква знања.

У табели 1 дат је шематски приказ таксономског модела.

Табела 1: Таксономски модел операционализације задатака наставе

Група	*Категорије*	*Поткатегорије*
1. Репродуктивна	*1.00. Препознавање*	1.10. Познавање појединости
		1.20. Именовање појединости
		1.30. Знање значења појединости
	2.00. Репродукција	2.10. Знање правила повезивања
		2.20. Знање метода класификовања
		2.30. Знање логике повезивања
		2.40. Знање објашњавања
2. Продуктивна	*3.00. Схватање*	3.10. Превођење
		3.20. Тумачење
	4.00. Операционалност	4.10. Уопштавање
		4.20. Примена
	5.00. Креативно решавање проблема	5.10. Анализа
		5.20. Синтеза
		5.30. Евалуација

У сагледавању степена остварености програмских задатака наставе математике пошло се од операционализације задатака почетне наставе за четврти разред и таксономског модела, управо због њихове изузетне

важности у расветљавању овог проблема. Евалуација је вршена према категоријама таксономског модела.

За утврђивање резултата евалуације, конструисани су *критеријски тестови знања* којима се утврђује *шта* и до *ког нивоа* су ученици научили у области онога што је планирано у одређеном предмету (Вучић 1979: 26–35). За сваки програмски задатак израђени су задаци и питања којима се испитује да ли је циљ постигнут или није.

Програмски задаци којима се исказује *шта* ученици треба да знају након обраде садржаја, дефинисани су на нивоу разреда и наводимо их ради даље анализе и интерпретације резултата истраживања. Ученици треба да:

4.1 успешно овладају читањем и писањем природних бројева у декадном бројевном систему;
4.2 упознају уређеност скупа N, односно N_o;
4.3 науче да природним бројевима придружују тачке бројевне праве;
4.4 разумеју изводљивост рачунских операција у скупу N;
4.5 примењују у задацима комутативност, асоцијативност и дистрибутивност операција (без употребе ових назива), као и друга својства операција ради лакшег и бржег рачунања; умеју да читају и запишу помоћу слова основна својсвтва рачунских операција;
4.6 уочавају функционалну зависност на примерима зависности између резултата и компонената операције;
4.7 знају да читају, састављају и израчунавају вредност израза са више операција; као и да упознају променљиву на погодним примерима;
4.8 знају да решавају једначине и неједначине упознатих облика у скупу природних бројева;
4.9 успешно решавају (помоћу израза и једначина) задатке дате у текстуалној форми.

До ког *нивоа* су ученици остварили програмске задатке, одређује се таксономским моделом. Према томе, питања и задаци за потребе тестирања рађени су према захтевима програмских задатака и таксономског модела. Конструисано је пет критеријских тестова за сваки разред: *тест препознавања, тест репродукције, тест схватања, тест операционалности и тест решавања проблема.* Сваки од њих мерио је одговарајућу категорију знања по квалитету дату у таксономском моделу.

Број задатака у сваком тесту зависио је од захтева који су обухваћени датим програмским задатком. Задаци су, такође, бодовани према захтевима програмских задатака, јер сваки од израђених тестова мери исти квалитет знања, па није било оправдано рангирати их по комплексности. Тако је сваки задатак у тесту бодован максимално, са

онолико поена колики су захтеви програмског задатка на који се односи садржај.

У тестовима су били заступљени: задаци алтернативног (двоструког) избора, задаци вишеструког избора, задаци допуњавања, задаци откривања веза и односа међу датим елементима и задаци са конструкцијом одговора (задаци отвореног типа) које сачињавају задаци који налажу да се кратко одговори на дато питање и задаци за решавање (са сложенијим одговором). Задаци алтернативног и вишеструког избора, допуњавања и откривања веза и односа коришћени су у тестовима препознавања, јер поступак долажења до њиховог решења подразумева знање на нивоу препознавања. Задаци допуњавања, коришћени су и у тестовима репродукције, али само у случајевима у којима су ученици требало да на основу датих података у задатку изведу закључке допуњујући одговарајуће исказе. У свим осталим тестовима коришћени су само задаци отвореног типа прилагођени категорији знања коју су мерили.

При вредновању степена остварености програмских задатака, између осталих, узете су у обзир и следеће компоненте вредновања: у којој мери је ученик усвојио и разумео *знања* која проистичу из програмских задатака; колико су та знања *применљива* и *функционална*, односно како ученици умеју да користе стечена знања у решавању разних проблема и усвајању нових математичких знања; оспособљеност ученика да релативно брзо, тачно, спретно и до одређеног степена *увежбаности* изводе поједине интелектуалне, практичне и друге операције (нпр. писмено исказивање знања, технику решавања математичких проблема, служење симболима, овладавање разним алгоритмима итд.); формираност одређених корисних навика: јасно и концизно писмено изражавање, уредност и систематичност у раду, одговорност и самосталност у раду и др.; допринос наставе математике у развијању *способности* ученика: интелектуалних (анализа, синтеза, примена), менталних (логичког мишљења, расуђивања, закључивања, стваралачког мишљења), перцептивних (посматрање, опажање) и др.

Интерпретација резултата с обзиром на врсту теста односила се на проценат решености одговарајућих задатака. Евалуација се односила на степен остварености програмских задатака наставе о природним бројевима. Највећи број програмских задатака у оквиру једног разреда омогућава брзу, непосредну евалуацију. Ради се о крајњој евалуацији, па се за сваки програмски задатак могу постизати и виши нивои знања по квалитету од оних који су садржани у њему. Наиме, знања која се стичу на почетку школске године на једном нивоу, биће вишег нивоа на крају, јер ће бити интегрисана у систем знања која следе.

Узорком су обухваћени ученици три основне школе из Врања у популацији ученика Пчињског округа у Србији. Укупно је тестирано 315 ученика IV разреда, што знатно премашује стопу бирања 0.05, односно 5%, с обзиром да је популацију чинило 3.548 ученика. Истраживање је

обављено у периоду мај–јун школске 2005/2006. године. Тестови су рађени редом, почевши од теста препознавања, па све до теста креативног решавања проблема који претпоставља знање на највишем нивоу по квалитету.

2. *Анализа резултата истраживања*

Да би се утврдила повезаност успеха ученика у садржајном домену као и у когнитивним доменима, било је потребно испитати степен остварености програмских задатака о природним бројевима који се изучавају у IV разреду основне школе. Ово због тога да би се утврдило да ли ученици могу да остваре све програмске задатке дате у Наставном програму математике за основну школу у категорији знања коју претпостављају. Оствареност програмских задатака оправдала би испитивање повезаности знања која ученици стичу о овим појмовима и генерализацијама. Резултати истраживања степена остварености програмских задатака наставе о природним бројевима у III разреду основне школе дати су у „Таксономском моделу и степену остварености задатака наставе математике у III разреду основне школе“ (Богдановић и Малиновић-Јовановић 2009: 618–631). Исти поступци коришћени су и за добијање резултата који се односе на степен остварености у IV разреду, а које због обимности рада овде не наводимо (Малиновић-Јовановић 2008). На основу добијених резултата израђене су одговарајуће Пирсонове корелационе матрице.

Пирсонова корелациона матрица која указује на повезаност успеха ученика у решавању задатака у тестовима која се односи на категорије знања таксономског модела, односно на повезаност успеха ученика у когнитивним доменима, дата је у табели 2.

Табела 2: Корелациона матрица међу категоријама знања таксономског модела

Категорија знања		*Препознавање*	*Репродукција*	*Схватање*	*Операционалност*	*Решавање проблема*
Пирсонова корелација	*Препознавање*	1.000	.853**	.614**	.611**	.525**
	Репродукција	.853**	1.000	.682**	.685**	.635**
	Схватање	.614**	.682**	1.000	.681**	.723**
	Операционалност	.611**	.685**	.681**	1.000	.672**
	Реш. проблема	.525**	.635**	.723**	.672**	1.000
N	*Препознавање*	310	306	298	285	288
	Репродукција	306	309	299	286	289
	Схватање	298	299	301	280	281
	Операционалност	285	286	280	289	274
	Реш. проблема	288	289	281	274	293

** Корелација је значајна на нивоу 0.01.

Подаци из табеле 2 указују на то да у свим случајевима корелација постоји и умерена је или висока на нивоу значајности 0.01. Корелација је висока међу категоријама препознавање и репродукција (r=0.853) и схватање и решавање проблема (r=0.723). У осталим случајевима, корелација је умерена. Коефицијент корелације највећи је међу категоријама препознавање и репродукција и износи 0.853. Повезаност је најмања међу категоријама препознавање и креативно решавање проблема (r=0.525).

Повезаност успеха ученика у решавању задатака који се односе на програмске задатке у IV разреду за сваку категорију знања таксономског модела, односно у решавању задатака садржајног домена о природним бројевима који се односе на сваки од когнитивних домена, дата је у наредних пет табела.

Табела 3: Корелациона матрица међу програмским задацима у категорији препознавање

Тест препознавања			*Програмски задатак*									
			4.1.	*4.2.*	*4.3.*	*4.4.*	*4.5.*	*4.6.*	*4.7.*	*4.8.*	*4.9.*	*Укупно поена*
Пирсонова корелација	*Програмски задатак*	*4.1.*	1.000	.476**	.171**	.265**	.506**	.437**	.380**	.434**	.422**	.648**
		4.2.	.476**	1.000	.235**	.332**	.476**	.388**	.289**	.380**	.314**	.564**
		4.3.	.171**	.235**	1.000	.244**	.390**	.408**	.132*	.194**	.208**	.405**
		4.4.	.265**	.332**	.244**	1.000	.455**	.330**	.263**	.380**	.305**	.557**
		4.5.	.506**	.476**	.390**	.455**	1.000	.678**	.434**	.554**	.467**	.855**
		4.6.	.437**	.388**	.408**	.330**	.678**	1.000	.414**	.555**	.455**	.816**
		4.7.	.380**	.289**	.132*	.263**	.434**	.414**	1.000	.340**	.302**	.617**
		4.8.	.434**	.380**	.194**	.380**	.554**	.555**	.340**	1.000	.559**	.779**
		4.9.	.422**	.314**	.208**	.305**	.467**	.455**	.302**	.559**	1.000	.671**
		Укупно поена	.648**	.564**	.405**	.557**	.855**	.816**	.617**	.779**	.671**	1.000

** Корелација је значајна на нивоу 0.01.

* Корелација је значајна на нивоу 0.05.

Подаци у табели 3. указују на то да позитивна повезаност постоји у свим случајевима и високо је значајна на нивоу 0.01, и само у једном случају на нивоу 0.05. Корелација је углавном ниска или умерена, док је у три случаја висока. Највећи коефицијент корелације је између успеха ученика у решавању задатака укупно на тесту и сваком од програмских задатака, где је корелација умерена или висока.

Када је у питању степен решености програмских задатака, корелација је у већини случајева ниска, док је у осталим умерена. Најмања је у случају трећег програмског задатка, који се односи на придруживање природним бројевима тачака бројевне праве, и осталих програмских задатака (r=0.171; r=0.235; r=0.244; r=0.390; r=0.408; r=0.132 r=0.194; r=0.208 респективно). Највећа је у случају петог програмског задатка, који се односи на знање својстава рачунских операција и осталих програмских

задатака, где је корелација умерена. Коефицијент корелације најмањи је између трећег и седмог програмског задатка и износи 0.132, док је највећи између петог и шестог и износи 0.678 на нивоу значајности 0.01. Такође, корелација је нижа између првог, другог и трећег тематског задатка и осталих тематских задатака, у односу на корелацију између осталих шест тематских задатака.

Табела 4: Корелациона матрица међу програмским задацима у категорији репродукција

Тест репродукције			*Програмски задатак*									
			4.1.	*4.2.*	*4.3.*	*4.4.*	*4.5.*	*4.6.*	*4.7.*	*4.8.*	*4.9.*	*Укупно поена*
Пирсонова корелација	*Програмски задатак*	*4.1.*	1.000	.444**	.340**	.391**	.485**	.533**	.457**	.412**	.451**	.625**
		4.2.	.444**	1.000	.232**	.392**	.428**	.471**	.384**	.370**	.351**	.544**
		4.3.	.340**	.232**	1.000	.337**	.392**	.339**	.315**	.317**	.344**	.455**
		4.4.	.391**	.392**	.337**	1.000	.619**	.663**	.519**	.556**	.523**	.772**
		4.5.	.485**	.428**	.392**	.619**	1.000	.701**	.643**	.608**	.531**	.854**
		4.6.	.533**	.471**	.339**	.663**	.701**	1.000	.694**	.643**	.609**	.880**
		4.7.	.457**	.384**	.315**	.519**	.643**	.694**	1.000	.638**	.552**	.818**
		4.8.	.412**	.370**	.317**	.556**	.608**	.643**	.638**	1.000	.570**	.816**
		4.9.	.451**	.351**	.344**	.523**	.531**	.609**	.552**	.570**	1.000	.736**
		Ukupno poena	.625**	.544**	.455**	.772**	.854**	.880**	.818**	.816**	.736**	1.000

** Корелација је значајна на нивоу 0.01.

На тесту репродукције, степен корелације међу свим променљивама високо је значајан на нивоу 0.01. Највећи је између успеха ученика у решавању задатака на тесту и сваком од програмских задатака понаособ, где је корелација у шест случајева висока, док је у три случаја умерена.

У степену решености задатака који се односе само на програмске задатке, корелација је у већини случајева умерена, док је између програмских задатака 4.5. и 4.6. висока и износи 0.701. Корелација је у

већини случајева ниска између првог, другог и трећег програмског задатка и осталих програмских задатака, док је у случајевима осталих шест програмских задатака умерена у свим случајевима и претпоставља битну повезаност између њих. Коефицијент корелације најмањи је између другог и трећег програмског задатка и износи 0.232.

Табела 5: Корелациона матрица међу програмским задацима у категорији схватање

Тест схватања			*Програмски задатак*									
			4.1.	*4.2.*	*4.3.*	*4.4.*	*4.5.*	*4.6.*	*4.7.*	*4.8.*	*4.9.*	*Укупно поена*
Пирсонова корелација	*Програмски задатак*	*4.1.*	1.000	.432**	.458**	.544**	.573**	.611**	.598**	.537**	.556**	.786**
		4.2.	.432**	1.000	.344**	.412**	.368**	.370**	.406**	.411**	.415**	.547**
		4.3.	.458**	.344**	1.000	.496**	.480**	.480**	.493**	.408**	.417**	.616**
		4.4.	.544**	.412**	.496**	1.000	.571**	.508**	.516**	.448**	.514**	.720**
		4.5.	.573**	.368**	.480**	.571**	1.000	.564**	.574**	.500**	.529**	.792**
		4.6.	.611**	.370**	.480**	.508**	.564**	1.000	.628**	.573**	.486**	.817**
		4.7.	.598**	.406**	.493**	.516**	.574**	.628**	1.000	.617**	.583**	.830**
		4.8.	.537**	.411**	.408**	.448**	.500**	.573**	.617**	1.000	.549**	.784**
		4.9.	.556**	.415**	.417**	.514**	.529**	.486**	.583**	.549**	1.000	.738**
		Укупно поена	.786**	.547**	.616**	.720**	.792**	.817**	.830**	.784**	.738**	1.000

** Корелација је значајна на нивоу 0.01.

На тесту схватања, степен корелације међу свим променљивама високо је значајан на нивоу 0.01. Највећи је између успеха ученика у решавању задатака на тесту и сваком од програмских задатака понаособ, где је корелација чак у седам случајева висока, што претпоставља изразиту повезаност, док је у два случаја умерена.

У степену решености задатака који се односе само на програмске задатке, само у три случаја корелација је ниска и то између другог програмског задатка и програмских задатака 4.3., 4.5. и 4.6., док је у свим осталим случајевима умерена. Коефицијент корелације најмањи је између

другог и трећег програмског задатка и износи 0.344, док је највећи између шестог и седмог и износи 0.628. Такође, корелација између првог, другог и трећег програмског задатка и осталих програмских задатака је нижа у односу на корелацију између осталих шест програмских задатака.

Табела 6: Корелациона матрица међу програмским задацима у категорији операционалност

Тест операционалности			*Програмски задатак*									
			4.1.	*4.2.*	*4.3.*	*4.4.*	*4.5.*	*4.6.*	*4.7.*	*4.8.*	*4.9.*	*Укупно поена*
Пирсонова корелација	*Програмски задатак*	*4.1.*	1.000	.494**	.381**	.528**	.581**	.515**	.478**	.473**	.380**	.688**
		4.2.	.494**	1.000	.511**	.497**	.498**	.498**	.511**	.397**	.415**	.638**
		4.3.	.381**	.511**	1.000	.432**	.398**	.301**	.385**	.255**	.350**	.485**
		4.4.	.528**	.497**	.432**	1.000	.690**	.659**	.568**	.481**	.442**	.781**
		4.5.	.581**	.498**	.398**	.690**	1.000	.750**	.667**	.634**	.591**	.893**
		4.6.	.515**	.498**	.301**	.659**	.750**	1.000	.668**	.615**	.603**	.868**
		4.7.	.478**	.511**	.385**	.568**	.667**	.668**	1.000	.546**	.558**	.812**
		4.8.	.473**	.397**	.255**	.481**	.634**	.615**	.546**	1.000	.620**	.779**
		4.9.	.380**	.415**	.350**	.442**	.591**	.603**	.558**	.620**	1.000	.732**
		Укупно поена	.688**	.638**	.485**	.781**	.893**	.868**	.812**	.779**	.732**	1.000

** Корелација је значајна на нивоу 0.01.

На тесту операционалности, степен корелације међу свим променљивама високо је значајан на нивоу 0.01. Највећи је између успеха ученика у решавању задатака на тесту и сваком од програмских задатака понаособ, где је корелација у три случаја умерена (програмски задаци 4.1., 4.2. и 4.3.), док је у осталих шест случајева висока, што претпоставља изразиту повезаност међу овим променљивама.

У степену решености задатака који се односе само на програмске задатке, корелација је у већини случајева умерена, док је између програмских задатака 4.5. и 4.6. висока и износи 0.750. Такође, корелација између првог, другог и трећег програмског задатка и осталих програмских задатака углавном је ниска и нижа је у односу на корелацију између

осталих шест програмских задатака где је у свим случајевима умерена, осим у једном где је висока. Коефицијент корелације најмањи је између трећег и осмог програмског задатка и износи 0.255. Корелација је висока само у решавању задатака који се односе на пети и шести програмски задатак.

Табела 7: Корелациона матрица међу програмским задацима у категорији решавања проблема

Тест решавања проблема			*Програмски задатак*									
			4.1.	*4.2.*	*4.3.*	*4.4.*	*4.5.*	*4.6.*	*4.7.*	*4.8.*	*4.9.*	*Укупно поена*
Пирсонова корелација	*Програмски задатак*	*4.1.*	1.000	.257**	.299**	.388**	.462**	.443**	.461**	.481**	.395**	.624**
		4.2.	.257**	1.000	.297**	.358**	.370**	.205**	.243**	.287**	.183**	.404**
		4.3.	.299**	.297**	1.000	.376**	.490**	.361**	.391**	.470**	.395**	.557**
		4.4.	.388**	.358**	.376**	1.000	.527**	.392**	.418**	.479**	.420**	.661**
		4.5.	.462**	.370**	.490**	.527**	1.000	.580**	.671**	.673**	.535**	.842**
		4.6.	.443**	.205**	.361**	.392**	.580**	1.000	.617**	.642**	.516**	.781**
		4.7.	.461**	.243**	.391**	.418**	.671**	.617**	1.000	.687**	.614**	.835**
		4.8.	.481**	.287**	.470**	.479**	.673**	.642**	.687**	1.000	.703**	.875**
		4.9.	.395**	.183**	.395**	.420**	.535**	.516**	.614**	.703**	1.000	.757**
		Укупно поена	.624**	.404**	.557**	.661**	.842**	.781**	.835**	.875**	.757**	1.000

** Корелација је значајна на нивоу 0.01.

Подаци у табели 7 указују на високо значајну корелацију на нивоу 0.01 у свим случајевима. Степен корелације највећи је између успеха ученика у решавању задатака на тесту и сваком од програмских задатака, где је корелација у четири случаја умерена (програмски задаци 4.1., 4.2., 4.3. и 4.4.), док је у осталих пет случајева висока, што претпоставља изразиту повезаност међу овим променљивама.

У степену решености задатака који се односе само на програмске задатке, корелација је ниска или умерена на нивоу значајности 0.01, док је између програмских задатака 4.8. и 4.9. висока и износи 0.703. Такође,

корелација између првог, другог, трећег и четвртог програмског задатка, и осталих програмских задатака је нижа у односу на корелацију између осталих пет програмских задатака. Коефицијент корелације најмањи је између другог и шестог програмског задатка и износи 0.205. Корелација је висока само у решавању задатака који се односе на пети и шести програмски задатак.

На основу добијених резултата у последњих пет табела можемо закључити да је у свим категоријама знања највећа повезаност између успеха ученика у решавању задатака укупно на тестовима и сваком од програмских задатака понаособ, где је корелација углавном висока (у мањем броју случајева умерена).

Повезаност је у већини случајева умерена када је у питању корелација у степену решености програмских задатака у свим категоријама знања, осим у категорији препознавања, где је у већини случајева ниска, али на високом нивоу значајности.

Такође, у свим категоријама осим у категорији препознавање, корелација између првог, другог и трећег програмског задатка (читање, писање и упоређивање природних бројева, као и придруживање природним бројевима тачака бројевне праве) и осталих програмских задатака је нижа у односу на корелацију између осталих шест програмских задатака.

Закључна разматрања

Резултати добијени истраживањем указују на постојање позитивне повезаности успеха ученика у решавању задатака који се односе на садржаје о природним бројевима који се изучавају у IV разреду основне школе, како међу когнитивним доменима, односно категоријама знања таксономског модела, тако и у домену садржаја и то за сваку категорију одређену таксономским моделом.

Међу когнитивним доменима, односно категоријама знања, повезаност је умерена или висока. Најмања је између препознавања и креативног решавања проблема, што се опет, могло очекивати, јер препознавање појмова и чињеница не пружа никакву основу за решавање проблема у новим, за ученике непознатим ситуацијама.

У садржајном домену, повезаност је испитивана посебно за сваку категорију знања. Најмања је у категорији препознавање, где је углавном ниска, што се опет могло и очекивати, јер стицање представе о појмовима не даје добру основу за успостављање веза међу њима. У осталим категоријама, корелација међу садржајима је у већини случајева умерена и у неким случајевима висока, што указује на битну, односно изразиту повезаност међу њима. То значи да ученици знања о природним бројевима у почетној настави математике стичу као систем појмова и чињеница, а не као скуп изолованих научних елемената што се овим истраживањем требало испитати.

Добијени резултати указују и на чињеницу да је најмања повезаност између садржаја који се односе на успешно овладавање читањем и писањем природних бројева у декадном бројевном систему, познавање уређености скупа N, односно N_o, придруживање природним бројевима тачака бројевне праве и свих осталих садржаја који се односе на природне бројеве и то чак у четири когнитивна домена. Ово је неочекивано, поготово када су у питању садржаји који се односе на извођење аритметичких операција у скупу природних бројева. Наиме, знати поступак настанка вишецифреног броја помоћу бројевних класа, знати логику записивања бројева помоћу цифара у декадном бројевном систему, знати логику ређања природних бројева у коначан бројевни низ, као и знати логику придруживања бројева тачкама бројевне праве, неопходно је да би ученици схватили алгоритме извођења рачунских операција у скупу N.

С друге стране, знатно је већа повезаност (такође у четири когнитивна домена), између садржаја који се односе на примену својстава операција, уочавање функционалне зависности између резултата и компонената операције; читање, састављање и израчунавање вредности израза решавање једначина и неједначина и успешно решавање (помоћу израза и једначина) задатака датих у текстуалној форми.

Резултати добијени TIMSS истраживањем који се односе на успех ученика VIII разреда у Србији у когнитивним и садржајним доменима, указују на чињеницу да наши ученици VIII разреда нису довољно оспособљени да повезују знања из сродних научних дисциплина и да примењују теоријска знања у практичним ситуацијама и за решавање проблема (Антонијевић и Вељковић 2005: 81–107). Такође, показало се, на основу корелативних анализа, да не постоји висок трансфер у сазнајним способностима истог или различитог нивоа (знање чињеница, разумевање појмова, анализа и резоновање, решавање рутинских проблема), мереног преко постигнућа у истим и различитим предметима (Милановић-Наход 2005: 327–350). Због тога би, даљим истраживањима требало утврдити повезаност постигнућа ученика међу различитим садржајним доменима и на основу тога упоредити повезаност успеха ученика на различитим образовним узрастима, односно у почетној настави математике и на крају првог циклуса обавезног образовања.

Резултати добијени истраживањем могу допринети у мењању и иновирању наставног програма математике, начину презентовања садржаја програма, ефикаснијој индивидуализацији процеса учења, стицању трајног и квалитетног знања и др.

Литература

Антонијевић, Вељковић 2005: Р. Антонијевић, М. Вељковић, Наставни садржаји и постигнуће ученика из математике, у: Р. Антонијевић и Д. Јањетовић (ред.) *TIMSS 2003 у Србији*: резултати међународног истраживања постигнућа ученика основне школе из математике и природних наука, Београд: Институт за педагошка истраживања, 81–107.

Блум 1981: Б. Блум, *Таксономија или класификација образовних и одгојних циљева, когнитивно подручје*, Београд: Републички завод за унапређење васпитања и образовања.

Богдановић, Малиновић-Јовановић 2009: С. Богдановић, Н. Малиновић-Јовановић, Таксономски модел и степен остварености задатака наставе математике у III разреду основне школе, Београд: *Педагогија,* LXIV/4, Београд, 618–631.

Вучић 1979: Л. Вучић, Критеријски тестови, Београд: *Психологија*, бр. 3–4, Београд, 26–35.

Малиновић-Јовановић 2008: Н. Малиновић-Јовановић, Таксономски модел операционализације циља и задатака наставе о природним бројевима, *Докторска дисертација*, Врање, Учитељски факултет.

Милановић-Наход 2005: С. Милановић-Наход, Знање ученика од очекиваног до оствареног, у: Р. Антонијевић и Д. Јањетовић (ред.) *TIMSS 2003 у Србији*: резултати међународног истраживања постигнућа ученика основне школе из математике и природних наука, Београд, Институт за педагошка истраживања, 327–350.

Мулис, Мартин и Фој 2005: I. V. S. Mullis, M. O. Martin & P. Foy, *IEA's TIMMS international report on achievement in the mathematics cognitive domains: findings from a developmental project*, Chestnut Hill, MA, Boston College.

Наставни план и програм за основну школу у Републици Србији (1996), Београд, Архимедес.

Кармелита Х. Пјанић[*]
Универзитет у Бихаћу
Педагошки факултет
Санела Е. Несимовић
Универзитет у Сарајеву
Педагошки факултет

Прегледни рад

АЛГЕБАРСКА И ГРАФИЧКА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА ПОЈМА ФУНКЦИЈЕ

Данашње друштво пред појединца, суоченог са комплексношћу у многим сегментима живота, поставља велике изазове. Дефинисање кључних компетенција може побољшати процјене колико добро образовни систем припрема младе људе и одрасле особе за животне изазове, као и идентификовати свеобухватни циљеве за образовне системе и доживотно учење. Међу кључне математичке компетенције убрајају се способности за репрезентације и трансформације математичких концепата.

У свјетлу овако одређених компетенција одвијају се и одређена истраживања разумијевања појма функције (Сфард 1992, Серпинска 1992, Винер и Драјфус 1989, Евангелиду и остали 2004). Поменута истраживања појма функције усмјерена су на различите теме, као што су стварање „менталне слике“ појма (Винер и Драјфус 1989), репрезентација појма (Хит 1998, Дувал 2002, Пјанић 2011), корелације са физиком (Микелсен 2005, Хаџибеговић, Пјанић 2011).

У овом раду се разматра поимање различитих репрезентација појма функције и прелазак с једне репрезентације на остале, с посебним нагласком на алгебарску и графичку репрезентацију линеарне функције.

Дефинисање, репрезентације и разумијевање појма функције

Првобитни фокус у истраживању разумијевања појма функције био је усмјерен на везу представа о функцији и дефиницији функције (Винер и Драјфус 1989). Истраживања су утврдила да иако се ученици сусрећу са формалном дефиницијом функције у току средњошколског образовања и касније поновно на факултету, најћешће нису у стању да примијене ову дефиницију при идентификацији и конструкцији примјера.

Појам функције је ученицима тешко разумјети јер постоје различите репрезентације овог појма: вербална, графичка, табеларна, алгебарска. Наиме, функција се може представити вербално – у виду описа ријечима, графиком, дијаграмом, табелом, формулом (Пјанић 2011). Серпинска (1992) је указала на чињеницу да студенти тешко успостављају

[*] kpjanic@gmail.com

везе између различитих репрезентација функције као и у интерпретирању графика функције.

Тешкоће у схватању појма функције, као и способност репрезентације функције у различитим облицима могу да проистичу из неадекватно формирања овог појма – гдје се нагласак стављао на само једну репрезентацију, најчешће алгебарску, те на превођење алгебарске репрезентације у графичку, док су остале репрезентације појма функције запостављене. На такав начин ученичка знања (п)остају расцјепкана (Дувал 2002) те ученици нису у стању да врше трансформације једне репрезентације у другу, нити да интерпретирају различите репрезентације. Тиме се губи на флексибилности мишљења као значајне одлике математичког мишљења.

Циљ овог рада је да испита усвојеност појма функције међу студентима прве године разредне наставе. Разматрамо на који начин студенти разредне наставе поимају функцију на основу дефиниција које наводе, препознавања функција датих у различитим репрезентацијама и посебно интерпретирању и трансформисању алгебарске репрезентације линеарне функције у графичку и обратно.

Методолошки оквир истраживања

Узорак нашег истраживања су чинила 52 студента прве године Педагошког факултета Универзитета у Сарајеву који су редовно похађали наставу из предмета Математика 1 током зимског семестра академске 2010/2011. године. Наставни фонд предмета Математика 1 износи 2 часа предавања и 2 часа вјежби седмично. Програм Математике 1 предвиђа реализацију теме функције у оквиру 6 часова предавања и 6 часова вјежби. Предавања су била класичног типа: формално се дефинисао појам функције, наглашавала се алгебарска и графичка репрезентација линеарне и квадратне функције, и увјежбавао поступак цртања графика линеарне функције дате формулом као и анализа на тај начин задане функције.

Студенти су тестирани у два наврата, упитник 1 рјешавали су у току семестра, а упитник 2 по завршетку семестра. Упитник 1 је садржавао три типа задатака: задаци препознавања функције у различитим репрезентацијама, задаци трансформације, дефинисање функције. Упитник 2 се састојао од 4 задатка који су захтијевали да студенти интерпретирају алгебарски и графички задане линеарне функције и изврше трансформацију једне репрезентације у другу.

Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања је утврдити могућности студената да представљају појам функције у различитим репрезентацијама као и да

трансформишу функцију из једне репрезентације у другу, с посебним освртом на алгебарску и графичку репрезентацију линеарне функције.

Циљ смо конкретизовали кроз сљедеће задатке истраживања:

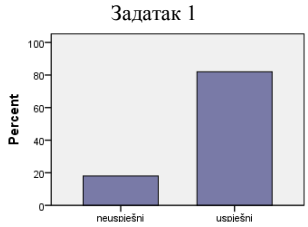
- Испитати степен успјеха студената у препознавању функција датих у различитим репрезентацијама.
- Испитати степен успјеха студената у трансформацији различитих репрезентаицја функције.
- Испитати повезаност између правилног дефинисања појма функције и идентификације функција у различитим репрезентацијама.
- Утврдити да ли постоје разлике у интерпретацији линеарних функција датих двјема репрезентацијама: алгебарској и графичкој.
- Утврдити да ли постоје разлике у успјешности студената да трансформишу алгебарску репрезентацију линеарне функције у графичку и обрнуто.
- Испитати повезаност између успјешности студената да трансформишу алгебарску реперезентацију линеарне функције у графичку и обрнуто.
- Установити којим методама се студенти користе при трансформацији алгебарске репрезентације линеарне функције у графичку.
- Установити карактеристичне грешке.

Квантитативну анализу смо засновали на статистичкој обради података примјеном програма SPSS 18 (Statistical Package for Social Sciences). Том приликом смо утврђивали значајност разлика између аритметичких средина (t-тестом), корелацију истраживачких варијабли (коефицијенте корелације: Pearsonov и Goodmanov коефицијент и χ^2).

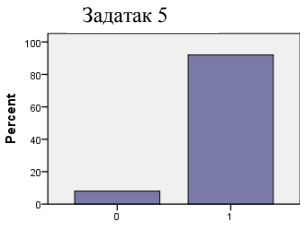
Резултати истраживања

Први истраживачки задатак се односио на испитивање степена успјеха студената у препознавању функција датих у различитим репрезентацијама. Одговори студената на задатке 1, 5, 6 у упитнику 1 указују да студенти најтеже идентификују функције дате у алгебарској репрезентацији. Степен успјешности у идентификацији функција задатих текстом или графиком је приближно једнак: преко 80% студената је идентификовало функције дате у поменуте двије репрезентације. Графикон 1 приказује успјех студената у идентификацији функција датих у три репрезентације: вербалној, графичкој и алгебарској.

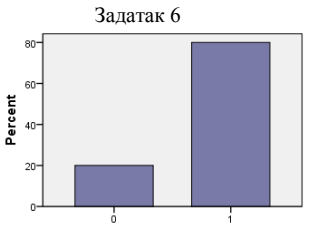
Графикон 1.



Везбална репрезентација



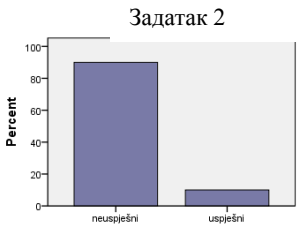
Графичка репрезентација 2



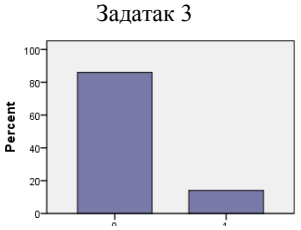
Алгебарска репрезентација

Други истраживачки задатак се односио на испитивање степена успјеха студената у трансформацији различитих репрезентација функције. Анализом одговора студената на задатке 2, 3, 7 у Упитнику 1 дошло се до закључка да је успјех у трансформацији једне репрезентације појма функције у другу опречан успјеху у идентификацији функција датих у поменуте три репрезентације. Студенти су подједнако неуспјешни у трансформацији функције из вербалне репрезентације у графичку или алгебарску, као и у трансформацији алгебарске репрезентације у графичку, што се види из графикона 2.

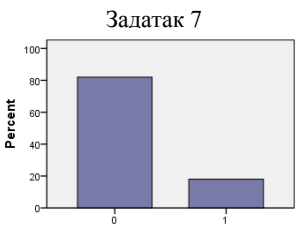
Графикон 2.



Трансформација: вербална – графичка репрезентација



Трансформација: вербална – алгебарска репрезентација 2



Трансформација: алгебарска – графичка репрезентација

Исказани неуспјех у случају трансформације функције дате у вербалној репрезентацији у графичку и алгебарску је и очекиван с обзиром да се таквом виду задатака у току наставе није посвећивала заслужена пажња. Но изненађујући је слаб успјех у трансформацији функције из алгебарске репрезентације у графичку, јер се рјешавању такве врсте задатака у току школовања (искључиво) поклањала пажња.

Трећи истраживачки задатак се односио на испитивање повезаности правилног дефинисања појма функције и идентификације функција у различитим репрезентацијама. Резултати $\chi 2$ теста указују да успјешност студената да наведу дефиницију појма функције зависи од њихове успјешности да појам функције прикажу у различитим репрезентацијама: $\chi 2$ (df=1) = 17,218; p=0,000. При том се уочава умјерена

зависност у навођењу дефиниције појма функције од успјешности приказивања појма функције у различитим репрезентацијама, што нам показује и вриједност ламбда коефицијента: $\lambda = 0{,}412$; $p = 0{,}008$. Дакле, што су студенти више у стању да појам функције представљају различитим репрезентацијама, то ће бити у стању да наводе и присјећају се дефиниције функције.

Четврти истраживачки задатак се односио на утврђивање постојања разлика у интерпретацији линеарних функција датих двјема репрезентацијама: алгебарској и графичкој. Резултати t-теста указују да постоје значајне разлике у интерпретацији линеарних функција датих у алгебарској и графичкој репрезентацији и то подједнако при рјешавању једноставних и сложених проблема:

$t(df=49) = 6{,}096$; $p=0{,}000$ (једноставни проблем, функција облика),

$t(df=49) = 6{,}861$; $p=0{,}000$ (сложени проблем, функције дефинисане на различитим доменама).

Пети истраживачки задатак се односио на утврђивање постојања разлика у успјешности студената да трансформишу алгебарску репрезентацију линеарне функције у графичку и обрнуто. Резултати t-теста указују да постоје значајне разлике у трансформацији линеарних функција датих у алгебарској и графичкој репрезентацији и то подједнако при рјешавању једноставних и сложених проблема:

$t(df=49) = 6{,}096$; $p=0{,}000$ (једноставни проблем, функција облика),

$t(df=49) = 6{,}861$; $p=0{,}000$ (сложени проблем, функције дефинисане на различитим доменама).

Шести истраживачки задатак се односио на испитивање повезаности између успјешности студената да трансформишу алгебарску реперезентацију линеарне функције у графичку и обрнуто. Резултати $\chi 2$ теата указују на зависност при трансформацији алгебарске репрезентације линеарне функције у графичку и обрнуто:

$\chi 2\ (df=4) = 17{,}125$; $p=0{,}002$ (једноставни проблем),

$\chi 2\ (df=4) = 20{,}156$; $p=0{,}000$ (сложени проблем).

Умјерена зависност успјешности у трансформацији графичке репрезентације линеарне функције у алгебарску од успјешности у трансформацији у обрнутом смјеру потврђена је Гудман у Крускал тау тестом:

$\tau = 0{,}242$; $p = 0{,}000$ (једноставни проблем),

$\tau = 0{,}408$; $p = 0{,}000$ (сложени проблем).

Седмим и осмим истраживачким задатком се требало установити којим методама се студенти користе при трансформацији алгебарске репрезентације линеарне функције у графичку, те установити карактеристичне грешке студената при рјешавању постављених задатака. Увидом у рјешења која су понудили испитаници, могу се уочити два тренда у трансформацији алгебарске репрезентације линеарне функције у графичку: метода карактеристичних тачака и метода табеле које су

подједнако заступљене код једноставног проблема и метода табеле коју су студенти више користили при рјешавању сложеног проблема. Уколико се користио метод карактеристичних тачака при рјешавању сложенијег проблема, студенти нису водили рачуна о дефиниционом подручју сваке од функција и то се уочава као једна од карактеристичних грешака. Осим тога, запажене су грешке у поимању алгебарске репрезентације функције гдје се под функцијом подразумијевала само она формула која садржи двије варијабле. Трећа карактеристична грешка испитаних студената одсликавала се у одређивању једнозначности функције.

Закључак

Резултати истраживања су показали на који начин студенти разредне наставе поимају појам функције. Одређени број студената је у образложењима својих одговора експлицитно навео да једино алгебарски израз са двије варијабле може да представља функцију. Трећи уочени тренд односи се на график функције: према мишљењу студената само непрекинут график може да представља функцију. Овакво поимање функције од стране студената је поражавајуће, имајући на уму вријеме и простор у наставном плану и програму предмета математика које је посвећено изучавању функција и анализи графика функција (и то разломљене функције, дакле функције која има прекиде).

Један од основних циљева овог истраживања је био утврдити које репрезентације функција студенти разредне наставе препознају те да ли су у стању да изврше конверзију једне репрезентације у другу. Уочено је да су студенти најуспјешнији у идентификацији функција у текстуалном облику, а затим у облику стреластог дијаграма, што се може објаснити да се након дефинисања функције најчешће наводе примјери функција представљени стреластим дијаграмом, па се такви примјери урежу у памћење студената. Студенти нису били у стању успјешно рјешавати задатке конверзије различитих репрезентација функције. Рјешавање овог типа задатака представља предуслов за потпуније разумијевање појма функције, те је препорука да се обрада наставне теме функције употпуни навођењем примјера и рјешавањем задатака овог типа.

Литература

Винер, Драјфус 1989: S. Vinner, T. Dreyfus, *Images and definitions for the concept of function*, Journal for Research in Mathematics Education 20 (4), 356–366.

Дувал 2002: R. Duval, *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*, Mediterranean Journal for Researcs in Mathematics Education 1(2), 1–16.

Евангелиду и остали 2004: A. Evangelidou, P. Spyrou, I. Elia, A. Gagatsis, University students' conceptions of function, у: M. Johnsen Hoines and A. Berit Fuglestad (ред) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematica Education*, Vol 2, Bergen University College, Norway, 351–358.

Михелсен 2005: C. Michelsen, Expanding the domain – variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics, in: Beckmann, A., Michelsenn, C., Shriraman, B. (Eds.), *Proceedings of the 1st International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences*, The University of Education, Schwabisch Gmund, Germany, 201–214.

Пјанић 2011: К. Пјанић, *Појам функције и његово разумијевање – случај студената разредне наставе*, Зборник радова Научног скупа Наука и политика, 22–23. мај 2010., Књига 5, том 3, Пале, 131–140.

Серпинска 1992: A. Sierpinska, On understanding the notion of function, у: G. Harel, E. Dubinsky (ред), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, United States, 25–58.

Сфард 1992: A. Sfard, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function, G. Harel, E. Dubinsky (ред), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, United States, 59–84.

Хит 1998: F. Hitt, *Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function*, The Journal of Mathematical Behaviour 17 (1), 123–134.

Драгица Ц. Милинковић[*]
Универзитет у Источном Сарајеву
Педагошки факултет Бијељина

Оригинални научни рад

ЕФЕКТИ ПРИМЈЕНЕ ДИФЕРЕНЦИРАНИХ ИНСТРУКЦИЈА У РЈЕШАВАЊУ АРИТМЕТИЧКИХ ПРОБЛЕМА

Увод

У савременој методичкој и наставној пракси посебна пажња се поклања диференцираној и индивидуализованој настави, која се афирмисала као један од најефикаснијих облика у превазилажењу неуспјеха у учењу и стицању математичких знања на свим нивоима школовања.

Бројне предности диференциране и индивидуализоване наставе, посебно прилагођавање способностима, потребама и интересовањима групе или појединца, те рационалније и ефикасније учење и стицање математичких знања, дају им доминантну улогу у почетној настави.

У данашњим условима, диференцирање нивоа инструкција ученицима при обради проблемских задатака у почетној настави математике је прихватљивије од осталих облика диференцијације, а његова основна предност је у томе што омогућава ученику да се послије сваког нивоа врати тексту задатка и ради самостално.

Таква теоријска промишљања резултирала су пројектовањем и израдом конкретног модела диференцирања инструкција за постављање и рјешавање аритметичких проблема у почетној настави математике.

Будући да ниво остварености диференцираног учења у почетној настави математике још није емпиријски утврђен, истраживање које слиједи је усмјерено у том правцу.

1. *Теоријски оквир истраживања*

Веома важан задатак наставника при припремању за обраду конкретних аритметичких проблема је размишљање о врсти и интензитету инструкција и начину и времену пружања ученику, уз истовремено уважавање принципа минималне помоћи и прилагођавање фазама рјешавања задатка.

Диференцирање нивоа инструкција ученицима у постављању и рјешавању аритметичких проблемских задатака користи се као једна од најефикаснијих мјера за превазилажење неуспјеха у настави математике.

У почетном стадијуму, математички задаци се одабирају тако да нивоом захтјевности одговарају тој категорији ученика. Другим ријечима,

[*] sadra@teol.net

креће се од простих и лакших и врши њихово дозирање издвајањем низа једноставнијих задатака у оквиру сложених, до потпуног преласка на сложене задатке. „Овакав прилаз се брзо замјењује диференцираном помоћи слабим ученицима, давањем вјежби које су намијењене и осталим ученицима. Форме и облици такве помоћи били су веома различити: 1. указивање на тип рјешења задатка; 2. давање схеме, обрасца за израду задатка; 3. саопштавање одговора за самоконтролу; 4. постављање питања која наводе на рјешење; 5. указивање на грешке или утврђивање правилности почетних корака у рјешавању задатака; 6. указивање на правило на које се ученик може ослонити при рјешавању задатка; 7. указивање на аналогију; 8. указивање на текст уџбеника (приручника) који треба поновити да би се задатак успјешно ријешио и др“ (Ђорђевић 1981: 130).

Да би приступ проблему диференцирања нивоа инструкција при обради аритметичких проблема био лакши и једноставнији, неопходно је претходно размотрити *основне принципе хеуристике* и *општа хеуристичка правила*.

1.1. *Основни принципи хеуристике*

Хеуристика је способност или „умјетност“ проналажења најкраћих, најједноставнијих и најефикаснијих путева до рјешења проблема. Циљ јој је откривање когнитивних стратегија које би се користиле као помоћна средства у процесу рјешавања постављених или самостално формулисаних проблема.

Да би приступ проблему, а касније и сам процес рјешавања били што успјешнији, неопходно је познавање основних *принципа хеуристике* међу којима Пољa (Polya 1964) истиче сљедеће:

1. *принцип рационалности,*
2. *принцип економичности и неограничености,*
3. *принцип изражавања и примјене*.

Наведене принципе Пољa даје у виду савјета који представљају директне упуте ученицима за рјешавање проблема.

1. „Никад не дјелуј против својих осјећања, али тражи јасне, рационалне разлоге који говоре за или против таквих осјећајних схватања!“

Овај савјет се односи на честа, неодређена осјећања која се јављају приликом суочавања са неким проблемом.

2. „Остани што је могуће дуже код задатка! Покушај да се снађеш са што мање информација које нису у директној вези са задатком!“

С њим је комплементаран савјет: „Ипак буди припремљен да се до те мјере удаљиш од задатка, ако је и колико је то потребно и корисно!“

3. „Не одустај прерано! Остани онолико дуго код дијела који проучаваш, колико сматраш да ће ти он дати корисних информација!“

С њим је комплементаран савјет: „Покушај пронаћи податке које ниси раније користио, проучи их, можда ћеш открити неку значајну информацију!“

Наведени принципи могу се преформулисати у једноставне препоруке ученицима за рјешавање проблема:

1. *Покушај да образложиш своје идеје!*
2. *Искористи информације које имаш у потпуности, али немој да се ограничиш само на њих!*
3. *Немој одмах да одустајеш, размишљај мало о проблему!*
4. *Покушај да увијек прво смислиш оно што желиш касније да урадиш!*

Емпиријска истраживања која су вршили Ресник и Гласер (Resnick, L., Glaser, R.) 1976. године показују да ученици постижу бољи успјех уколико им се дозволи да при рјешавању проблема прво размисле шта би хтјели даураде и како желе то даураде.

Овај принцип *рефлексије разматрања унапријед* доприноси да се избјегне неекономичан и погрешан рад.

1.2. *Општа хеуристичка правила*

Под појмом *хеуристичка правила* подразумијевају се когнитивне стратегије које ученик користи као инструкције при рјешавању проблема. Оне представљају веома важне савјете и упуте ученицима како се тражи, односно долази до рјешење. Пољa (Polya, 1980) наводи сљедећа хеуристичка правила која, у ствари, представљају основне фазе рјешавања проблема:

1. *мораш да разумијеш задатак,*
2. *мораш да израдиш план за рјешавање,*
3. *спроведи свој план,*
4. *провјери добијено рјешење*.

За сваку фазу рјешавања, Пољa је формулисао и нека инструкцијска питања која ће, при индивидуалном и индивидуализованом раду, представљати самоинструкције ученика.

I *За разумијевање задатка*

1. Шта је дато? Шта је непознато? Како гласи услов?
2. Направи скицу ситуације. Унеси одговарајуће податке.

II *За стварање плана*

1. Да ли познајеш неки сличан задатак?
2. Да ли можеш другачије да изразиш задатак?
3. Врати се на почетак!
4. Ако не можеш да ријешиш тај задатак, покушај ријешити неки сличан. Можеш ли да ријешиш дио задатка?

5. Можеш ли да изведеш нешто корисно из података? Да ли си употријебио све податке?

У рјешавању аритметичких проблемских задатака често помаже формулисање задатка сопственим ријечима и рашчлањивање у мање јединице.

III *За спровођење плана*

1. Ако употријебиш свој модел за рјешавање, контролиши сваки корак.
2. Да ли можеш јасно да видиш да је корак тачан? Да ли можеш то да докажеш?

Ова упутства подстичу на промишљени поступак рјешавања.

IV *За освртање на рјешење*

1. Да ли можеш да провјериш резултат?
2. Да ли можеш да изведеш резултат на различите начине?
3. Како си дошао до резултата?

Рефлексија посматрања уназад има за циљ контролисање рјешења и довођење до свијести онога општег што ће се преносити на друге, сличне проблемске ситуације.

Употреба наведених инструкцијских питања условљена је врстом, односно типом проблема и узрастом ученика.

1.3. *Средства помоћи у рјешавању проблема*

Оспособљавање ученика за рјешавање аритметичких проблема у почетној настави математике подразумијева пружање одређених инструкција у појединим фазама рјешавања. Уважавајући принцип минималне помоћи, наставник, по својој процјени, пружа најмању помоћ ученику или групи ученика, која је довољна да наставе процес рјешавања.

На основу многих праћења наставе (Eigler, Judith 1973: 88–90, Riedel 1973: 90), предложена је сљедећа хијерархија нивоа инструкција, уређена према растућој снази:

1. *мотивациона помоћ,*
2. *помоћ за повратну информацију,*
3. *опште-стратегијска помоћ,*
4. *стратегијска помоћ усмјерена на садржај,*
5. *садржајна помоћ.*

Уређеност нивоа инструкција у датој хијерархији, од најслабије, мотивационе, до најснажније, садржајне помоћи, значајан је путоказ наставнику за њихово коришћење у било ком тренутку, односно фази рјешавања аритметичких проблема.

У томе ће им помагати и уређеност врста помоћи у оквиру сваког нивоа, с обзиром на њихову директност (*директна* помоћ је већа од *индиректне*).

Мотивациона помоћ служи као охрабрење ученику, потиче га, бодри и везују уз задатак.

Примјер: *Успјећеш ријешити задатак.*
Није много тежак.

Помоћ за повратну информацију обавјештава ученика да ли је одабрао прави пут за рјешавање проблема.

Примјер: *Одабрао си праву методу.*
Негдје си погријешио.

Ова врста помоћи, уз мотивацију, пружа ученику повратну информацију о поступку рјешавања.

Општестратегијска помоћ представља најопштије приједлоге за процес рјешавања проблема па је неки називају *помоћ усмјерена на процес*.

Примјер: *Издвој познате податке у задатку.*
Погледај добро податке у задатку.

Стратегијска помоћ усмјерена на садржај представља опште методе рјешавања проблема повезане са садржином. Она даје и одређене упуте везане за конкретан садржај задатка.

Примјер: *Ријеши задатак методом правоугаоника.*
Покушај графички ријешити задатак.

Под *садржајном помоћи* подразумијевају се она средства која дају одређенија упутства за задате појмове и правила, за одређене везе између њих, за тачно одређене помоћне величине или за резултат.

Примјер: *Покушај помоћу површине и ширине израчунати дужину правоугаоника.*
Треба да израчунаш ширину правоугаоника.

Садржајна помоћна средства су очигледно најснажнија јер иду до давања парцијалних рјешења задатка. Зато их неки називају *помоћна средства усмјерена на резултат*.

Анализирајући наведене врсте помоћи и примјере кроз које се конкретизују, долазимо до закључка да *општестратегијска помоћ* представља *хеуристичка правила* која пружају директне упуте ученицима како се тражи рјешење.

Ова врста помоћи има одлучујућу улогу у оспособљавању ученика за рјешавање аритметичких проблема јер представља основне фазе рјешавања задатка:

Прво: *– Мораш да разумијеш задатак.*
Друго: *– Мораш да израдиш план за рјешавање.*
Треће: *– Спроведи свој план.*
Четврто: *– Провјери добијено рјешење.*

Хеуристичка правила кроз која се испољава општестратегијска помоћ, заједно са инструкцијским питањима која је формулисао Пољa,

могу се уредити по растућој снази тако да представљају диференциране нивое инструкција које ће ученици моћи користити у току рјешавања аритметичких проблема.

Осим тога, врсте помоћи у оквиру сваког нивоа се, прије свега, разликују према својој директности, што илуструјемо сљедећим примјерима:

– Директна мотивациона помоћ: *Сигурно ћеш доћи до тачног рјешења*.

– Индиректна мотивациона помоћ: *Задатак није много тежак*.

– *Директна помоћ за повратну информацију: Погријешио си у рачунању.*

– Индиректна помоћ за повратну информацију: *Погријешио си негдје*.

– Директна општестратегијска помоћ: *Шта је познато, шта треба да израчунаш*?

– Индиректна општестратегијска помоћ: *Погледај боље податке у задатку*.

– Директна стратегијска помоћ усмјерена на садржај: *Покушај ријешити задатак помоћу графичког приказа*.

– Индиректна стратегијска помоћ усмјерена на садржај: *Можда графички ријешиш задатак*.

– Директна садржајна помоћ: *Најприје израчунај ширину правоугаоника на основу познате површине и дужине*.

– Индиректна садржајна помоћ: *Треба да израчунаш ширину правоугаоника*.

Наведена хијерархија инструкција за помоћ представљена је на начин који одговара идеалном типу који је реално тешко остварив. Уопште гледано, дејство конкретне помоћи не зависи само од њене врсте, него и од тренутка пружања, па су у пракси инструкције на различите начине испреплитане. Зато је њихово једнозначно сврставање готово немогуће.

Диференцирање нивоа инструкција ученицима при обради аритметичких проблема је прихватљивије од осталих облика диференцијације, а његова основна предност је у томе што омогућава ученику „... да послије сваког нивоа, почевши од текста задатка, ради самостално. Радом на описани начин, ученици могу реално и објективно да сагледају сопствену оспособљеност за постављање и рјешавање математичких проблема“ (Петровић 2002: 1).

2. *Методолошки оквир истраживања*

Предмет овог истраживања произашао је из наведене теоријске и наставно-практичне компоненте и оивичен је савременим педагошко-психолошким погледима на могућност модерног конципирања метода учења математике и наставних садржаја овог предмета.

У том смислу, *предмет емпиријског истраживања* је провјера ефикасности примјене диференцираних инструкција ученицима при обради аритметичких модела проблемских задатака.

Циљ истраживања је да се утврди утицај диференцираних инструкција на успјех у рјешавању аритметичких модела проблемских задатака, односно да се потврди и афирмише понуђени модел наставе.

Остваривањем овако дефинисаног циља могао би се очекивати велики теоријски и практични допринос овог истраживања.

Из наведеног циља произлазе и *задаци истраживања*:

1. Формирати и уједначити групе које ће учествовати у експерименту.
2. Провести експеримент.
3. Испитати резултате експерименталне и контролне групе на тестовима за провјеру знања.
4. Испитати утицај пројектованог модела обраде аритметичких проблема на примјену стечених знања у новим ситуацијама.
5. Испитати утицај пројектованог модела обраде аритметичких проблема на самостално рјешавање проблемских задатака.

Основна хипотеза истраживања гласи: Диференцирање инструкција као облик диференцијације и индивидуализације почетне наставе математике ће утицати на повећање успјеха у рјешавању аритметичких проблема.

Помоћне хипотезе изражавају могуће претпоставке:

1. Експериментална група ће у цјелини постићи значајно боље резултате у односу на контролну групу.
2. Диференцирање инструкција при обради аритметичких проблема доприноси ефикаснијој примјени стечених знања у новим ситуацијама.
3. Диференцирање инструкција при рјешавању аритметичких проблема доприноси бржем и квалитетнијем оспособљавању ученика за самостално рјешавање проблемских задатака.
4. Пројектовани модел диференцирања инструкција доприноси подизању образовних ефеката додатне наставе математике на виши ниво .

У складу са природом проблема, предметом, циљем и задацима истраживања, те са постављеним хипотезама, коришћене су *метода теоријске анализе и експериментална метода*, а као *мјерни инструменти* неформални тестови знања.

Избор сложених проблемских задатака за иницијално и финално тестирање је вршен према постојећим уџбеницима и збиркама задатака, те према оријентационом програму за наставу математике у петом разреду основне школе.

Оба теста имају по шест задатака и њихово рјешавање није временски ограничено.

Узорак који смо одабрали истовремено има карактеристике групног и случајног узорка, а одабран је из популације ученика петог разреда Основне школе „Свети Сава“ из Бијељине који, подијељени у шест група, похађају додатну наставу из математике. Избор узорка био је условљен и чињеницом да се додатна настава у већини школа овог подручја, због недостатка простора и рада у три смјене, не реализује у петом разреду.

Наш узорак је бројао 124 испитне јединице (ученика), 62 у контролној и 62 у експерименталној групи (табела 1).

Табела 1.

Група	*f*	*%*	*Кориговани %*	*Кумулативни %*
Е	62	50,00	50,00	50,00
К	62	50,00	50,00	100,00
Укупно	124	100,00	100,00	

2.1. *Организација истраживања*

На почетку истраживања, 6. децембра 2009. године извршено је иницијално испитивање тестом знања из математике. Тест је примијењен као мјерни инструмент за утврђивање почетног стања прије увођења експерименталног фактора и као критеријум за уједначавање група. Истовремено, тест је показатељ достигнутог степена самосталности у рјешавању аритметичких проблема.

Експерименталну и контролну групу смо уједначили на основу неколико критеријума:

- пола ученика,
- успјеха ученика из математике у првом полугодишту,
- надарености ученика за математику,
- успјеха ученика на иницијалном тесту.

Према овим критеријумима групе су биле потпуно, односно приближно уједначене, што је видљиво из података у табелама.

Табела 2: Уједначеност група према полу ученика

Група		*Пол ученика*		*Укупно*
		Женски	*Мушки*	
Е	*f*	33	29	62
	%	53,20	46,80	100,00
К	*f*	30	32	62
	%	48,40	51,60	100,00
Укупно:	*f*	63	61	124
	%	50,80	49,20	100,00

$\chi^2 = 0,29$ df = 1 p = 0,59

Табела 3: Уједначеност група према успјеху из математике у I полугодишту

Група		*Општи успјех ученика*			*Укупно:*
		Добар	*Врло добар*	*Одличан*	
E	*f*	18	24	20	62
	%	29,00	38,70	32,30	100,00
K	*f*	18	24	20	62
	%	29,00	38,70	32,30	100,00
Укупно:	*f*	36	48	40	124
	%	29,00	38,70	32,30	100,00

$\chi^2 = 0{,}00$ df = 2 p= 1,00

Табела 4: Уједначеност група према надарености за математику

Група		*Надареност ученика*		*Укупно*
		Надарени	*Мање надарени*	
E	*f*	22	40	62
	%	35,50	64,50	100,00
K	*f*	22	40	62
	%	35,50	64,50	100,00
Укупно:	*f*	44	80	124
	%	35,50	64,50	100,00

$\chi^2 = 0{,}00$ df = 1 p = 1,00

Табела 5: Уједначеност група према успјеху на иницијалном тесту

Група	*N*	*M*	*SD*	*t*	*df*	*p*
E	62	16,2900	11,4590	0,0001	122,0000	1,0000
K	62	16,2900	11,4590	0,0001	122,0000	1,0000

Након извршеног иницијалног испитивања и уједначавања група, наставници укључени у експеримент, упознати су са резултатима које су ученици појединачно остварили на иницијалном тесту, а потом су им дата упутства за реализацију експерименталног програма. Сугерисано им је да ученицима, без обзира да ли ће бити у стању да сами дођу до тачног рјешења, не дају никаква упутства, изузев објашњења непознатих ријечи и евентуалних стручних израза.

Експериментални програм представља реализацију пројектованог модела додатне наставе за ученике петог разреда који је конструисан тако да испитаници и Е и К групе рјешавају исте задатке, распоређене у осам интермедијалних тестова, с тим да испитаници Е групе имају могућност коришћења диференцираних инструкција на три нивоа.

Уз сваки тест испитаници обје групе су добили *општа упутства* која се односе на етапе у постављању и рјешавању аритметичких проблема.

Испитаници Е групе добили су *посебна упутства* о могућности коришћења диференцираних инструкција које су, за сваки задатак,

пројектоване на три нивоа. Ученици дају *све од себе* да самостално дођу до рјешења проблема, а уколико не успију, траже инструкције. Послије пажљиво прочитаног садржаја првог нивоа инструкција, настављају самосталан рад. Ако им то није довољно, траже други, односно трећи ниво инструкција.

Испитаници К групе рјешавају задатке самостално, придржавајући се *општих упутстава*.

Рад по пројектованом моделу додатне наставе организован је у периоду од 1. до 26. фебруара 20010. године, паралелно у обје групе, са осам часова рада у свакој од њих.

Послије реализације експерименталног програма, 1. марта 2010. године извршено је финално испитивање тестом знања из математике. Испитивањем су били обухваћени исти ученици које смо обухватили иницијалним испитивањем, односно ученици који су похађали додатну наставу из математике у експерименталној или контролној групи

2.2. *Статистичка обрада података*

Добијени нумерички подаци су *статистички обрађени* на РС рачунару, уз коришћење софтверског пакета SPSS, а у складу са пројектованим предметом, циљем и задацима истраживања, као и савременим стандардима методологије педагошких истраживања.

Примијењени су они статистички поступци који највише одговарају самој природи прикупљених података:

– χ^2 тест као мјеру статистичке значајности разлике између испитаника Е и К групе у погледу пола, успјеха из математике и надарености;

– *t тест*, као мјеру статистичке значајности разлике између аритметичких средина које су испитаници Е и К групе остварили на иницијалном тесту, финалном тесту и интермедијалним тестовима;

За обраду нумерички немјерљивих елемената варијабле кориштена је дескриптивна статистика.

3. *Резултати истраживања и њихова интерпретација*

Вриједности статистичких параметара добијених анализом тестова знања (финални тест, интермедијални тестови) имају квантитативно обиљежје и дају могућност егзактне генерализације, односно формирања уопштеног суда о образовним ефектима које смо постигли примјеном диференцираних инструкција при рјешавању аритметичких модела проблемских задатака.

Истраживање је обављено уз претходно уједначавање група према полу испитаника, успјеху из математике у првом полугодишту, надарености за математику и успјеху на иницијалном тесту знања. Степен уједначености у тоталу је био веома висок јер су групе биле потпуно

уједначене у погледу успјеха из математике у првом полугодишту, надарености за математику и успјеха на иницијалном тесту знања, а у погледу пола разлика од 0,59 није статистички значајна. На тај начин искључено је дјеловање осталих неексперименталних независно промјењљивих фактора који утичу на резултате истраживања.

Утицај експерименталне, независне варијабле, према томе, односио се на зависно промјењљиву као исту величину у обје групе.

Финалним и интермедијалним тестирањима су, у складу са постављеним хипотезама, мјерени резултати дјеловања диференцираних инструкција на успјех испитаника Е групе у поређењу са резултатима испитаника К групе.

На финалном тесту знања који се састојао од шест аритметичких проблема ученици су могли освојити максимално 40 бодова, односно 2.480 бодова свака група у цјелини.

Збирни резултати Е и К групе у погледу броја и процента освојених бодова на овом тесту приказани су табелом 6.

Табела 6: Збирни резултати на финалном тесту

Група	*N*	*Освојени бодови*	
		f	*%*
E	62	1.490	60,08
K	62	495	19,96

Резултати јасно показују да су испитаници Е групе у цјелини освојили три пута више бодова од испитаника К групе.

Статистичком обрадом података са финалног мјерења добијене су вриједности које омогућавају упоређивање резултата Е и К групе у погледу износа аритметичких средина (M), стандардних девијација (SD), t-вриједности и нивоа значајности разлика (p) (табела 7).

Табела 7: Успјех ученика Е и К групе на финалном тесту

Група	*N*	*M*	*SD*	*t*	*df*	*p*
E	62	24,0726	10,7050	9,338	122	0,0001
K	62	7,9839	8,3327			

Како су границе значајности 1,96 на нивоу 0,05 и 2,58 на нивоу 0,01, из табеле се види да је на финалном тесту постигнута статистички значајна разлика на оба нивоа, прецизније на нивоу значајности p = 0,0001 у корист експерименталне групе јер је добијена t-вриједност 9,338 (df = 122).

Резултати статистичке обраде података са финалног теста су показали да је примјеном диференцираних инструкција значајно повећан успјех у рјешавању аритметичких модела проблемских задатака.

На основу ове, статистички егзактне констатације, може се закључити да *диференцирање инструкција доприноси ефикаснијој примјени стечених знања у новим ситуацијама и бржем и квалитетнијем оспособљавању ученика за самостално рјешавање проблемских задатака.*

Интермедијални тестови знања представљају дио експерименталног програма који је конструисан тако да испитаници и Е и К групе рјешавају исте задатке, распоређене у осам модела. Сваки модел се састојао од четири проблемска задатка чијим рјешавањем су испитаници могли освојити максимално 25 бодова, односно 1.550 бодова свака група у цјелини.

За разлику од К групе, испитаници Е групе су у току рјешавања имали могућност коришћења диференцираних инструкција на три нивоа.

Сумарни резултати Е и К групе, у погледу броја и процента освојених бодова, на осам интермедијалних тестова приказани су табелом 8.

Табела 8: Збирни резултати на интермедијалним тестовима

Интермед. тест	*Група*	*N*	*Освојени бодови*	
			f	*%*
Модел 1	*Е*	62	870	56,13
	К	62	220	14,19
Модел 2	*Е*	62	770	49,68
	К	62	365	23,55
Модел 3	*Е*	62	905	58,39
	К	62	245	15,81
Модел 4	*Е*	62	985	63,55
	К	62	435	28,06
Модел 5	*Е*	62	955	61,61
	К	62	227,5	14,68
Модел 6	*Е*	62	952,50	61,45
	К	62	590	38,06
Модел 7	*Е*	62	1.045	67,42
	К	62	380	24,52
Модел 8	*Е*	62	987,5	63,71
	К	62	442,5	28,55

Из табеларног прегледа освојених бодова видљиво је да је Е група, у односу на К групу, постигла значајно боље резултате на свим моделима интермедијалних тестова. Испитаници Е групе су највише бодова освојили на моделу 7, а најмање на моделу 2, док су испитаници К групе највише бодова освојили на моделу 6, а најмање на моделу 1.

Успјешност ученика Е и К групе на интермедијалним тестовима знања утврђена је и израчунавањем аритметичких средина, стандардних девијација и t-вриједности (табела 9).

Табела 9: Успјех ученика Е и К групе на интермедијалним тестовима

Интермед. тест	*Група*	*N*	*M*	*SD*	*t*	*df*	*p*
Модел 1	Е	62	14,0323	6,4870	10,881	122	0,0001
	К	62	3,5484	3,9346			
Модел 2	Е	62	12,4194	6,3531	5,947	122	0,0001
	К	62	5,8871	5,8691			
Модел 3	Е	62	14,5968	5,3790	11,736	122	0,0001
	К	62	3,9113	4,7395			
Модел 4	Е	62	15,8871	5,0428	8,202	122	0,0001
	К	62	7,0161	6,8628			
Модел 5	Е	62	15,4032	4,4628	15,117	122	0,0001
	К	62	3,5887	4,2373			
Модел 6	Е	62	15,4032	4,4628	5,553	122	0,0001
	К	62	9,5161	7,0542			
Модел 7	Е	62	16,8548	4,4569	11,258	122	0,0001
	К	62	6,1290	6,0340			
Модел 8	Е	62	15,8871	4,8985	8,113	122	0,0001
	К	62	7,1371	6,9372			

Резултати јасно показују да је Е група значајно напредовала у свим моделима у односу на К групу. Ниво значајности $p = 0{,}0001$ ($df = 122$) једнак је за све тестове, док је t-вриједност највећа за модел 5 (15,117), а најмања за модел 6 (5,553).

На основу оваквих података може се закључити да је коришћење диференциране помоћи у Е групи, резултирало у бољи успјех.

Према томе, *пројектовани модел диференцирања инструкција доприноси повећању успјеха у рјешавању аритметичких проблема и подизању образовних ефеката додатне наставе математике на виши ниво.*

Закључак

Експерименталном провјером потврђене су претпоставке да понуђени модел наставе и учења доприноси успјешнијем рјешавању аритметичких проблема, ефикаснијој примјени стечених знања у новим ситуацијама, те бржем и квалитетнијем оспособљавању ученика за самостално рјешавање аритметичких проблемских задатака. Наведени параметри су показатељи квалитета оваквог приступа математичким садржајима петог разреда, што наводи на закључак да је пројектовани модел наставе и учења веома пожељан.

Литература

Ђорђевић 1981: Ј. Ђорђевић, *Савремена настава – организација и облици*, Београд, Научна књига

Eigler, Judith 1973: G. Eigler, H. Judith u. a, *Grundkurs Lehren und Lernen*, Basel, Weinheim.

Петровић 2002: Н. Петровић, *Математички проблеми са пријемних испита за упис у средње школе*, Нови Сад, Д. О. О ЕДУКА.

Polya 1964: G. Polya, *Die Heuristik. Versuch einer vernünftigen Zielsetzung*, in: MU 1964/1.

Polya 1980: G. Polya, *Schule des Denkens*, Bern.

Resnick, Glaser 1976: L. Resnick, R. Glaser, Problem solving und intelligence, in: Resnich, L. (Hrsg.): *The nature of intelligence*, New York.

Riedel 1973: K. Riedel, *Lehrhilfen zum entdeckenden Lernen*, Hannover.

Сандра Б. Косић-Јеремић[*]
Универзитет у Бањој Луци
Архитектонско-грађевински факултет Стручни рад

СТАВОВИ СТУДЕНАТА О ПОСТОЈЕЋОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НА ТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА

Увод

Увођењем болоњског процеса ситуација на факултетима у цијелој Европи се промијенила. Иако је болоњски начин студирања прихваћен као нешто што се подразумијева, ипак постоје отпори и дискусије око оваквог система образовања (*Liessnann*, 2008; *Ruprecht*, 2008; *Graf*, 2005) (Рупрехт 2008: 107–118).

Болоњски начин студирања је промијенио комплетан систем дотадашњег образовања у Босни и Херцеговини, Србији, Хрватској, као и у осталим земљама у окружењу. Иако је овај начин студирања, заједно са развојем технологије, донио много предности, исто тако је донио и неке недостатке.

Наиме, у Босни и Херцеговини је овај начин студирања наметнут као нешто што је обавезно и што се подразумијева. Међутим, овакав начин студирања захтијева остваривање многих предуслова, који морају бити испуњени да би болоњски систем студирања успјешно функционисао. Сматрамо да су у Босни и Херцеговини сви универзитети увели нови систем студирања, а да претходно нису обезбиједили основне предуслове које овакав систем образовања захтијева, као што су одговарајући технички, кадровски и просторни услови.

И након неколико година од увођења овог система студирања, не примјећују се значајнији помаци у квалитету образовања. Томе је допринијела и „брзина“ студирања, јер се увођењем једносеместралних предмета број предмета у једној години студија значајно повећао, углавном удуплао, па по изјавама студената, они немају времена да неке предмете систематски изучавају. Самим тим студенти су присиљени на бржи, али не и ефикаснији принцип учења. Повећао се и број оних студената којима је циљ само да добију оцјену из неког предмета, а не да га и стварно науче и разумију.

Такође, лично интересовање студената је мање него раније, а радозналост и интересовање су елементи без којих се ниједно подучавање не може успјешно изводити (Рупрехт 2008: 107–118).

Шифел (1995) објашњава како су искуства студената у учионици значајно повезана са заинтересованошћу и тај интерес често предсказује њихова достигнућа у математици. Аутори, кроз чланак, сугеришу да

[*] sandrakos2002@yahoo.com

класична настава математике кроз учење лекција и фронталним радом треба да буде допуњена са више активности и то активирањем студената да би се повећало њихово интересовање за математику. Шифел сугерише да наставници могу почети да повећавају интересовање ученика и студената увођењем таквих активности као што су рад у малим групама, пројекти (пројектна настава), употреба компјутера и постављање проблема у контексту реалног свијета.

Искуства из других земаља показала су да је мишљење студента неизбјежан елемент како у показивању тренутног стања високошколске установе тако и у побољшању тог стања. Законом о високом образовању први пут се у Србији јасно дефинише да се у поступку провјере квалитета самосталне високошколске установе и високошколске јединице у њеном саставу узима у обзир и мишљење студената (Ђуришић, Костић 2008).

Узорак и организација истраживања

У току школске 2009/2010. године извршено је једно истраживање (испитивање) резултата исхода учења математике на техничким факултетима. Овим истраживањем обухваћено је укупно 236 студената друге године грађевинског, електротехничког и машинског студија са четири универзитета у Босни и Херцеговини.

Циљ истраживања је била анализа стања у учењу математике на техничким факултетима, посматрано кроз примјере екстремалних задатака, те сагледавање могућности усавршавања и методичког оплемењивања традиционалног приступа настави математике.

Истраживање је урађено помоћу теста знања који се састојао од 10 екстремалних задатака и то 6 из математике, 2 из физике и 2 из појединих стручних предмета, а укупан успјех у рјешавању је износио око 30% за сва три студијска профила. На основу добијених резултата изведен је сљедећи закључак: *Квалитет знања из математичких садржаја предвиђених наставним плановима и програмима на техничким факултетима је незадовољавајући. У квалитет знања улазе, између осталог, усвојеност појмова, релације међу појмовима, трајност знања, примјенљивост у другим областима и слично.*

Добијени резултат је потврдио резултате и закључке које су у својим истраживањима добиле Сандра Британ на Универзитету у Сиднеју (Британ 2006) и Слађана Јакимовик на Педагошком факултету у Скопљу (Јакимовик 2011).

Уз тест знања студентима је дата и једна анкета која се састојала од 10 актуелних питања везаних за постојећу наставу математике на техничким факултетима кроз коју смо сазнали и анализирали ставове студената о настави математике на техничким факултетима у Босни и Херцеговини. На свако питање понуђено је четири одговора: ДА,

ДЈЕЛИМИЧНО, НЕ ЗНАМ, НЕ, а студенти су требало да одговоре заокруживањем једног од понуђених одговора. Анкета је била анонимна.

На свим факултетима на којима је вршено тестирање и анкетирање углавном се, са малим одступањима, планови и програми математике подударају. Такође и упредвиђеним фондовима часова математике нема значајнијих одступања.

Статистичка обрада резулата урађена је примјеном програма SPSS (Statistical Package for Social Sciences).

Због лакше анализе резултата одговори су бодовани на сљедећи начин:

НЕ=1, НЕ ЗНАМ=2, ДЈЕЛИМИЧНО=3 , ДА=4.

Табела 1: Структура узорка према профилу студија

Факултет	*Број студената*	*%*
Грађевински факултет	73	30,93
Електротехнички факултет	82	34,74
Машински факултет	81	34,32
УКУПНО:	*236*	*100%*

Резултати и анализа

ANKUP

СТУДИЈ	N	Аритм. средина	Стд. грешка аритм. ср.	Стд. девијација	Коеф. варијације	Мин.	Макс.	Медијана
Грађевина	73	29.9315	.42260	3.61067	13.037	19.00	36.00	30.0000
Електротех.	82	29.5854	.43622	3.95016	15.604	21.00	39.00	30.0000
Машинство	81	29.6667	.47661	4.28952	18.400	20.00	38.00	30.0000
Укупно:	236	29.7203	.25758	3.95697	15.658	19.00	39.00	30.0000

Резултати анкете – дескритптивна статистика

Прво анкетно питање:

1. Да ли сте задовољни својим раније стеченим знањем из математике тј. знањем које сте добили у средњој школи?

Овим питањем смо жељели да сазнамо шта студенти мисле о свом раније стеченом знању тј. предзнању из средње школе и колико су објективни у процјени властитог знања.

Графикон 1

Test Statistics[a,b]

	ANK1
Chi-Square	.815
df	2
Asy mp. Sig.	.665

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIJ

Табела 2

Test Statistics[a,b]

	ANK2
Chi-Square	8.433
df	2
Asy mp. Sig.	.015

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIJ

Табела 3

2. Да ли сте задовољни наставним процесом тј. организацијом наставе математике на факултету (уопштено)?

Графикон 2

Дакле, највише студената, 48,7% (115) је одговорило са ДА, а 37,3% (88) је одговорило ДЈЕЛИМИЧНО, па можемо закључити да су студенти половично задовољни наставним процесом на факултетима.

Kruskal Wallis -ов тест, на нивоу значајности 0.05, је показао да нема статистички значајне разлике између група тј. студијских профила у одговорима на прво питање (таб. 2), а да та разлика постоји у одговорима на питање број 2 (таб. 3). Додатним *Mann-Whitney U* тестом та разлика је утврђена између студената грађевине и електротехнике.

3. Да ли сматрате да имате (или сте имали) превише часова математике у првој и другој години студија?

Графикон 3

Test Statistics[a,b]

	ANK3
Chi-Square	.005
df	2
Asy mp. Sig.	.997

a. Kruskal Wallis Test

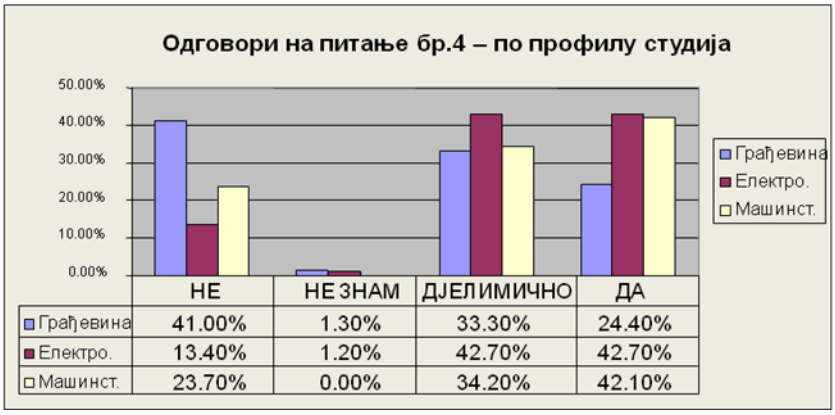
b. Grouping Variable: STUDIJ

Табела 4

Kruskal-Wallis тест (таб. 4), на нивоу значајности 0.05, је показао да не постоји статистички значајна разлика између група тј. студијских профила у одговорима на анкетно питање број 3.

4. Мислите ли да је програм математике превише обиман и захтјеван за савладавање у предвиђеном временском року?

Графикон 4



	НЕ	НЕ ЗНАМ	ДЈЕЛИМИЧНО	ДА
Грађевина	41.00%	1.30%	33.30%	24.40%
Електро.	13.40%	1.20%	42.70%	42.70%
Машинст.	23.70%	0.00%	34.20%	42.10%

Графикон 5

Test Statistics[a,b]

	ANK4
Chi-Square	14.482
df	2
Asy mp. Sig.	.001

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIJ

Табела 5

Из графикона 4 и 5 видимо да се одоговори на ово питање разликују од одговора на претходно питање. Дакле, иако су у великом постотку студенти одоговорили да не сматрају да имају превише часова

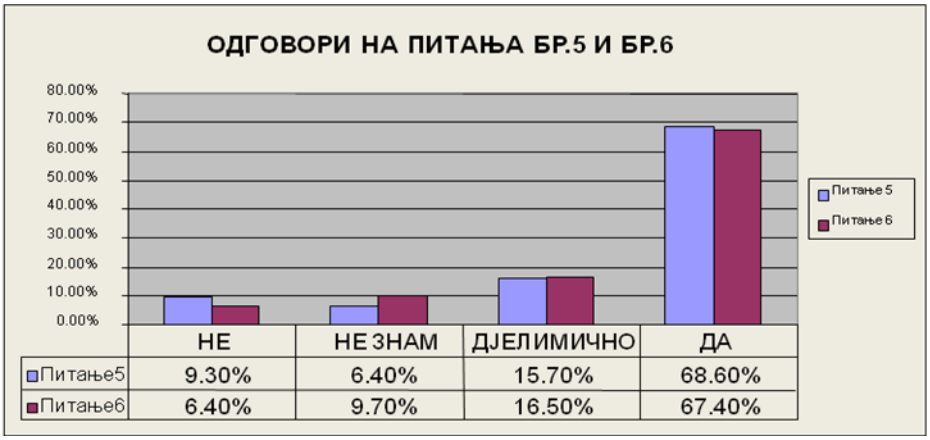
математике, ипак из претходних графикона закључујемо да им је програм математике превише обиман и захтјеван за савладавање у предвиђеном временском року.

Kruskal-Wallis-ов тест (таб. 5), на нивоу значајности 0.05, је показао да постоји статистички значајна разлика између група тј. студијских профила у одговорима на анкетно питање број 4.

Већ из графикона 5 се види да студенти грађевине одскачу у одговорима на ово питање, у односу на студенте електротехнике и машинства, нарочито у постотку одговора НЕ. Ово смо потврдили и *Mann-Whitney U* тестом.

Сљедећа питања ћемо анализирати заједно, јер су међусобно повезана:

5. Мислите ли да би требало на часовима математике више показати, на примјерима, примјену неких области математике у стручним преметима?
6. Сматрате ли да би испуњавањем захтјева под 5 настава математике студентима била занимљивија и прихватљивија за савладавање програма математике на факултетима?

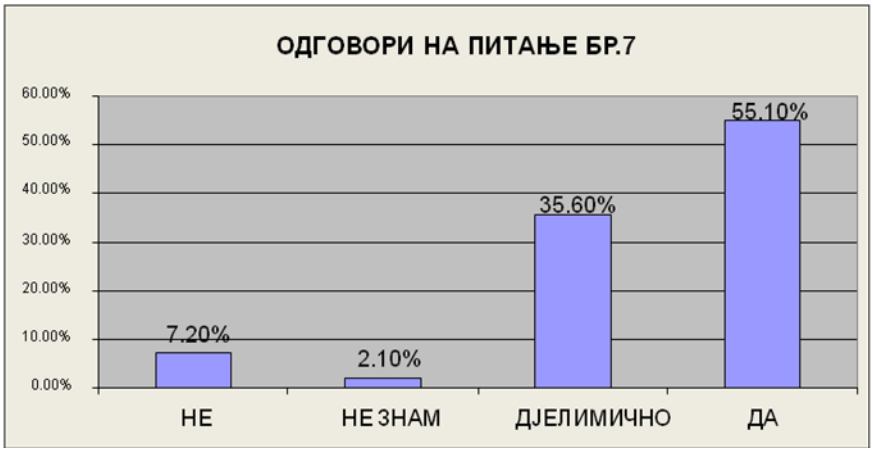


	НЕ	НЕ ЗНАМ	ДЈЕЛИМИЧНО	ДА
Питање5	9.30%	6.40%	15.70%	68.60%
Питање6	6.40%	9.70%	16.50%	67.40%

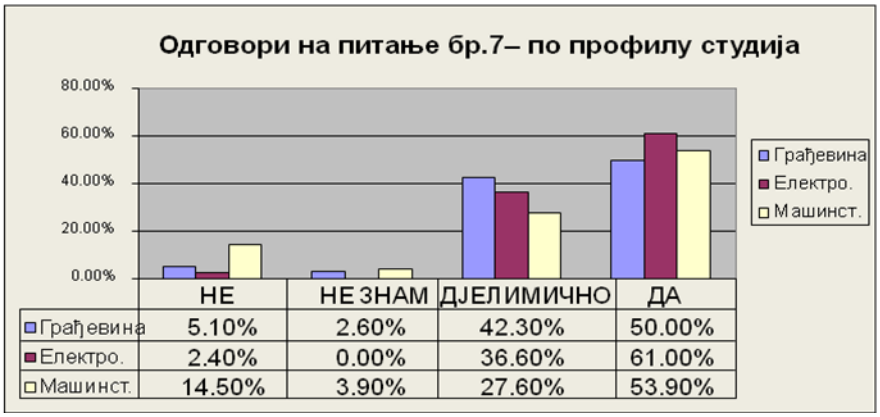
Графикон 6

Студенти сва три студијска профила у највећем постотку одговорили су позитивно на оба питања и нема статистички значајне разлике између различитих студијских профила у одговорима на ова питања.

7. Да ли вам је стечено знање из математичких предмета помогло и користило у савладавању садржаја из стручних предмета?



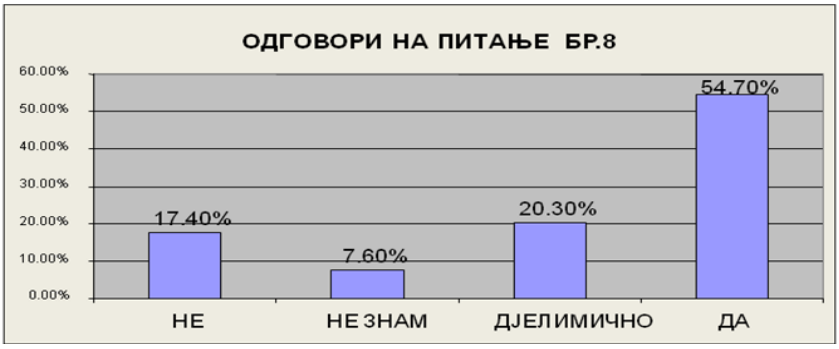
Графикон 7



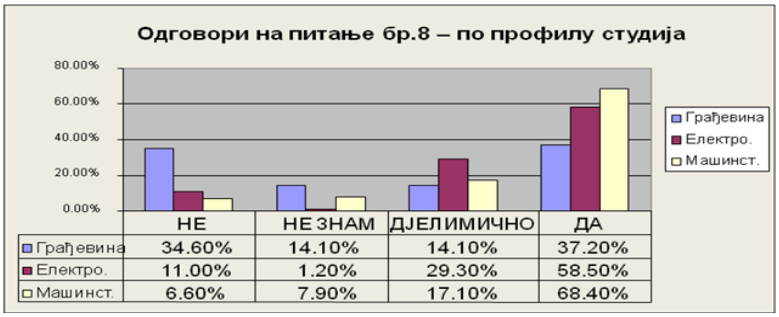
Графикон 8

Kruskal-Wallis-ов тест, на нивоу значајности 0.05, је показао да не постоји статистички значајна разлика између група тј. студијских профила у одговорима на анкетно питање број 7.

8. Да ли бисте вољели (жељели) да се уведе савременији приступ настави математике као нпр. да се један дио наставе посвети савладавању кориштења неког математичког софтвера (као нпр. Matlab или Maple), те да се неки садржаји обрађују управо помоћу рачунара?



Графикон 9



	НЕ	НЕ ЗНАМ	ДЈЕЛИМИЧНО	ДА
Грађевина	34.60%	14.10%	14.10%	37.20%
Електро.	11.00%	1.20%	29.30%	58.50%
Машинст.	6.60%	7.90%	17.10%	68.40%

Графикон 10

Test Statistics[a,b]

	ANK8
Chi-Square	23.849
df	2
Asymp. Sig.	.000

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: STUDIJ

Табела 6

Из графикона 9 и 10 види се да постоје разлике у одговорима на ово питање. Већ из графикона 10 видимо да се та разлика показује између

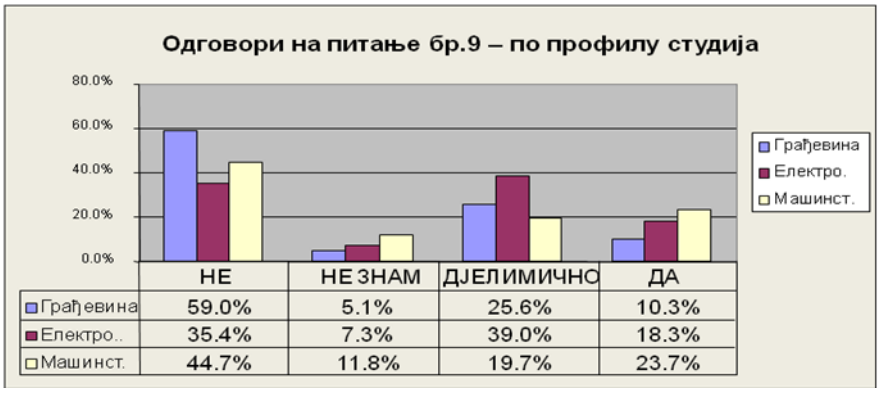
студената грађевине и осталих студената. Да је та разлика статистички значајна, на нивоу значајности 0.05, утврдио је *Kruskal-Wallis*-ов тест (таб. 6).

Додатни *Mann-Whitney U* тестови су потврдили статистички значајну разлику у одговорима и то између студената грађевине са студентима друга два профила.

Сматрамо да појава статистички значајне разлике у одговорима на ово питање између, са једне стране, студената грађевинског факултета, а са друге стране електротехничког и машинског факултета, не може имати чврсте основе у законитости, него је посљедица случајних околности односно самог избора узорка.

9. Мислите ли да је увођење Болоњског процеса допринијело квалитетнијем начину студирања (у смислу боље организације наставе, лакшег и бољег стицања знања и сл)?

Графикон 11



	НЕ	НЕ ЗНАМ	ДЈЕЛИМИЧНО	ДА
Грађевина	59.0%	5.1%	25.6%	10.3%
Електро..	35.4%	7.3%	39.0%	18.3%
Машинст.	44.7%	11.8%	19.7%	23.7%

Графикон 12

Из графикона 11 већ се види да су студенти дали највише одговора НЕ на ово питање, 46,2%, а из графикона 12 да се одговори и на ово питање разликују по профилу студија. Ово нам је потврдио и *Kruskal-Wallis*-ов тест (таб. 7).

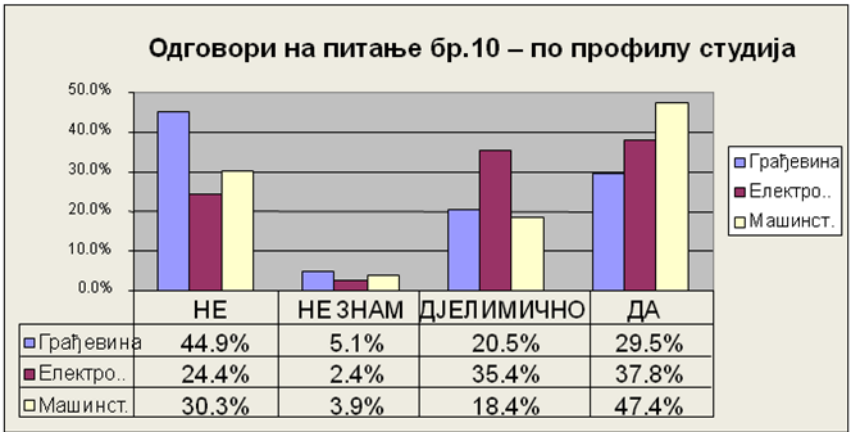
Накнадним *Mann-Whitney U* тестом статистички значајна разлика у одговорима на ово питање је утврђена између студената грађевине и машинства, као и између студента грађевине и електротехнике.

Test Statistics[a, b]	
	ANK9
Chi-Square	9.849
df	2
Asymp. Sig.	.007
a. Kruskal Wallis Test	
b. Grouping Variable: STUDIJ	

Табела 7

10. Да ли мислите или сматрате да вам математика, која се предаје на техничким факултетима, у том обиму није потребна и да ли сте се често питали: „А, шта ће нам све ово и чему то служи?“

Графикон 13



	НЕ	НЕ ЗНАМ	ДЈЕЛИМИЧНО	ДА
Грађевина	44.9%	5.1%	20.5%	29.5%
Електро..	24.4%	2.4%	35.4%	37.8%
Машинст.	30.3%	3.9%	18.4%	47.4%

Графикон 14

Из графикона 13 закључујемо да је број одоговора ДА и НЕ прилично уједначен. Из графикона 14 види се да су највише одоговора ДА дали студенти машинства, а најмање грађевине.

Test Statistics[a, b]	
	ANK10
Chi-Square	6.992
df	2
Asymp. Sig.	.030
a. Kruskal Wallis Test	
b. Grouping Variable: STUDIJ	

Табела 8

Kruskal Wallis тест (таб. 8) је показао статистички значајну разлику у одговорима између група, на нивоу значајности 0.05 (асимптотска значајност=0.03<0.05), а помоћу *Mann – Whitney U* теста смо ту разлику утврдили између студената грађевине и електротехнике, као и између студената грађевине и машинства.

Закључци

Закључак 1: Упоређујући резултате ове анкете са резултатима које смо добили путем теста знања уочава се значајна неусаглашеност. Наиме, пошто је успјешност рјешавања теста знања износила око 30% за сва три профила студија, а око 50% анкетираних студената изражава позитивно

мишљење о наставном процесу из математике на факултетима и својим знањем стеченим у средњој школи.

Закључак 2: Са становишта тенденција за смањењем обима математичких садржаја у настави на техничким факултетима, верификовани већински став студената указује да су они, сагледавајући укупне наставне садржаје у прве двије године студија, схватили да су наставни садржаји из математике неопходни, не само у развијању логичког мишљења, него и у општем техничком, стручном и научном усавршавању.

Закључак 3: Око 70% анкетираних студената одговорило је на четврто питање са ДА и ДЈЕЛИМИЧНО. Овај резултат јасно указује да би наставне садржаје математике студентима требало презентовати кроз три или четири семестра, што би студентима омогућило да темељније приступају тим садржајима и да их квалитетније усвајају.

Закључак 4: Наставне садржаје математике треба иновирати и обогатити поглављима која се односе на примјену математике у струци. Тиме бисмо мотивисали студенте да потпуније усвајају математичка знања и уочавају неопходне релације између тих знања и знања у физици и струци.

Закључак 5: Иако су резултати теста знања показали недовољну успјешност у рјешавању екстремалних задатака који се појављују у физици и стручним предметима, студенти у великом постотку сматрају да им је стечено знање из математике користило или дјелимично користило у савладавању садржаја из стручних предмета. (55,10% одговора ДА и 35,60% одговора ДЈЕЛИМИЧНО).

Закључак 6: Савременији приступ настави математике, уз употребу рачунара и савремених математичких програма би допринио већој мотовацији за учење математике и бољој трајности и примјени наученог.

Закључак 7: Близу половине анкетираних је дало негативан одговор на питање бр. 9. Када се томе дода број оних који су се изјаснили у категорији ДЈЕЛИМИЧНО, преко 75% анкетираних није задовољно квалитетом и начином постојећих студија.

Овај став студената сматрамо природним, јер строги болоњски критеријуми нису пропраћени одговарајућим материјалним, организационим, просторним и кадровским претпоставкама на нашим јавним високошколским установама.

Закључак 8: Наставници на првим предавањима недовољно информишу студенте о значају садржаја које дотични предмет носи у себи, али и неопходну повезаност између садржаја различитих предмета. Истичемо да су ово елементи сваког плана и програма како математичких предмета, тако и свих других и студенти морају бити упознати са њима.

Литература

Britton 2006: Sandra Britton, *Are students able to transfer mathematical knowledge?*, <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap267.pdf>.

Гил 1999: P. Gill: *Aspects of undregraduate engineering students understanding of Mathematics*, International journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30. 4., 557–563

Ђуришић, Костић 2008: М. Ђуришић, Д. Костић: *Припрема и обрада студентских анкета*, XIV скуп трендови развоја: „ефикасност и квалитет болоњских студија“, 3 – 6. 3.

Јакимовик 2011: S. Jakimovik: *Initial problem solving competensis of the first year students, prospective elementary school teachers, at the Pedagogical faculty in Skopje (2006/07–2009/10)*, IMO Istraživanje matematičkog obrazovanja, Vol. III, broj 5, 5–12

Косић-Јеремић 2011: С. Косић-Јеремић: *Екстремални задаци у настави математике*, докторска дисертација, Филозофски факултет, Пале.

Рупрехт 2008: R. Ruprecht: *How to guarantee quality in educaton*, Problems of education in the 21st CENTURY, Vol. 7, 107–118.

Шифел 1995: Schiefele, U. and M. Csikszetmihalyi: *Motivation and Ability as Factors in Mathematics Experience and Achievement*, Journal for Research in Mathematics Education, v. 26, no. 2,163–181.

Naida I. Bikić*
Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet

Stručni rad

MODEL PROBLEMSKOG PRISTUPA MODELOVANJU NASTAVNOG ČASA

1. *Uvod*

Obrazovanje se danas smatra jednim od najvažnijih svjetskih problema i u njemu se traže rješenja budućnosti društva koje treba biti bolje i humanije. Gledajući daleko u prošlost, pa sve do sada, smatralo se da je najbolji način savladavanja matematičkih sadržaja kroz poučavanje i vježbu, a cilj je bio naučiti ih napamet. Kritičari tradicionalnog pristupa učenju predlagali su nove reforme koje se prvenstveno odnose na ulogu učenika u nastavnom procesu gdje nastavnici trebaju učenike podupirati u otkrivanju i razumijevanju veza među različitim zadacima. Znanja stečena tradicionalnim načinom poučavanja nisu adaptivna, većina učenika ne znaju kako da već postojeća znanja povežu sa novim znanjima, odnosno znaju *kako da* riješe zadatak, ali ne i *zašto* je to tako. Učenje rješavanjem problemskih zadataka omogućuje učenicima da razviju sposobnost da vide cijelu sliku i pri tome uočavaju važne elemente i razumiju međusobne odnose u onome što uče.

2. *Određenje pojma problemske nastave*

Riječ problem je grčkog porijekla i njom se označava teško pitanje, okolnost koja izaziva nedoumicu, sumnju i brigu. Problem nastaje onda kada pojedinac naiđe na određenu prepreku, a do cilja može doći jedino ako pronađe put za savladavanjem tog problema. Prethodna iskustva i znanja se primjenjuju na nove uslove, što dovodi do buđenja mnogih intelektualnih operacija i procesa.

Pod problemskim učenjem u nastavi ne misli se na rješavanje problema uopće, nego na one vidove učenja i poučavanja u kojima centralno mjesto zauzima rješavanje problema kao moguća varijanta i organizacija nastave. Izbor sadržaja, postupci i tehnike planiranja i programiranja, organizacija, realizacija i verifikacija, usmjereni su ka rješavanju problema. Učenici se suočavaju sa stvarnim logičko-gnoseološkim i psihološkim teškoćama nastave i tragaju za rješenjima (Muminović 1998: 16).

U pedagoško-psihološkoj, didaktičko-metodičkoj, matematičkoj i drugoj literaturi uz riječ problem se javljaju mnogobrojni termini: problemska nastava, rješavanje problemskih zadataka, učenje rješavanjem problemskih zadataka, problem-metoda, problemsko izlaganje i slično. Učenje rješavanjem

* naida.bikic@hotmail.com

problemskih zadataka je jedan od savremenijih pristupa učenju u nastavi (Kadum 2005: 49).

Problemska nastava se u mnogim teorijama učenja i nastave dvadesetog vijeka ističe kao poseban didaktički sistem, koji svojom kvalitetom doprinosi razvoju sposobnosti kretivnog razmišljanja, samostalnog mišljenja, a što odgovara zahtjevima savremenog društva. Ovaj cilj će biti ispunjen kada učenik formira pravilne navike mišljenja, odnosno kada se obuči za refleksivno mišljenje koje ima pet etapa: prijedlozi za neko rješenje, razjašnjavanje suštine problema, korištenje hipoteza, razmišljanje o rezultatima primjene odabrane hipoteze, testiranje odabrane hipoteze imaginativnom akcijom (Kadum 2005: 53).

Učenikovu želju da otkriva, saznaje, istražuje, primjećuje, mora da prati obrazovno dobro kojim se budi i održava ova potreba, a nastava matematike je odličan način da se to ostvari. Upravo zbog toga u školskoj edukaciji treba dati primat problemskoj nastavi, jer takva nastav prati ljudsku prirodu, čovjekovu potrebu za saznavanjem, njegovu znatiželju i radoznalost. Ova nastava ne isključuje nijedan drugi organizacioni oblik nastavnog rada, pa je njen primat sasvim logičan i opravdan.

3. *Oblikovanje časa u problemskoj nastavi*

Aktivno uključivanje učenika u proces sticanja znanja jedan je od najvažnijih faktora usvajanja matematičkih znanja. Na nastavniku je velika odgovornost, jer on je taj koji treba da odabere odgovarajuće oblike rada, nastavne metode i sadržaje kako bi u učionici stvorio atmosferu za učenje koja na učenika djeluje poticajno i usmjerivački. Učenik nove pojmove, činjenice, informacije i koncepte mora samostalno otkrivati, jer tako stečena znanja su kvalitetnija i trajnija.

Mnogi su se pedagozi, psiholozi, didaktičari i metodičari, kritikujući tradicionalni način poučavanja, bavili fenomenom problemske nastave. Prvi značajan eksperiment na području bivše Jugoslavije u razrednoj nastavi izveo je dr Radisav Ničković (1998: 67), koji je svojim istraživanjem učenje rješavanjem problemskih zadataka obogatio novim spoznajama. On ističe šest etapa u rješavanju problemskog zadatka, koje su se u ovom radu uzele kao model pomoću kojeg se vrši organizacija nastavnog časa. To su:

– problemska situacija,
– definisanje problema,
– izbor hipoteza,
– verifikovanje hipoteza, odnosno rješenje problema,
– izvođenje generalizacije i analiza rezultata,
– provjera rezultata.

Naravno, postavljena shema ne može se shvatiti isuviše kruto, jer struktura časa problemske nastave zavisi od uzrasta učenika, prirode nastavne jedinice, naviknutosti učenika na taj način rada, njihove motivisanosti.

U toku učenja primjenom rješavanja problemskih zadataka zastupljeni su sljedeći nivoi procesa kreativnog mišljenja, koji se odvijaju paralelno sa etapama rješavanja problemskih zadataka (Kadum 2005: 50–51):

– nivo preparacije,
– nivo inkubacije,
– nivo iluminacije,
– nivo verifikacije.

Učenici sada postaju istraživači, koji neprestano istražuju i otkrivaju, pa su u ovom procesu sticanja znanja zastupljeni svi oblici misaone aktivnosti. Iz navedenog slijedi da je problemska nastava savremen, viši didaktički sistem, što implicira da je on i nastavnicima i učenicima teži od drugih didaktičkih sistema. Za uspješnu primjenu problemske nastave bitna pretpostavka je dobra osposobljenost nastavnika u stručnom i metodičkom pogledu, kao i osposobljenost učenika za umni rad.

U ovom radu dat je problemski pristup primjera obrade nastavne jedinice iz trigonometrije pod nazivom Definicije trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu. Osnovni ciljevi časa su:

Obrazovni cilj:

Učenici trebaju uočiti i shvatiti pravila izračunavanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu i njihovu međusobnu povezanost, te primijeniti naučene definicije u praktičnim zadacima i novim problemskim situacijama.

Funkcionalni cilj:

Problemskim zadacima i postupcima pridonijeti razvijanju kritičkog mišljenja, kao i logičkog zaključivanja i utvrđivanja uzročne povezanosti podataka.

Odgojni cilj:

Razvijati kod učenika radoznalost i istraživački duh. Izazvati osjećaj zadovoljstva uspješnim rješenjem postavljenog problemskog zadatka.

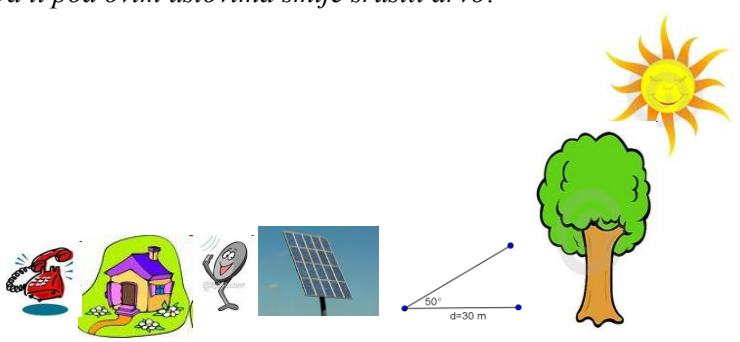
I *Stvaranje problemske situacije*

Cilj nastavnika je da probudi interes učenika za novi nastavni sadržaj i motivisanje obrade. Nastavnikova uloga je motivirajuća i poticajna.

Nastavnik pokazuje slajd korištenjem PPT prezentacije, gdje precizira prvi problemski zadatak, te daje učenicima sljedeću informaciju:

Poznati istraživač vas je zamolio da mu pomognete u rješavanju jednog problema. On se nalazi na jednom ostrvu na kojem nema električne energije, niti telefonske linije. Međutim, kako bi od njegovih istraživanja koristi imala civilizacija, morao je slati informacije, pa je koristio solarne ploče kako bi imao energiju i satelitski telefon. Drvo je smetalo solarnim pločama da prima dovoljnu količinu svjetlosti od sunca, pa je istraživač vašem odjeljenju poslao pitanje da li smije srušiti drvo, a da ne ošteti solarne ploče. Vi ste mu poslali

odgovor da izmjeri dužinu od drveta do solarnih ploča, te ugao pod kojim se vidi drvo kada stoji pored solarnih ploča. Istraživač vam je poslao odgovor na vaše pitanje. Da li pod ovim uslovima smije srušiti drvo?



Pomozite istraživaču da izračuna da li smije srušiti drvo, a da ne sruši solarnu ploču.

II *Definisanje problema*

Učenik se susreće s nečim nejasnim i nepoznatim. Ovdje dolazi do raščlanjivanja problemske situacije na njene osnovne dijelove poznato–nepoznato–traženo.

Posmatranjem slike učenici definišu problem. Uočavaju da trebaju izračunati visinu drveta (katetu h), na osnovu ako su im zadate vrijednosti veličine ugla α i druge katete (udaljenost solarnih ploča od drveta). *Ovo je naš zajednički problemski zadatak.* Učenici zaključuju da, ako je visina drveta veća od zadane udaljenosti, drvo ne smiju srušiti, jer postoji mogućnost da sruši solarnu ploču.

U ovom trenutku ne znamo postupak za izračunavanje potrebne vrijednosti, ali ćemo to zajedno OTKRITI.

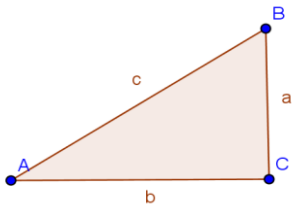
III *Postavljanje hipoteza*

Nastavnik podstiče učenike na razmišljanje, oni iznose i predlažu hipoteze za rješavanje postavljenog problemskog zadatka. Ovdje dolazi do izražaja učenikova kreativnost i domišljatost. Na osnovu prethodnih znanja i iskustava, učenici postavljaju hipoteze, odbacuju one koje nisu prihvatljive. Nalaze se u fazi inkubacije kada dovode u pitanje svoje ideje i stavove. U ovoj fazi očekuje se traganje, a moguće je i lutanje i vraćanje na početak i postavljanje novih hipoteza.

Koja nam prethodna znanja mogu pomoći da riješimo ovaj problem? Pretpostavljeni odgovori su da će učenici reći da bi zadatak bio lako riješen ako bi imali zadanu hipotenuzu, jer bi se tada rješenje svodilo na primjenu Pitagorine teoreme. Drugi očekivani odgovor jeste da ako znamo vrijednost jednog oštrog ugla u pravouglom trouglu, tada znamo i vrijednost drugog oštrog ugla, jer su ovi uglovi komplementni.

S obzirom da se radi o nastavnom gradivu s kojim se učenici nisu u svom ranijem matematičkom obrazovanju ranije susretali, nastavnik im dijeli nastavne listiće sa definicijama trigonometrijskih funkcija koje moraju prevesti u formule kada je zadan pravougli trougao sa standardnim oznakama.

Nastavni listić za samostalni rad učenika
Dopunite i prepišite u svesku:



Posmatrajte pravougli trougao ABC.

Stranice a=BC i b=AC pravouglog trougla ABC nazivaju se _____,
a stranica c=AB naziva se_____.

Uočimo oštri ugao α u pravouglom trouglu ABC. Dopunite i označite uglove na slici:

Ugao α leži na kateti _____. Tu katetu nazivamo NALEGLA KATETA.

Nasuprot uglu α leži kateta _____. Tu katetu nazivamo SUPROTNA KATETA.

Sljedeće definicije primijenite na pravougli trougao ABC.

Def.1. Sinus oštrog ugla jednak je odnosu dužina suprotne katete i hipotenuze,

$$\sin\alpha = \frac{SUPROTNA_KATETA}{HIPOTENUZA} \quad \text{tj. } \sin\alpha = - .$$

Def.2. Kosinus oštrog ugla jednak je odnosu dužina nalegle katete i hipotenuze,

$$\cos\alpha = \frac{NALEGLA_KATETA}{HIPOTENUZA} \quad \text{tj. } \cos\alpha = - .$$

Def.3. Tangens oštrog ugla jednak je odnosu dužina suprotne i nalegle katete,

$$tg\alpha = \frac{SUPROTNA_KATETA}{NALEGLA_KATETA} \quad \text{tj. } tg\alpha = -.$$

Def.4. Kotangens oštrog ugla jednak je odnosu dužina nalegle i suprotne katete,

$$ctg\alpha = \frac{NALEGLA_KATETA}{SUPROTNA_KATETA} \quad \text{tj. } ctg\alpha = -.$$

Koliko iznosi visina drveta? Riješite zadatak u svesci.

IV *Rješenje problema, verifikacija hipoteze*

Kritičkim preispitivanjem procjenjuju dobijena riješenja, jer naročito je važno da učenici razmisle da li je rješenje koje su dobili prihvatljivo. Nakon rješenog nastavnog listića, učenici primjećuju da je najpogodnije zadatak riješiti primjenom formule za tangens ugla. Neki učenici će naći komplement ugla α, koji ovdje iznosi 57°, te na osnovu njega i zadane dužine katete naći dužinu druge katete, koja je traženo rješenje.

V *Analiza rezultata i zaključaka*

Proučavanje dobijenog rješenja i traženje drugog načina i drugih puteva rješenja zadatka. Učenik na tabli crta trougao sa zadanim elementima i objašnjava postupak rješavanja uz eventualnu pomoć i sudjelovanje ostalih učenika. Problemski zadatak je riješen i oba načina rješavanja se interpetiraju pred tablom. Učenicima se daje novi zadatak, kako bi se provjerilo da li razumiju primjenu definicija trigonometrijskih funkcija pravouglog trougla na praktičnim zadacima.

VI *Provjera rezultata na težim problemskim zadacima*

U zadnjoj etapi se proučavaju mogućnosti proširenja i poopćenja postavljenog problemskog zadatka.

Brod je isplovio iz luke Argones i krenuo prema luci Benos, koja je 1.270 km udaljena od Argonesa. Nakon pređenih 850 km, zbog nevremena, veliki valovi su brod potisnuli prema sjeveru. Uvidom u nautičke karte kapetan je uvidio da je brod skrenuo s kursa 150 km i tako plovio 220 km. Pomozite kapetanu da izračuna koliko km je ostalo do njihovog odredišta tj. luke Benos?

4. *Zaključak*

Jedan od osnovnih zadataka nastave matematike jeste osposobiti učenika za razumijevanje matematičkih pojava i zakonitosti i primjenu naučenog u svakodnevnom životu, jer je matematika jedna od temeljnih nauka koja se najneposrednije i najdirektnije osjeća u svim prirodnim i gotovo svim društvenim naukama. Matematika je po prirodi svojih sadržaja bogata mnoštvom problemskih zadataka koje učenici mogu rješavati i proučavati vježbajući naučnu metodu mišljenja. Učenik prilikom postavljenog problemskog zadatka uočava cilj, ali put do tog cilja mu je nepoznat, pa učenje rješavanjem problema u nastavi matematike podrazumijeva učenikovu misaonu i stvaralačku aktivnost.

Nastavnik je u problemskoj nastavi organizator misaone djelatnosti učenika. Pripremajući se za nastavu, nastavnik mora napraviti plan djelovanja, odnosno mora projektovati svoj proces rada i anticipirati misaonu aktivnost u svakoj od etapa nastavnog sata. Osim obrazovnih ciljeva, kao što su usvajanje pojmova, pravila, definicija, tvrdnji koje učenici trebaju usvojiti na nastavnom času, problemskom nastavom se postižu odlični odgojni efekti, jer se ovim načinom rada mijenja položaj učenika u nastavi, razvija kod njih interes, motiviše ih, budi radoznalost, podstiče na samostalan rad, te razvija stvaralačko mišljenje.

Literatura

Branković 2004: D. Branković, Interaktivno učenje u problemskoj nastavi, u: *Interaktivno učenje*, Banja Luka, Ministarstvo prosvjete i UNICEF.

Ćurčić, Pikula, Milinković 2006: M. Ćurčić, M. Pikula, D. Milinković, Interaktivno učenje u problemskoj nastavi, u: *Zbornik radova Učiteljskog fakulteta*, Užice, br. 7, str. 27–42.

Deese 1958: J. Deese, *The Pshyhology of learning*, New York, MacGraw-Hill Company.

Kadum 2005: V. Kadum: *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi*, Igsa, Pula.

Krstić 2005: L. Krstić: Interaktivna nastava primjenom problemske nastave, u: *Obrazovna tehnologija* br. 3–4.

Kurnik 1999: Z. Kurnik, Posebne metode rješavanja matematičkih problema, u zborniku: *Utjecaj rješavanja problema na obrazovni učinak u nastavi matematike*, Rovinj, Hrvatsko matematičko društvo.

Kurnik 2006: Z. Kurnik, Heuristička nastava, u: *Matematika i škola*, časopis za nastavu matematike, Zagreb, broj 34.

Kurnik 2002: Z. Kurnik, Problemska nastava, u: *Matematika i škola*, časopis za nastavu matematike, Zagreb, broj 15.

Muminović 1998: H. Muminović Mogućnosti efikasnijeg učenja u nastavi, I. P. Svjetlost, Sarajevo.

Ničković 1984: R. Ničković, Problemska nastava kao kompleksni didaktički sistem, u: *Problemsko učenje u nastavi*, Loznica.

Vait, Pikula 2007: D. I. Vait, M. Pikula, Stanje učenja matematike u osnovnoj školi, u: *Nastava matematike*, LII, 1, str.1–11.

Сања М. Маричић[*]
Крстивоје М. Шпијуновић
Универзитет у Крагујевцу
Учитељски факултет Ужице

Оригинални научни рад

МЕТОДИЧКО МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАЊЕ УЧИТЕЉА У СРБА У XIX И XX ВЕКУ[**]

I

Први организовани облици образовања учитеља у Европи везују се за име немачког педагога А. Х. Франкеа (A. H. Frankcke 1663–1727) који отвара *Seminaruim praeceptorum (Расадник учитеља*). Његове идеје настављају Ц. Хекер (J. Hecker 1707–1768) и Ј. И. Фелбигер (J. I. Felbiger 1724–1788) који учвршћује и институционализује образовање учитеља претварајући га у државно. У Сагану Ј. И. Фелбигер организује „Семинар“ у оквиру кога образовање стичу и први српски учитељи, Теодор Јанковић Миријевски, Аврам Мразовић и Стефан Вујановски, који своје образовање стављају у службу организовања институција за образовање учитеља у Срба.

Такво образовање претпостављало је и оспособљавање учитеља за наставу математике. Међутим, методика наставе математике, као посебна научна дисциплина, почела се развијати крајем 18. и почетком 19. века захваљујући, првенствено радовима швајцарског педагога Ј. Песталоција (J. Pestalozzi 1746–1827). На тој основи у 20. веку почиње све интензивније интересовање за проблеме методике наставе математике. Тако је 1905. године одржана *Меранска конференција*, а потом и *Римски конгрес* (1908) на коме је, између осталог, основана *Међународна комисија за наставу математике* – ICMI (International Commision on Mathematical Instruction). За првог председника те комисије изабран је Ф. Клајн (F. Klein 1849−1925). Тиме су створени услови да методика наставе математике постане самостална научна дисциплина. Када је у питању методичко математичко образовање учитеља у Срба, онда га треба посматрати у контексту токова који су се дешавали на овом плану у Европи, с једне стране, и у контексту друштвено-историјских услова у којима су Срби живели, с друге стране.

[*] sanjamaricic10@gmail.com

[**] Рад је настао у оквиру пројекта *Настава и учење: проблеми, циљеви и перспективе*, бр. 179026, чији је носилац Учитељски факултет у Ужицу, а који финансира Министарство просвете и науке Републике Србије.

II

Срби у 18. веку немају своју државу већ живе подељени између две царевине. Северно од Саве и Дунава Срби живе у Аустроугарској царевини, а јужно од Саве и Дунава у Отоманској империји.

На северу образовање учитеља у Срба започиње знатно раније него код Срба који живе јужно од Саве и Дунава. Тако је у Сомбору 1778. године Аврам Мразовић (1756–1826) отворио „Норму“ која, по речима Н. Поткоњака, представља „први световни институционализовани облик образовања српских учитеља“ (2006: 156). Методичко математичко образовање учитеља у овој школи одвијало се под доминантним утицајем Ј. И. Фелбигера у оквиру предмета *Методика са педагогијом*. То је била методика по *Сагинској методи* која се изучавала из Фелбигеровог уџбеника *Methodenbuch* (1774). Овај уџбеник Теодор Јанковић Миријевски 1776. године преводи са немачког на славеносербски језик под називом *Ручнаја књига потребна магистром илирических неунитских малых школъ в Цесаро* и ова књига у то време представља „једини приручник у српским основним школама за рад учитеља“ (Поткоњак 2006: 158).

За разлику од Срба који су живели северно од Саве и Дунава и који су имали значајан напредак у друштвеном, културном и образовном погледу, напредак Србије и Срба који су живели у Отоманској империји наступа у току Првог српског устанка, доласком Доситеја Обрадовића, који своје велико знање и искуство ставља у службу развоја просвете и школства. Његовом заслугом основана је *Велика школа* (1808) у Београду, као и велики број народних школа ван цркава и манастира у којима су учитељи били световна лица. Вредно помена је и отварање *Богословије* у Београду чији је задатак, по речима Доситеја Обрадовића, да „синове српске спреми и за будуће свештенике и за учитеље у нормалним (основним) школама“ (према: Ћунковић 1971: 12–13).

Мада су, како истиче Вук Стефановић Караџић, за време Првог српског устанка „постављене школе готово по свим варошима и градовима, а и по гдје којим селима...“ (према: Поткоњак 2006: 226), већина школа овог времена само су се условно могле назвати „школе“, јер је школа била свака већа просторија у породичној кући или задружном дому, у којој често није било ни опреме ни намештаја.

Пропаст Првог српског устанка (1813), почетак Другог српског устанка (1815), као и борбе против Турака, онемогућавали су рад и организовање школа. Тек 1830. године, када Србија *Хатишерифом* добија одређене аутономије, поново се стварају услови за отварање школа. Коначно, *Сретењским уставом* из 1835. године установљава се *Попечитељствио црквених дела и просвете* и држава преузима бригу о развоју школства.

Педагошко, дидактичко и методичко образовање учитељи су у *Богословији* могли стећи само у оквиру једног предмета, под називом

Метод учитељски. Овакво образовање учитеља задржано је дуги низ година. Новина се дешава 1938. године „када се образовање учитеља продужава на три године, али се садржај дидактичко-методичког образовања не мења. Једина измена је у називу предмета који их је стручно оспособљавао“ (Шпијуновић, Маричић 2011: 149). Отварањем народних школа јавља се и већа потреба за образованим учитељима, па се њихово образовање поверава гимазијама у којима се уводи наставни предмет *Педагогика са методиком*. Овакво образовање учитеља при гимназијама задржано је све до 1853. године.

Дуго времена требало је да се створе услови за отварање прве учитељске школе у Србији. То се дешава доношењем *Закона о уређењу учитељске школе* 1870. године у коме стоји: „Да би основне школе добивале способне учитеље држава се брине за образовање учитеља тих школа, па зато се заводи у Србији учитељска (педагогијска) школа“ (према: Станисављевић 1992: 110). Већ 1871. године у Крагујевцу отвара се прва школа за образовање учитеља у Срба у којој се образују учитељи у трајању од три школске године. Друштвене прилике условљавају да се 1877. године школа из Крагујевца премести у Београд где се образовање учитеља продужава на четири године. У Нишу се 1881. године отвара још једна учитељска школа, тако да се образовање учитеља одвија у оквиру ове две школе. Школа из Београда 1896. године пресељена је у Алексинац, а учитељска школа из Ниша 1898. године у Јагодину.

Као што се види, образовање учитеља у Срба у 19. веку мењало се, како у погледу трајања, тако и у погледу броја и назива наставних предмета у оквиру којих су учитељи стицали математичко, педагошко-дидактичко и методичко математичко образовање (табела 1).

Табела 1: Наставни предмети у учитељским школама у оквиру којих су учитељи стицали математичко, педагошко–дидактичко и методичко математичко образовање у 19. веку (Шпијуновић, Маричић 2011: 151–152)

Школа за образовање учитеља	*Година*	*Математичко образовање*	*Педагошко-дидактичко образовање*	*Методичко математичко образовање*
Норма	1778.	Рачун	Методика са педагогијом	
Препарандија Сент Андреја	1811.	Математика, Рачун, аритметика, алгебра и геометрија	Педагогија са методиком	
Учитељска школа Сомбор	1855/1856.	Аритметика	Наука о васпитању у настави	
	1862/1863.	Рачун, Геометрија	Општа педагогија, Педагогија наособна, Историја педагогије и наука о устројству народних школа, Дидактика, Наособни метод учитељски	Рачун са Методиком рачуна
	1874/1875.	Рачун, Геометрија	Наука о васпитању, Дидактика и наука о устројству школе, Наособна методика, Повесница васпитања и наставе, Школски рад	Рачун са методиком, Геометрија са методиком и праксом
	1892/1893.	Математика	Педагогика, Историја педагогије, Дидактика и методика са науком о држању школе и устројству школе	
Богословија Београд	1810.		Метод учитељски	
	1938.		Педагогика са методиком	
Учитељска школа Крагујевац	1871/1872.	Математика (аритметика, алгебра, геометрија)	Педагогика (Методика, Методика и дидактика, Теорија педагогије, Историја педагогије), Школски рад	
Учитељска школа Београд	1881.	Рачун, Практична геометрија	Педагогика општа и примењена	
Учитељска школа Београд/Ниш	1886.	Рачун са геометријским основама и премеравањем	Педагогика	
Учитељска школа Алексинац	1896.	Математика, Практична геометрија	Педагогија, Школски рад и методика основношколског узраста	
Учитељска школа Јагодина	1898.	Геометрија и минералогија, Геометријско мерење	Педагогика, Практични рад са методиком	

Методичко математичко образовање, издвојено у оквиру посебног предмета, први пут појављује у наставном плану учитељске школе у Сомбору школске 1862/1863. године у оквиру предмета *Рачун са Методиком рачуна*. У наставном плану исте школе школске 1874/1875. године поред *Методике рачуна* уведен је још један предмет *Геометрија са методиком и праксом*. У истом периоду учитељи који су се образовали у учитељским школама које су се територијално налазиле јужно од Саве и Дунава у својим наставним плановима немају посебно издвојен предмет *Методика наставе математике.* Образовање за наставу математике учитељи су у овим школама стицали у оквиру предмета који су имали за циљ стицање општег педагошко-дидактичког образовања. То је видљиво и из назива тих предмета у чијем називу је садржана реч *методика* (*Методика са педагогијом*, *Педагогија са методиком*, *Наособни метод учитељски*, *Наособна методика*, *Метод учитељски* и други). По речима Р. Макарића „целокупно излагање методике се тада сводило на објашњавање правила и поступака у обради основношколског градива“ (1978: 173). Упоредо са теоријским оспособљавањем значајан елемент методичког математичког образовања учитеља представља и практично оспособљавање учитеља за реализацију наставе математике у школама, које је било укључено у планове учитељских школа у оквиру предмета *Школски рад.*

III

Крај 19. и почетак 20. века у Србији прати недостатак школованих учитеља. Завршетком Првог светског рата (1918) и стварањем државе Краљевине Срба, Хрвата и Словенаца, а потом и Краљевине Југославије (1930) дошло је до знатних измена у образовању учитеља. Ратне прилике утицале су на смањење броја учитеља. Из тих разлога покрећу се иницијативе за поновно отварање учитељских школа које су због рата престале са радом, а упоредо са тим организују се и скраћени курсеви за образовање учитеља. Учитељске школе, које су радиле пре Првог светског рата настављају са радом и то углавном по плану из 1905. године, са малим изменама, а образовање учитеља скраћује се на три године. Током 1919. и 1920. године отварају се и посебна одељења при гимназијама у оквиру којих се образују учитељи, а које ће касније прерасти у учитељске школе. *Законом о учитељским школама,* донетим 1929. године извршено је уједначавање свих учитељских школа, као у погледу назива, тако и у погледу организације и трајања (пет година), наставних планова и програма.

За време Другог светског рата долази до смањења броја учитеља, а већина школа за образовање учитеља нередовно ради. Завршетком Другог светског рата учитељске школе настављају са радом, али се због

недостатка учитеља школовање скраћује на четири школске године, да би се школске 1954/1955. године поново вратило на пет година.

Традиција школовања учитеља на средњошколском нивоу, која је трајала више од једног и по века, напуштена је 1971. године када је донет *Закон о педагошким академијама* („Службени гласник СР Србије“ бр. 14). Нова прекретница у образовању учитеља у Србији десила се 1993. године када се образовање учитеља диже на факултетски ниво и оснивају учитељски факултети.

У контексту промена које су се дешавале у 20. веку у Србији интересантно је погледати наставне предмете у оквиру којих су учитељи стицали математичко, педагошко-дидактичко и методичко математичко образовање (табела 2).

Табела 2: Наставни предмети у оквиру којих су учитељи стицали математичко, педагошко-дидактичко и методичко математичко образовање у 20. веку

Школска година	*Математичко образовање*	*Педагошко-дидактичко образовање*	*Методичко математичко образовање*
1905.	Математика са Геометријским цртањем	Педагогија (Историја педагогије, Општа педагогија, Методика, Школски рад)	
1919/1920.	Математика	Педагогија, Методика и школски рад	
1926.	Математика	Педагогија са историјом, Методика, Школски рад, Школска администрација	
1932/1933.	Математика	Општа педагогика, Историја педагогике, Методика, Школски рад, Школска администрација	
1946.	Математика	Општа педагогија, Методика и практичан рад, Историја педагогике	
1949/1950.	Математика	Општа педагогија, Историја педагогије, Методика и школски рад	
1950/1951.	Математика	Општа педагогија, Историја педагогије, Методика и школски рад	
1954.	Историјско-географски семинар (математика)	Општа педагогија, Педагошко-психолошки семинар (методика и школски рад)	
1963.	Математика	Педагогија, Методика и практичан рад	
1968.	Математика	Педагогија, Методика и педагошка пракса	
1971.	Математика	Општа педагогија, Дидактика, Педагошка пракса	Методика наставе математике
1986.	Математика	Педагогија I и II, Дидактика	Методика наставе математике
1993.	Математика	Педагогија, Дидактика, Школска и породична педагогија, Методологија педагошких истраживања, Пракса	Методика наставе математике

Као што се види и математичко и педагошко-дидактичко образовање учитеља у Срба у 20. веку заступљено је у свим наставним

плановима у школама за образовање учитеља и није се знатније мењало све до оснивања педагошких академија. Учитељи су садржаје из математике изучавали у сваком разреду (са по два или три часа недељно). Педагошко-дидактичко образовање учитељи су стицали из предмета *Педагогија, Историја педагогије, Методика* и *Школски рад* и то у оквиру последња два разреда школе за образовање учитеља. Оснивањем педагошких академија ово образовање се допуњује још једним предметом (*Дидактика*), важним за образовање учитеља.

Методичко математичко образовање учитеља у Србији најчешће, све до 70-их година прошлог века, било је „испреплетано и уткано у опште педагошко-дидактичко и математичко образовање, а ретко се стицало у оквиру посебног наставног предмета“ (Шпијуновић, Маричић 2011: 153). Коначно, наставни предмет *Методика наставе математике* у наставним плановима школа за образовање учитеља у Србији постао је обавезан тек у другој половини 20. века, односно тек са оснивањем педагошких академија за образовање учитеља 1971. године.

IV

Упркос томе што се два века образовање учитеља спроводило без посебног предмета *Методика наставе математике*, продукција уџбеника и приручника који се односе на методичка питања наставе математике говори да оно није било запостављено.

Први уџбеник код Срба, важан за методичко математичко образовање, под називом *Ри́ководство во аритметики*, написао је Стефан Вујановски 1777. године. Потом 1794. године Аврам Мразовић објављује књигу под називом *Ри́ководство къ наи́ци числителноі: во ѵ̀потребленїе славено-сербскихъ народнихъ ѵ̀чилищъ*. Прво издање овог уџбеника штампано је у Бечу, у типографији Стефана Новаковића и имало је 91 страницу. Касније овај уџбеник штампан је у још 9 издања: 1798, 1802, 1804, 1806, 1810, 1818, 1828, 1833, 1837. године на 95 страна.

Значајно је напоменути и рад Платона Атанацковића (1788–1867) који је за методику наставе математике важан јер је написао више књига од којих издвајамо:

- *Методіка рачуна на паметъ у союзу съ многобройныма задаткама къ упражненію за I разредъ народныхъ училишта у Аустрійскомъ Царству: за Учителе и Предуготовнике*, Беч, 1855, 194 стр.
- *Књига упражненія при наставленію у рачунаню за ученике II и III разреда сербскихъ народнихъ училишта у Аустрійскомъ Царству*, Беч, 1855, 192 стр;
- *Књига упражненія при наставленію у рачунаню: за ученике III разреда сербскихъ народнихъ училишта у Аустрійскомъ Царству*, Беч, 1857, 98 стр;

– *Методіка рачунаня съ ціфрама у сразмерномъ союзу съ рачунанемъ у глави: руководство къ употребленю књиге упражненія при наставленію рачуна у III и IV разреду народныхъ училишта: за Учителе и Предуготовнике къ учит. Званію*, Беч, 1857, 244 стр;
– *Методіка рачуна на памет'у союзу съ многобройныма задаткама къ упражненію за I разредъ народныхъ училишта у Аустіскомъ Царству: за Учителе и Предуготовнике*, Беч, 1860, 160 стр;
– *Књига упражненія у рачуну за сеоске школе у Аустрійскомъ Царству*, Беч, 1860, 130 стр;

Осим наведених уџбеника постојали су и разни приручници и упутства за рад учитеља. Тако је 1844. године Јован Стерија Поповић (1806–1856) написао *Наставленіє за учителѣ основны училишта* у коме су у првом поглављу дата методичка упутства за држање наставе различитих предмета (према: Поткоњак: 2006: 239). Својом књигом *Кратко упутство за србске народне учителъ* Ђорђе Натошевић (1821–1887) положио је темеље наше научне дидактике и методике већине основношколских предмета (Баковљев 1987). Прво издање ове књиге штампано је у Темишвару 1857. године на 14 страна, а друго, знатно допуњено, на 136 страна, у Новом Саду 1861. године. За методику наставе математике значајана је пета глава ове књиге која се односи на наставу математике и насловљена је као „*Наука рачунаня*“ (Натошевић 1861: 92). О вредности овог приручника за учитеље најбоље сведочи универзалност и савременост идеја које је аутор изложио у виду упутстава која су и данас исто тако актуелна и важна, од којих издвајамо: ученицима не давати готова знања, већ их водити да их сами открију; питања увек постављати свим ученицима у одељењу; непажљиву деце чешће прозивати да одговарају; не журити са одговорима ученика, већ им дати прилику да размисле; одговори ученика морају бити потпуни, и друга. Приручник после општих назнака о раду са ученицима у настави математике даје методичка упутства за наставу рачуна кроз 4 целине: 1) Рачун у I разреду или са букварцима; 2) Рачун у II разреду или са часловцима; 3) Рачун у III разреду или са псалтирцима и 4) Рачун у IV разреду главни школа (Натошевић 1861: 94–100).

У првој учитељској школи у Крагујевцу (1872) методичко математичко образовање учитељи су стицали у оквиру предмета *Методика*, који се изучавао и првој године са 3 часа седмично и *Методика и дидактика* у другој години са 5 часова недељно. Предавач је био Стеван Д. Поповић за кога стоји да је био „писац првих приручника из методике математике за српске учитеље“ (Вујисић-Живковић, Зељић 2011: 152). Његово стваралаштво говори да је оквиру ових предмета било заступљено и методичко математичко образовање, што показују следећи радови:

– *Практично предавање из рачуна 1*; 1869, Београд, 92 стране

– *Практично предавање из рачуна 2*; 1869, Београд, 92 стране
– *Рачуница за основне школе у Србији: усмени део (ручна књига за учитеље), Св. 1, За I и II разред*, 1898, Београд, 283 стране
– *Рачуница за основне школе у Србији: усмени део:(ручна књига за учитеље). Св. 2, За III и IV разред*, 1897, Београд, 364 стране

У истом периоду Сима Милојевић 1872. године издаје *Упутство у практичном рачунању, за учитеље основних школа, по методи Грубовој*. Затим Светозар Милетић издаје следеће радове:

– *Практичан поступак при настави у рачуну за I разред српске народне школе*, 1877, Панчево.
– *Поступак при настави у обичним разломцима*, 1878, Панчево.
– *Поступак при настави у десетичним разломцима за основне школе,* 1879, Панчево.
– *Практичан поступак при настави у рачуну за II разред српске народне школе,* 1879, Панчево.
– *Практичан поступак при настави у рачуну за трећи разред,* 1880, Панчево.

У 20. веку број уџбеника и приручника за методику наставе математике расте. Навођење свих уџбеника премашује оквире овог рада, па ћемо из тих разлога поменути само неке:

– Аџић, С. М. (1900): *Из методике рачунања*, Просветни гласник.
– Јовановић, Ј. (1905): *Методика рачунске наставе у основној школи*, Јагодина. (Издата су још два издања под називом *Методика рачунске наставе у народној школи* 1921. и 1926. године.)
– Младеновић, А. (1940): *Методска упутства за рад у основим школама*. Београд: Нолит.
– Јањушевић, М. (1946): *Почетна настава рачуна у основној школи*. Београд: Просвета.
– Ђорђевић, М., Ђорђевић, Ж. (1948): *Методика наставе рачуна у основној школи*, Београд: Просвета.
– Моачанин, П. (1956): *Методика наставе рачуна и геометрије за учитељске школе*. Београд: Нолит.

Поред наведених аутора неопходно је поменути и рад Станка Прврановића, који је својом продукцијом уџбеника методике наставе математике, уџбеника математике за ученике, збирки задатака и приручника за учитеље оставио значајан траг у развијању и унапређивању методике наставе математике у Србији.

Закључак

Као што се види, традиција образовања учитеља у Срба дуга је више од два века. Током овог периода образовање учитеља стално се мењало и усавршавало, како у погледу организације, тако и у погледу

трајања и заступљености појединих наставних предмета. Упркос томе што *Методика наставе математике*, као посебан предмет постоји у наставним плановима тек од 70-их година 20. века из анализе образовања учитеља, продукције уџбеника и приручника за ову наставу видимо да методичко математичко образовање учитеља никада није било запостављено и да је увек представљало саставни део образовања учитеља у Срба.

Литература

Баковљев 1987: М. Баковљев, Ђорђе Натошевић, *Педагошка стварност*, 9–10, Нови Сад.

Вујисић-Живковић 2011: Н. Вујисић-Живковић, М. Зељић, *Наставни планови и програми из рачунице у основним школама у Србији у XIX веку*, Педагогија, LXVI (1), 146–160.

Гавриловић 1978: Н. Гавриловић, Оснивање и рад српске учитељске школе (1812–1848), у: *Две стотине година образовања учитеља у Сомбору (1778–1978)*, Сомбор, 31–80.

Ђорђевић 1958: Ж. Ђорђевић, *Историја васпитања у Срба*, Београд: Научна књига.

Јанковић 2009: П. Јанковић, М. Мишков, Теодор Јанковић Миријевски – Ручнаја књига, у *Образовање и улога учитеља у српском друштву кроз историју (XVIII–XX век)*, Сомбор, 61–76.

Јовановић 1921: Ј. Јовановић, *Методика рачунске наставе у народној школи*, Београд, „Заштита“, Друштво за потпомагање, васпитање и заштиту деце.

Макарић 1978: Р. Макарић, Учитељска школа у другој половини 19. и почетком 20. века (1848–1918), у: *Образовање и улога учитеља у српском друштву кроз историју (XVIII–XX век)*, Сомбор, 81–241.

Натошевић 1861: Ђ. Натошевић, *Кратко упутство за србске народне учителъ* (друго поправљено изданъ), Нови Сад.

Поткоњак 2006: Н. Поткоњак, *Образовање учитеља у Срба*, Ужице, Учитељски факултет.

Станисављевић 1992: М. Станисављевић, *Два века српских уџбеника: Сентандреја, 1717. – Крф, 1918*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Тешић 2007: В. Тешић, Педагошко образовање наставника у школама Србије до 1918. године (општи аспект), у: *Образовање и усавршавање наставника – историјски аспект;* Ужице, Учитељски факултет, 11–28.

Ћунковић 1971: С. Ћунковић: *Школе и просвета у Србији у XIX веку*, Београд, Педагошки музеј.

Шпијуновић 2011: К. Шпијуновић, С. Маричић, Почеци методичког математичког образовања учитеља у Срба, у: *Учитељ у балканским културама*. Врање, Учитељски факултет, 143–155.

Видосава Остојић*
Универзитет у Подгорици
Филозофски факултет Никшић
Студијски програм Образовање учитеља Стручни рад

ОБРАЗОВНА ПОЛИТИКА КАО ФАКТОР НЕУСПЈЕХА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНИМ ШКОЛАМА ЦРНЕ ГОРЕ

Познато је да криза друштва производи кризу школства. Како је црногорско друштво последње двије деценије у свакојакој врсти кризе, то је и школство, неминовно, морало осјетити посљедице таквог стања. Ако се зна да школство ни прије ове дводеценијске кризе није било предмет дужне пажње државе, онда је јасно у каквом је стању данас. Наиме, образовни резултати цјелокупног школства у Црној Гори су на врло ниском нивоу, а из математике су на још нижем од укупног просјека.

Поред материјалне кризе настале пустошењем земље кроз тзв. транзицију, па духовне, културне и моралне кризе, Црну Гору је у поменутом периоду захватила и она најгора, другим друштвима и државама непозната – криза идентитета. Стога је просветна власт, која је дио државне власти, цио школски систем ставила у функцију учвршћивања црногорског идендитета. Кад се ово има у виду, лако је схватити зашто је школство у Црној Гори у тако лошем стању и зашто, поред општих, многим школским системима својствених, има и специфичне факторе који утичу на (не)успјех у настави уопште, па и настави математике.

Неуспјех у школском учењу није проблем само основношколског, него и средњошколског и високошколског образовања. И није проблем само математика, него готово сви предмети који се уче у школи. Но, евидентно је да је од свих школских предмета неуспјех највећи проблем управо у предмету математика. У различитим школским системима, различитог је интензитета.

Објашњавајући зашто је важно да ученици знају математику, Р. Шћепановић (2004: 91) сматра: „Ученици који знају математику могу бити не само добри професори математике, него и добри инжењери, економисти, љекари, правници, адвокати, судије итд. Јер математика је и начин мишљења који у мору хаотичних информација може да направи логички ред и доведе до правилног закључка. Зар то није посао једног инжењера, љекара, судије, адвоката?“

Живимо, дакле, у времену у којем се живот не може замислити без математике и примјене њених достигнућа. Стога дјелује парадоксално да, на једној страни математика све више треба, а на другој страни је ученици све мање уче и све слабије знају. Зашто је то тако? Да бисмо бар донекле

* vidaostojic.ssr@gmail.com

схватили узроке овога и многих других парадокса везаних за неуспјех, указаћемо на оне кључне чиниоце који доводе до неуспјеха у настави математике уопште и, посебно на оне који су специфичност школског система Црне Горе.

Образовни систем у Црној Гори, у коме је транзиција узроковала немале промјене, бременит је проблемима. Вишеструки су разлози због којих ученици основне школе, из године у годину, показују све слабији успјех, из математике посебно.

Опште је позната чињеница да већина ученика у Црној Гори нема интересовања за математику. Ово је један од јаких разлога због којих је знање из овог предмета на недопустиво ниском нивоу. Клима која се преноси с кољена на кољено – да је математика тешка и да је само одабрани могу савладати, као да обезбјеђује оправдање за неучење, а тиме и олакшицу великом броју ученика пред својим родитељима, вршњацима и наставницима за унапријед *загарантован* неуспјех. Но, ово је само један од чинилаца који није без утицаја на успјех ученика из математике. Поред њега, фактора неуспјеха у школском учењу, па тиме и у учењу математике, има још много. Стога је ова тема увијек изискивала посебну пажњу разних педагошких теоретичара психолога, педагога, социолога, математичара.

У зависности од теоријских поставки од којих се полази у истраживању неуспјеха у школском учењу, у литератури се сусрећу различита схватања значаја појединих фактора неуспјеха, као и различити начини њихове класификације. На основу проучаване литературе која третира проблем школског неуспјеха уопште, констатујемо да су, због различитих теоријских приступа, направљене различите класификације узрока неуспјеха, различите дефиниције неуспјеха, различите методе идентификовања слабих ученика, различити предлози за сузбијање неуспјеха итд.

С обзиром на чињеницу да је таксономски модел најподеснији за проучавање бројних и различитих фактора утицаја на неуспјех у школском учењу, истраживачи ове области правили су разне класификације, и по различитим основама. Разврставане су на основу исходишта – одакле потичу (објективне неједнакости, субјективне неједнакости), на основу онога на шта утичу (постигнуће, мотивација, трајност знања,...), на основу *снаге* утицаја (кључни, паразитски) итд. Педагошки теоретичари су их посматрали као позитивне и негативне, спољашње и унутрашње, директне и индиректне, кључне и паразитске, објективне и субјективне, друштвеноекономске, педагошке и породичне, интелектуалне и неинтелектуалне, екстерне и интерне.

Класификацијом узрочника неуспјеха у школском учењу уопште и у учењу математике, специјално, бавили су се многи. Због различитих теоријских приступа, направљене су и различите опште класификације. Од многих класификација фактора неуспјеха, које срећемо у педагошкој литератури, поменућемо само неке.

У ранијој традиционалној дидактичкој теорији говорило се о факторима наставног процеса као *дидактичком троуглу* у који спадају: 1. наставник, 2. ученик и 3. наставни садржаји.

Касније су просвјетне власти и педагошки теоретичари традиционалног школства, узроке неуспјеха сврставали у двије велике групе: 1. екстерни фактори (социолошки, економски, географски и културни чиниоци) и 2. интерни фактори или личне неједнакости (тјелесни, психолошки, сензорни и ментални чиниоци) (Савица 2000: 77).

Савремена дидактичка теорија сматра да је традиционална подјела фактора неуспјеха у школском учењу ограниченог карактера из разлога што на наставни процес, а тиме и успјех у учењу, утичу и многи други фактори, као што су: 1. породичне прилике ученика, 2. школе за образовање наставника, 3. ниво развијености педагошке науке, 4. ниво развијености технике и технологије, односно богатство наставних средстава и помагала, 5.материјална основа наставног рада која је условљена економском ситуацијом и политичким приликама у држави и др. Сви поменути фактори, прожимајући се, утичу на (не)успјех ученика у школи. Стога, савремени педагошки теоретичари сматрају да је свеобухватнија подјела фактора неуспјеха у школском учењу на: 1. субјективне, 2. објективне, 3. директне и 4. индиректне.

Оно што је карактеристично за ову посљедњу подјелу јесте да она није извршена по истом основу. Наиме, подјела на субјективне и објективне факторе је подјела на основу њиховог исходишта или извора, а директне и индиректне факторе разликујемо по томе да ли утичу на неуспјех у учењу непосредно или *паразитски*, преко неког другог фактора.

П. Стојаковић (1983: 47) факторе који утичу на (не)успјех у учењу дијели у три велике групе. У првој су фактори везани за личност ученика (узраст, способности за учење и друге личне карактеристике). Другу групу чине фактори који су везани за средину (окружење, схватања о образовању младих). Трећу групу чине фактори везани са садржајима и задацима учења (сложеност материје која се учи, логичка структура садржаја и др.). Аутор наглашава прожимање и условљеност свих наведених група чинилаца.

Љ. Коцић (1988: 317) сматра да се бројни чиниоци који утичу на (не)успјех ученика могу, у зависности од тога одакле потичу, сврстати у четири групе. „Једни се, тако, могу везивати за самог ученика, за његове способности, мотивисаност, претходна знања и др. Други проистичу из породичних услова (образовни ниво родитеља, атмосфера у породици, материјалне прилике, могућности и спремност родитеља да пруже детету потребну помоћ и сл.). Трећу групу чине они чиниоци који произлазе из деловања шире друштвене средине (културни ниво средине, развијеност средине, услови живота и рада у њој и сл.). Четврта група чинилаца везује се за рад школа и наставника (припремљеност наставника за васпитно-образовни рад и квалитет тога рада, организација васпитно-образовног

рада, примена савремених метода и средстава у васпитно-образовном процесу, односи између ученика и наставника, целокупна атмосфера у школи и др.). У чиниоце који имају утицаја на успех ученика свакако треба убројити и програме, њихову адекватност и примереност узрасту, као и квалитет уџбеника и приручника којима се користе ученици."

Сличну подјелу чинилаца, са незнатном разликом у вредновању утицаја неких подфактора на успјех у учењу, прави и Л. Ћурић (1989: 59–66).

Н. Шарановић-Божановић (1984: 38) сматра да узроке неуспјеха треба истраживати у оквиру сљедећих категорија: 1. друштвеноекономски односи, 2. породица, 3. васпитно-образовни утицаји у оквиру школе и 4. субјективни фактори ученика.

Проучавајући факторе (не)успјеха даровитих ученика, Б. Ђорђевић (1995: 16) сматра да их треба истраживати у двјема основним областима: 1. узроци у области својстава личности и 2. узроци у области друштвеног (социјалног) амбијента, гдје убраја школу, породицу, ширу друштвену заједницу итд..

Проучавајући успјех ученика из математике код нас и у свијету, дошло се до закључка, да најбоља комбинација ученикових интелектуалних способности обезбеђује само око 50% успјеха у школском учењу. Остало 50% успјеха зависи од тзв. неинтелектуалних фактора. С обзиром на ову чињеницу, најопштија подјела узрочника неуспјеха у школском учењу па тиме и из математике је на: 1. интелектуалне и 2. неинтелектуалне факторе (Милошевић, Јањетовић 2003: 166).

На основу анализиране литературе, званичних резултата успјеха из математике добијених на основу међународних тестирања (ПИСА 2006, 2009) и резултата екстерних тестирања ученика у Црној Гори, затим личног искуства током рада – прво у гимназији, а потом на Учитељском одсјеку Филозофског факултета у Никшићу (како на математици, тако и на методици наставе математике), можемо констатовати:

1. да је неуспјех у настави математике у Црној Гори, не само у основној школи, врло евидентан и из године у годину све већи;

2. да на овај или онај начин, директно или индиректно, највећи број фактора који утичу на овако поражавајући крајњи резултат наставе математике, има *адресу становања* у образовној политици, односно у неодговорном односу школских (а тиме и државних) власти према образовању;

3. стањем у образовању, дакле и кризом у њему, у највећој мјери управља човјек – конкретно школске власти, те су стога и главни кривци за изразито лоше стање у настави, не само математике.

Како фактори неуспјеха у настави математике, нијесу математика, то их математички прецизно није ни могуће класификовати. Из неколико поменутих класификација види се да их педагошки теоретичари, мање-више, слично разврставају. Чини се да подјела, на:

1. интелектуалне, односно субјективне и
2. неинтелектуалне, односно објективне,

која је најближа наведеној подјели Б. Ђорђевић, најбоље разграничава подручја одговорности за неуспјех у настави математике. Уосталом, у случају кад се готово ништа не чини на елиминисању утицаја негативних фактора на образовне резултате ученика, математички прецизна подјела фактора неуспјеха није ни најважнија. Поготово је мање важна у односу на чињеницу да, док педагошки теоретичари теоретишу и разврставају, фактори неуспјеха се *учвршћују* и умножавају, просветне власти добро зарађују док им интересовање за школство опада, а ђачко незнање математике расте. Одговорни за школство се, дакле, понашају по систему *Село гори, а баба се чешља*. Ми бисмо додали, и уживају у свом благостању и ђачком незнању!

У групу интелектуалних или субјективних фактора спадају способности, преддиспозиције, интелектуални, социјални и емоционални развој, уопште когнитивне способности ученика, једном ријечју, ученикове личне карактеристике. Како је наша омладина углавном природно надарена и на срећу мањи број дјеце има сметње у психофизичком развоју, то су објективни, односно неинтелектуални фактори преовлађујући и *најодговорнији* за неуспјех у школству уопште, тим прије у настави математике.

Неинтелектуални фактори неуспјеха проистичу из 1. околности у породичној средини, са једне стране, и из 2. околности у школском систему (фактори педагошког карактера), са друге. И једни и други узроци припадају области друштвеног амбијента.

Развој дјеце под (не)повољним животним условима не утиче само на физичко растење и сазријевање, него и на интелектуални, социјални и емоционални развој. Стога фактори везани за породичне прилике имају и те како везе са успјехом ученика у школи. У породичне прилике спадају материјалне прилике породице и породични односи. На односе у породици, односно породичну атмосферу, у великој мјери утиче сам њен социоекономски статус. Ако су материјалне прилике у породици задовољавајуће, мање је фрустрација па је клима за раст, развој и учење код дјеце оптималнија, што свакако повољно утиче на школски успјех. Како материјални статус породице умногоме зависи од друштвеноекономског система државе, то би се могло рећи да је знатан број фактора неуспјеха, који проистичу из породичних услова, узрокован друштвеноекономским уређењем државе и бригом њених власти о социоекономском статусу грађана.

Предмет наше пажње биће, дакле, они фактори неуспјеха у настави математике, који су узроковани односом друштва, прије свега просветних власти, према образовању. Све те факторе можемо означити једним именом: *образовна политика.*

Фактор образовна политика спада у неинтелектуалне или објективне факторе неуспјеха у настави математике. Овај фактор покрива велики број потфактора који утичу на неуспјех. Прецизније, фактор образовна политика представља натфактор, односно заједничко име за много кључних и паразитских, директних и индиректних фактора неуспјеха, који су резултат пропуста готово искључиво просветних власти. Неки од фактора из ове класе су својствени и другим школским системима, а неки су специфичност школског система у Црној Гори. Да ли се, онда, може закључити да у Црној Гори има (бројчано) више фактора неуспјеха у настави математике, него другдје? Једно је сигурно: што је више фактора неуспјеха, то је и неуспјех већи. И сигурно је да их има много. И ма колико да их набројимо, и ма како да их поређамо, стичемо утисак да се ради о непребројивом и свуда густом скупу. Јер, увијек се појави неки непоменути, макар и незнатно значајан, који *паразитира* на неком од кључних, већ поменутих фактора или потфактора. С обзиром на ову чињеницу, проучавање фактора који утичу на (не)успјех у настави математике, а узроковани су образовном политиком школских (и државних) власти, захтијева много ширу и подробнију елаборацију. У овом раду поменућемо само неке, које је донио *нови систем образовања*; односно његови протагонисти. Особине новог школског система – деветогодишње основне школе, проистекле су из прокламованих „Циљева промјена образовања“ (Књига промјена 2001), те се њима могу и објаснити.

Међу главним узрочницима неуспјеха у настави математике су они који су у вези са:

1. особинама школског система,
2. организацијом рада у школама,
3. својствима наставника,
4. (не)стручном заступљеношћу наставника,
5. концепцијом и својствима уџбеника,
6. климом у школској средини,
7. концепцијом наставних планова и програма,
8. начинима испитивања и облицима оцјењивања,
9. уписном политиком на учитељски и наставничке факултете,
10. образовањем учитеља и наставника,
11. тзв. доедукацијом,
12. материјалним стањем школства,
13. законским прописима,
14. политиком запошљавања,
15. инклузивном наставом,
16. системом вриједности...

Битно је напоменути да сви фактори неуспјеха у настави математике, чије смо узроке поменули, и многи непоменути, нијесу прецизно именовани (као уписна политика, рецимо), али је њихова

идентификација неспорна, под условом да се ближе опише њихово дејство на (не)успјех у учењу математике. Осим тога, ниједан од фактора се не може изоловано посматрати, јер се међусобно прожимају и условљавају и многи од њих су потфактори више различитих фактора.

Истражујући узроке неуспјеха у школском учењу, педагошки теоретичари су, анализирајући школске системе, тој анализи давали печат својих ставова. Тако, док су по традиционалним схватањима истраживача, ученици главни кривци за сопствени неуспјех („Неће да уче!“), дотле у новије вријеме преовлађује став супротан традиционалном – „да су за неуспех одговорни они који нормирају и организују школски рад, који израђују и припремају наставна средства и помагала, наставници, родитељи, друштвени фактори“ (Максимовић 2008: 450).

Без сумње да је трдиционални школски систем имао слабости и педагошког карактера али је, поред тога, имао и добрих страна. Не анализирајући адекватно традиционални школски систем, како би се у њему поправило оно што није добро и задржало све оно што ваља, школске власти у Црној Гори су 2000. године у 24 основне школе експериментално увеле реформу под називом Step by step (Корак по корак).[1] Ова реформа се односила на прва три разреда основне школе. Осим незнатних измјена у плану, програму и организацији наставе, најупечатљивија њена карактеристика била је распоред столова (није било клупа) и ученика у учионици. Како би протагонисти ове реформе оставили снажан утисак да је Step by step донио неку велику новину у настави, ученици су у учионицама сједили око округлих столова (као у кафани). Тако је добром дијелу ђака првака, и оних до трећег разреда, табла стајала буквално иза леђа. Није потребно објашњавати колико су они малишани којима је учитељица, иза леђа, по табли исписивала прве бројеве, могли да је прате и схвате. Посебно је занимљиво како су присталице ове реформе браниле *модерно* сједење у учионици: „Могу да помакну столице и да се искосе (ученици)“. Битно је напоменути и то да су дјеца за вријеме наставе могла слободно шетати по учионици, не стичући осјећај да је у питању школа – амбијент мало озбиљнији од вртића. Ово је била отежавајућа околност јер су се, преласком на традиционални школски систем у четвртом разреду тешко навикавали на школску дисциплину, што је утицало на пажњу и учење. Познато је да дјеца до трећег разреда основне школе немају проблема са разумијевањем и учењем математике, а да у четвртом разреду успјех нагло опада. Због чега је то тако? Учитељи који су водили генерације поменуте реформе, сматрају да су начин сједења и *недисциплина* у учионици до завршетка трећег разреда, поред осталих фактора, имали и те какав утицај.

[1] Сам назив реформе упућује на њено *поријекло*, као и на њеног финансијера. Наиме, правила реформе су нам стигла са Запада, а финансирала ју је фондација Сорош?!

По изласку пете генерације реформа Step by step је, као и многе претходне, без икакве званичне анализе образовних резултата, укинута. Зашто је укинута, нико од просветних власти није нашао за сходно да објасни истим оним грађанима Црне Горе, којима су, пет година раније *експертски тимови* на сва звона промовисали *спасоносну* школску реформу Step by step. Но посматрајући опадајућу функцију из године у годину, која представља школски успјех ученика из математике, и лаичка јавност је лако могла доћи до бар једног логичног закључка о разлогу укидања, макар он и не био прави. Нека нам буде допуштено да претпоставимо да је трајала тачно онолико колико је трајало (Сорошевих) пара. А да одвојише бар за једну пристојну школску таблу на којој се може урадити један читав математички проблем, без брисања табле, па да кажемо: користила је нешто и ова реформа.

Неколико година прије окончања реформе Step by step, уведена је нова школска реформа „Деветогодишња основна школа“. Наравно, опет уз велико ангажовање незаобилазних *експертских тимова*, и опет уз образложења да *нема бољег школског система*. Тако су у оним основним школама у којима је још трајала реформа Step by step, неколико година истовремено егзистирала три различита школска система: традиционални, Step by step и Деветогодишња основна школа. Овај непедагошки подухват школских власти изазвао је велике проблеме у организацији наставе, посебно у оним школама у којима је још трајала реформа Step by step. Различити школски системи изискивали су много више напора око организовања смјена, обезбјеђивања школског простора, усклађивања часова наставницима итд. Због оваквих проблема школе су морале организовати наставу у четири смјене, уз дневни почетак наставе у пола осам. Стога је трка око заузимања учионица, не би ли се бар пола часа одржало, била готово свакодневна. Ову ситуацију најбоље је (кроз шалу), дочарала једна учитељица из Основне школе „Лука Симоновић“ из Никшића, ријечима: „Чим уграбим празну учионицу одмах је, заједно са ђацима, заузимам. Кад ми неко закуца на врата и појави се, само гледам је ли јачи од мене“...

Ни завршетком реформе Step by step, проблем простора у градским школама (сеоске су одавно полупразне или затворене), није ријешен, јер се повећањем броја разреда (девет), повећао број ученика. Већи број ученика у школи, значио је повећање броја ученика и у одељењима. Тако је умјесто смањивања на оптималан број (око двадесет), број ученика у одељењима неријетко растао и од тридесет пет до четрдесет. У овако пребукираним учионицама настава математике која, као по правилу, од четвртог разреда за многе ученике постаје *баук*, тешко може дати добре резултате. Стога је пребукираност одељења један од фактора неуспјеха у настави математике. Овај непедагошки потез школских власти – да одељења броје више од тридесет ученика, повлачи за собом још много узрока неуспјеха у настави математике. Један од њих је немогућност наставника да све ученике

благовремено испита, да им помогне у савладавању математичких операција, разумијевању математичких појмова, да им пружи више шанси да науче, да боље сагледа могућности сваког од њих и колико-толико их реално оцијени. У недостатку времена за (обавезујуће) оцјењивање сваког од њих, наставници често прибјегавају *спасоносним* потезима – умјесто усменог испитивања дају контролне задатке и добијене оцјене уписују као оцјене на усменом. Но, оцјена са контролног задатка често није реална колико оцјена са усменог одговарања, из разлога што сама ситуација да им је заказано самостално решавање задатака (звало се оно контролни или писмени, свеједно), често изазива стрес и трему, због које многи, мање сигурни ученици, подбаце. Други фактор који значајно утиче на (не)успјех у настави математике, узрокован такође немогућношћу наставника да све ученике у пребукираном одељењу на вријеме испита и оцијени, јесте често заказивање ванредних часова, тзв. претчасова. Наиме, да би све успио оцијенити у одељењу од близу четрдесет ученика, наставник неријетко од њих захтијева да дођу на претчас. Ово са једне стране значајно оптерећује ионако оптерећену дневну норму часова, а са друге изискује од дјеце да много раније устају. А чињеница је да и уобичајени полазак у школу захтијева прерано устајање и, за малишане – основце, стресну ситуацију. Ако (учестали) контролни задаци из математике и прерано устајање због претчаса из математике (кад се дјетету најслађе спава) изазивају непријатност и стрес, није тешко закључити какав ће осјећај дијете почети да гаји према математици.

Но није нова школска реформа донијела само ове проблеме. Једна од новина коју је ова реформа донијела јесте правило да дјеца у школу полазе од шест година, што је за многе значило и од пет. „У школу долазе дјеца која ће у календарској години уласка у школу напунити 6 година“ (*Књигу промјена* 2001: 113). Та прва година учења, која је дјелимично претшколска, а дјелимично школа, са васпитачицом и учитељицом истовремено, за неке ученике је гушење и спутавање јер им није дозвољено да се играју, (иако је то, због њихових година и због присуства васпитачице, за њих вртић), а за неке интелектуални напор, јер су *схватили* да је то школа, за њих мале нешто много озбиљно. Оно што је сигурно, та прва година за све њих који су, ни својом ни родитељском вољом, кренули рано у институцију која се зове школа и која намеће обавезе, значи терет. Наиме, психолози тврде да је седма година живота и у њој безбрижно играње, врло значајна за дјечји развој и њихово интелектуално сазријевање. Ако је већ то тако, у шта не сумњамо, онда са сигурношћу можемо тврдити, да је нови закон о поласку у школу од шест година донио више штете интелектуалном развоју дјеце и учењу математике, него користи. Стога је, без сумње, прерани полазак у школу, један од фактора неуспјеха у настави математике.

Интересантно је примијетити да су све школске реформе у Црној Гори, на свим нивоима, последњих шездесетак година, пројектоване на

Западу (чак је и чувена *шуварица* дошла из тог правца). Поред тога, двије последње основношколске реформе, Step by step и Деветогодишња основна школа, имале су функцију подупирања сепаратистичке политике актуелне црногорске власти, а не побољшања укупних образовних резултата видно пропадајућег школства. У прилог тврдњи да су последње школске реформе биле мотивисане политичким а не педагошким разлозима иду, између осталог, и *постулати* штампани у поменутој *Књизи промјена*, коју је 2001. године издало Министарство просвјете и науке у Подгорици, уз покровитељство Института за отворено друштво – Црна Гора. Под насловом „Циљеви промјена образовања“, стоји: „Структура циљева промјене образовања има два нивоа и то: ниво друштвених циљева и ниво самих образовних циљева. Но, остварење циљева на тим нивоима захтијева и обезбјеђење одређених стратегијских претпоставки. Ниво друштвених циљева садржи обликовање грађана... Ниво образовних циљева: висока пролазност ученика и студената...“ Из наведених *циљева промјена* је потпуно јасно да су поменуте школске реформе имале и имају два, потпуно јасна циља. Са једне стране имале су сврху прављења *новог човјека* (како је то јасно саопштио један од бивших министара просвете), и тиме новог националног идентитета, а са друге, додворавање Европској унији, по сваку цијену. Очигледно је да је *висока пролазност ученика и студената* у функцији придобијања наклоности од стране ђака, студената и њихових родитеља, као гласача на изборима. И Општи закон о образовању и васпитању, донесен 2002. године, наглашава, поред општепознатих, и циљеве политичкоидеолошког карактера: „развијање свијести о државној припадности према Републици Црној Гори [...] о националној припадности [...] укључивању у процесе европских интеграција“. Кад се све ово има у виду, потпуно је јасно да побољшање наставног процеса и успјеха ученика у школском учењу, просветним властима није (био) приоритет и да ће (вјечито) додворавање законописаца званичној политици, скупо коштати школски систем у Црној Гори.

Анализирајући *циљеве* у *Књизи промјена* и М. Старовлах (2003: 151–154) сматра да су стратези промјена у образовању поставили образовање и науку у службу политике. „Зашто већ једанпут не би било обратно, па да економија и политика слиједе путеве и резултате образовања и науке?!“ – пита се Старовлах. Он даље констатује „лоша страна промјена (реформи) које су вршене у поратном периоду у васпитно-образовном систему је њихова неадекватна припремљеност, као и чињеница да их је више диктирала политика него стварне стручне и педагошке потребе. У првим поратним годинама главни циљ промјена у образовању била је борба *за идејну чистоту*, потом за *развој нових самоуправних односа* и децентрализацију образовања, да би пчетком деведесетих година 20. вијека дошло до његове опаке бирократизације и централизације, док се најновије промјене врше првенствено ради *европеизације* образовања“.

Ако је потпуно јасно да је посљедња основношколска реформа имала функцију да образовни систем стави у службу политике, а да је брига о образовним резултатима и здрављу дјеце била (и данас је) само декларативна, онда је јасно откуд толико негативних фактора по школско учење и успјех ученика. Произвели су их, дакле, аутори *Циљева промјена образовања* и *Стратегије реформе система образовања*, чија упутства ни за потпуне лаике нијесу нимало немушто дефинисана у *Књизи промјена*.

У свеопштој *реформи* основне школе, опет из политичких разлога, просветне власти у Црној Гори су, да би се *ослободиле* српског језика, укинуле Буквар и умјесто њега, за нови *матерњи* језик, одштампале четири нове књиге. Уз то су, да би дочарали озбиљност *нове школе*, и уџбенике из математике и осталих предмета (пошто су их претходно превели са словеначког?!), штампали на тешком масном папиру. Тако су, уз остале потребне књиге и прибор, ђачке торбе првачића тешке и до шест-седам килограма. Они ученици из седмог и виших разреда кажу да у торбама носе и по десетак килограма. Овај физички напор ученика због претешких ђачких торби, поред тога што је штетан за физичко здравље малишана, мора дјеловати демотивишуће. Да би олакшали оним најмањим, торбе им у школу и назад носе родитељи. А шта ће бити (и са дјечјом кичмом) кад их буду морали носити сами?

Ради јачања власти и стављања под своју контролу цјелокупног процеса образовања, Министарство просвјете и науке је још прије увођења последње школске реформе укинуло све стручно-педагошке органе и себи приграбило претјерана овлашћења. Са смјеном традиционалне основне школе новом деветогодишњом 2004. године, да би *учврстили* нове односе, централизација и бирократизација цјелокупног образовног система је доживјела врхунац. Користећи се својим огромним овлашћењима, министар просвете је смијенио све директоре школа за које је сматрао да се, због својих стручних и професионалних квалитета, неће уклопити у пројектовани сепаратистички пројекат. Умјесто њих, поставио је себи одговарајуће. (Они што мање знају, боље ће слушати и мање ће се политизацији школе супротстављати.)

Све поменуто није могло проћи без негативних посљедица на рад школа и посебно на рад, ентузијазам и креативност наставника.

Поред свега наведеног, лошем успјеху ученика из математике у великој мјери доприносе лоши математичари – учитељи и наставници. Познато је да ученици највише воле и уче оне предмете које предају омиљени и прихваћени наставници. Истраживање које су спровели студенти Филозофског факултета из Никшића током 2000. године, показује да од укупног броја наставника који у учионици *владају* помоћу силе, њих око 40% су наставници математике и око 27% учитељи (која такође предају математику). Стога би се могло закључити да, ако је неко *баук*, онда то није математика, него математичари.

Да математика није привилегија само појединаца, а тешка огромној већини ученика, доказује искуство добрих наставника математике. И истраживања у психологији су показала да је број ученика који нијесу способни за савладавање и разумијевање математике, скоро незнатан и да су, са друге стране, слаба стручност, недовољна методичка припремљеност и личност наставника, главни узроци неуспјеха у настави математике. Просјечне људске способности су, дакле, сасвим довољне да се, не само схвати и усвоји текуће градиво из математике, него и да се, умјесто страха и одбојности, развије љубав према математици. Многи наставници и сами имају страх од математике, па преносећи ученицима знања, преносе им и страх. Стога је сасвим сигурно да у великој мјери од наставника зависи да ли ће се код ученика развити љубав или одбојност према математици.

Нажалост, много је математичара (учитеља и наставника) тзв. непедагошких типова. Било да је аутократски тип – онај који дисциплину у учионици одржава силом, пријетњама и застрашивањем, било да учи задатке напамет да би их дјеци урадио на табли, било да га дјеца не смију питати да им објасни што им је нејасно, то није добар наставник. Код таквих, тешко да ће ученици, осим ријетких ентузијаста, научити и завољети математику. Све поменуто је општепознато, па се поставља питање, зашто, онда, просветне власти све то толеришу.

Са друге стране, много добрих наставника, и стручно и методички припремљених, правих педагошких типова, не успијева дјецу научити ни основним математичким операцијама. Често, и поред огромног рада и уложеног труда, коначни резултат код таквог наставника је велики број слабих оцјена. Због тога је често код дјеце *школски тиранин* или *терминатор*. Његов донкихотовски лик не би се могао додијелити наставницима других школских предмета. Наиме, углавном, сви остали су *већа господа*, јер су на вријеме поправили све ђачке лоше оцјене. *Нијесу луди* као математичари, да за крај године закључују јединице и да тако ризикују много. Ризикују да добију прекоре и придике колега, ђачке сузе, пријетње родбине ђачке, притиске шире друштвене заједнице... Уз све ово, ту су и притајене и отворене *инструкције* директора школе. Јер, у жељи да *оправда* повјерење министра који га је васпоставио, поентирајући код њега што бољим укупним просјеком школског успјеха (без обзира какво знање тим *успјехом* покрива), многи од директора инсистирају на цртању оцјена. Ваљда због *интелектуалног поштења и љубави према истини*, које *математичари морају имати*, наставници истрајавају на реалним оцјенама. А дубоко су свјесни чињенице да их, због додатних поправних испита чека ново (бесплатно) малтретирање. И све то док се њихови колеге, које *нијесу луде*, баве неким другим, забавнијим послом, не зато што су из њихових дисциплина ученици много више знали, него зато што су им они сами, три дана пред крај школске године, без двоумљења уцртали пролазне оцјене. Несумњиво је да оваква клима, готово без изузетка, влада пред крај школске године готово у свим школама и да

дјелује демотивишуће на свеукупно учење, а *тешке* математике поготово. И не само да влада, него је та чињеница општепозната, те за ово масовно *цртање* оцјена пред сами крај школске године и оним ученицима који су константно имали, често и до десет слабих, мора знати и министарство просвете. Оваква пракса – *сви цртају, осим математичара*, је један од кључних фактора неуспјеха у настави математике. Наиме, како се све зна, то и ученици лако сазнају да ће им, без обзира на знање, на крају школске године сви осим математичара поправити оцјене, а и математичар ће *морати*, али на полагању поправног испита. Увидом у дневнике, школски инспектори, који су сегмент просветне власти, могу лако закључити да слабе оцјене само из математике на крају школске године нијесу зато што су математичари *терминатори*, него зато што су математичари објективни, а остали *нијесу луди*. Адекватним реаговањем просветних власти и довођењем стања у реалне оквире, ученици би схватили да им више неће на полагању поправног испита поклањати оцјене из математике они исти наставници (као чланови комисије), који су им на крају школске године поклонили оцјене из својих предмета. Стога би њихови мотиви за учењем, не само математике, били много јачи.

Да би се боље схватило зашто је успјех ученика из математике у основној школи тако лош, треба имати у виду и следеће:

– да је новим законима и прописима, наставницима наметнуто претјерано администрирање, што иде науштрб њиховој основној функцији, оптималном извођењу наставе;

– да је ученицима дато више права, а мање обавеза, а наставницима обрнуто;

– да је са прописима о инклузивној настави омогућено дјеци са посебним потребама похађање наставе у *редовним* учионицама, и тиме оптерећење учитељима и наставницима додатно усложњено, што сигурно има за посљедицу слабији успјех ученика;

– да се наставници често, због пребукираности програма, утркују с временом и због тога не могу да посвете већу пажњу слабијим ученицима, нити више времена тежим математичким темама;

– да су у најновијим Програмима из математике циљеви постављени мутно (често се из циља не види шта треба радити), а садржаји нијесу распоређени по темама па многи, мање способни, учитељи лутају;

– да су просвјетне власти, умјесто да растерете постојеће школске планове, увеле и нове предмете (попут грађанског образовања, што подсјећа на некадашњи марксизам), и тиме додатно оптеретили ученике, како дневном нормом часова, тако и новим небулозним садржајима;

– да је дневна норма часова углавном оптерећена до те мјере, да понекад више представља психичко и физичко мрцварење ученика, него могућност за стицање знања, (други разред по четири, трећи пет, а осми и девети и по осам часова);

– да се често не поштује воља ученика, кад је у питању изборни предмет, па се умјесто математике намеће, рецимо енглески (*зато што наставнику математике не фали за норму, а наставнику енглеског фали*);

– да се на учитељски и наставничке факултете уписују, углавном, слабији ученици, (*они који не могу да заврше „јачи“ факултет*).

– Због оснаживања сепаратистичких подухвата државне власти, просветна власт је 2005. године укинула полагање пријемних испита на свим факултетима. Циљ је био доказати да је Црна Гора довољно моћна да може омогућити упис свим свршеним средњошколцима (те јој, стога, нико више не треба). Поред овога, на уписну политику је и материјални моменат имао и те каквог утицаја. Наиме, све мање студената је уписивано на буџет, а све више на самофинансирање. Стога су широм отворена врата за масовни упис донијела знатна материјална средства факултетским властима. Ова уписна политика имала је за посљедицу уписивање на учитељски и наставничке факултете и лоших ђака, којима болоњски систем студирања пружа могућност сигурног завршетка студија и доласка до дипломе.

– Измишљеном тзв. доедукацијом на Одсјеку за образовање учитеља, практично су натјерали одавно запослене учитеље (*да не бисте остали без посла?!*) да се упишу на ванредно студирање, уплате велики новац за школарину и *дошколују* се. Колико су се *дошколовали*, велико је питање, али је сигурно да је неко добро зарадио и да су негативне посљедице по наставу биле огромне, јер су се на *доедукацију* уписивале углавном учитељице, породичне жене, са по десетак и више година радног стажа. Преузевши (од страха за посао) још једну, поред двије крупне обавезе – наставе у школи и породице, учитељице су тако *разапете* између три тешке обавезе, како су саме говориле *киксале* и у школи и у породици. Ово по њих фрустрирајуће стање морало се негативно одразити на наставу и успјех ученика.

– У Плану Студијског програма за образовање учитеља, на Филозофском факултету у Никшићу, од укупног фонда часова, на математику отпада свега 8%, што је у односу на педагошко-психолошку групу предмета три и по пута мање. Кад би класични статистичар вршио анализу Плана Учитељског одсјека, прије би помисло да се ради о Одсјеку за педагогију, него о Учитељском. Јер, један од два кључна предмета за образовање учитеља – математика, маргинализован је у односу на педагошку групу предмета. Кад се ово има у виду, није ни чудо што *учитељица учи задатке напамет*, да би их урадила дјеци на табли.

– Поред политике масовног уписа, наставници математике су све дефицитарнији кадар. Због тога математику све више предају инжењери и кибернетичари, што у суштини, представља неадекватно покривену наставу.

– И за оне најбоље свршене студенте запошљавање је постало ствар милости владајућих партија и спремности самих учитеља и

наставника да им потпишу приступницу и успут се одрекну свог националног идентитета у корист новоправљеног.

– И они учитељи (наставници математике су још увијек дефицитарни), који преко некакве *везе* успију да се запосле, живе и раде под пријетњом отвореног отказа, са рјешењем *на одређено*, у грчу размишљајући шта ће бити сјутра, кад се појави неко министру пречи.

– Систем вриједности у друштвеној средини потпуно измијењен. Стога данашња дјеца сигурно не маштају о томе да постану професори, него *бизнисмени* и што је најгоре, рано схвате да им за тај *позив* није потребно ни знање, ни образовање, а потврду о квалификацији могу за новац купити.

– Друштвени углед просветних радника, захваљујући управо просветним властима, на врло је ниском нивоу.

– Све поменуто наставници, још увијек, часно подносе (а докле ће?) у условима дугогодишњег материјалног понижавања и друштвеног маргинализовања.

Све поменуто, и још много тога, представља факторе неуспјеха у настави математике. Неспорно је да сви поменути фактори неуспјеха потичу из школског система који је пројектован у земљама Европске уније, а инсталиран од стране просветних власти у Црној Гори, и саставни су дио образовне политике. Како образовном политиком управљају просветне власти, то оне управљају и факторима неуспјеха у школском учењу, па тиме и у настави математике.

Неопходно је напоменути да је основно школство, са свим евидентним недостацима, још увијек најбољи сегмент образовања у Црној Гори.

Да ли ће ово садашње реформисано школство ићи на *поправни испит*, видјећемо.

.

Умјесто закључка

Може ли данашња школа, која више личи на присилни рад и масовни експеримент, него на потребу, бити инспиративна за учење математике? Имајући у виду да школски систем у Црној Гори карактеришу: вјечно поклањање оцјена, непонављање разреда, хиперпродукција лучаша, школа изгубљених талената, много више одликаша – много мање знања, инфлација високошколских диплома и дефлација знања, веће образовање учитеља – мање знање из математике ученика, мислимо да је одговор недвосмислено јасан.

Литература

Ђорђевић1995: Б. Ђорђевић, *Даровити ученици и (не)успех,* Београд: Заједница учитељских факултета.

Ћурић 1989: Л. Ћурић, Предуслови за школски успех, Нови Сад, *Зборник,* Институт за педагогију Филозофског факултета у Новом Саду, св. 7, Нови Сад, 59–66.

Књига промјена 2001, Подгорица: Република Црна Гора, Министарство просвјете и науке.

Коцић 1988: Љ. Коцић, Чиниоци који неповољно делују на успех ученика, Београд: *Настава и васпитање,* 4, Београд, 317–341.

Максимовић, Ј. *Прилог истраживању узрока школског неуспеха*. <http://scindeks.nb.rs/article.aspx?artid=0553-45690806450M&redirect=ft>.

13. 2. 2008.

Милошевић, Н., Јаљетовић, Д. Неинтелектуални предиктори постигнућа. *Институт за педагошка истраживања*. <http://www.ipisr.org.rs/Dokumenta/Zbornici/Zbornik%202003-35/Neintelektualni%20prediktori.pdf>.

Рот 1973: Н. Рот, *Општа психологија,* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства Србије.

Старовлах 2003: М. Старовлах, Једно виђење лоших и добрих страна „европеизације“ наше школе, Подгорица: *Васпитање и образовање,* 4, Подгорица, 151–163.

Стојаковић 1983: П. Стојаковић, Могућности предвиђања школског успеха ученика, Београд: *Педагогија,* 1, Београд, 47.

Шарановић-Божановић 1984: Н. Шарановић-Божановић, *Узроци и модели превенције школског неуспеха*, Београд: Институт за педагошка истраживања, Просвета.

Шћепановић 2004: Р. Шћепановић, Улога наставника у рјешавању нестандардних задатака из математике, Подгорица: *Васпитање и образовање,* 4, Подгорица, 90–100.

Vladimir Šarović*
Gimnazija Mostar

Stručni rad

ELEKTRONSKI KONTEKST KONSTRUKTIVISTIČKE NASTAVE

Konstruktivizam u praksi

Konstruktivizam je teorija o učenju u čijoj je osnovi mišljenje da učenici preko vlastitih misaonih aktivnosti u procesu intelektualnog razvoja postaju graditelji i kreatori novih znanja.

Učenje nije poučavanje, tj. uobičajeno eksterno prenošenje informacija (od nastavnika ka učeniku), a zatim provjera znanja na tradiconalan način (usmeno ili pismeno). Umjesto toga potrebno je kreirati ambijent, stvoriti situaciju u kojoj učenici postaju aktivni učesnici i kreatori vlastitih zaključaka. Dakle, učenik se tretira kao onaj koji misli i izvodi zaključke, kao nezavisni istraživač, što je osnovno obilježje konstruktivističkog pristupa u teoriji učenja. Nastavnik je savjetnik u procesu učenja, a samo učenje je istraživački proces za nova otkrića i konstrukcije znanja. Kako konstruktivizam pozicionira učenika kao subjekta vaspitno-obrazovnog procesa u značajnoj mjeri na rezultate njegovog učenja utiče sociopsihološka struktura njegove ličnosti. Zato je razumljivo da se termin konstruktivizam najprije pojavio u psihologiji pa filozofiji, a zatim je postao odomaćen u oblastima biologije, fizike, matematike i informatike.

U psihologiji između dviju teorija o uticajima na razvoj ličnosti i njeno ponašanje postavlja se pitanje da li su jači uticaji iz unutrašnjih odrednica ili spoljašnjih – situacionih (odnosi u porodici, okruženju itd.). Ima konstruktivista koji se ne slažu s isključivom ulogom jednog i drugog opredjeljenja. Svi podsticaji koji djeluju na ljudska čula i koji iz spoljašnjosti djeluju na ljude, nisu poticaji ukoliko nisu osmišljeni i prepoznati kao takvi. Što god da utiče na neku osobu iz spoljašnjeg svijeta, mora da bude prije svega u domenu koji ona može da opazi, prepozna i osmisli, odnosno da *konstruiše*. Zbog toga je moguće čuti i različite komentare o nekom filmu, nekom događaju, nekoj ličnosti. I upravo te različitosti, sklonosti da se isti događaji doživljavaju na različite načine, je ono što čini bogatstvo psihičkog života ljudi. S tim u vezi može se reći da su ljudi slični u onoj mjeri u kojoj doživljavaju neka dešavanja (pojave) na približno isti način, a različiti u onoj mjeri u kojoj to doživljavaju različito.

Na osnovu gore izloženog navodimo *osnovne zahtjeve* za uspješno provođenje konstruktivističke metode za sticanje novih znanja:

* vladimir.sarovic@gmail.com

– strategija učenja mora biti tako odabrana da učenike stavlja u centar dinamičnog i interesantnog procesa koji je pod kontrolom samih učenika;
– pri pravljenju obrazovnih materijala i njihovog izbora treba voditi računa o bliskosti tema samim učenicima i pri tom im treba pružiti mogućnost da sami mogu vršiti izbor sredstava za edukaciju;
– treba stvoriti okruženje u kome učenici mogu birati izvore informacija, dinamiku učenja i mogućnost korištenja interneta i drugih interaktivnih kompjuterskih programa;
– omogućiti učenicima rad u grupama, pri čemu treba voditi računa da su grupe formirane od učenika koji imaju isti afinitet prema zadanoj obrazovnoj temi i
– u toku rada na obradi nastavnog sadržaja podsticati učenike na međusobnu komunikaciju postavljanjem pitanja s ciljem boljeg razumijevanja teme.

Pet osnovnih principa konstruktivizma

Detaljnije razrađeno tumačenje konstruktivističkog pristupa nalazimo u radu autora J. G. Brooks i M. G. Brooks (1999: 16). Prema njima, da bi taj pristup bio efikasan, mora biti zadovoljeno pet osnovnih principa:

1. za rad sa učenicima potrebno je birati i analizirati relevantne (životne) probleme,
2. učenje se mora odvijati u okviru glavne teme,
3. dobro procijeniti učeničke mogućnosti,
4. prilagoditi nastavni program učeničkim sposobnostima i
5. pratiti i ocjenjivati uspjeh učenika u toku obrađivanja nastavne teme.

Navedeni principi podrazumijevaju da treba da su ispunjeni slijedeći uslovi:

1. Treba da postoji više od jednog izvora iz kojih učenici mogu učiti, a ne samo osnovni.
2. Treba da se učenici dovedu u poziciju za sticanje novih iskustava, koja im proširuju prethodno stečena znanja.
3. Omogućiti učenicima da svojim reakcijama i odgovorima usmjeravaju tok nastavnog procesa i traže elaboraciju početnih odgovora. Treba dati učenicima određeno vrijeme za razmišljanje nakon postavljanja pitanja.
4. Podsticati klimu radoznalosti traženjem od učenika da razmišljaju koja bi pitanja mogli postaviti o temi. Treba podsticati razgovor korištenjem motivacijskih pitanja radi kreiranja stvaralačkog ambijenta među učenicima.
5. U formulaciji zadataka treba koristiti kognitivnu terminologiju npr. *klasificiraj*, *analiziraj* i *kreiraj*,…

6. Treba podsticati, stimulisati i uvažavati učeničku slobodu i inicijativu, pri čemu nastavnik mora pokazati sklonost ka odricanju vlastite kontrolirajuće uloge.
7. U fizičkom okruženju – treba omogućiti upotrebu izvornih podataka i primarnih izvora informacija.
8. Ne razdvajati spoznajni i istraživački proces.
9. Tražiti da se učesnici nastavnog procesa precizno i jasno izražavaju, što je garancija razumijevanja i ovladavanja obrađenom temom.

Oblici konstruktivističke nastave

U ovom poglavlju navedena su četiri modela nastave u okviru teorije konstruktivističkog učenja :

1. model problemske nastave,
2. etapno konstruktivističko učenje,
3. akademski konstruktivistički model i
4. model *5E*.

Model problemske nastave

Wheatley (1999: 12) je predložio model problemske nastave koja se uspješno može realizovati u okviru teorije konstruktivističkog učenja citirajući Kozmetskog (1980) koji kaže:

„svaki učenik mora biti ohrabren da izgradi svoje konceptualne stavove koji će mu omogućiti da svojim znanjem rješava postavljene zadatke - probleme".

Wheatley (1999: 15) smatra da nastavnikova uloga treba da bude da kroz diskusiju u radu grupa stvori stimulativnu i motivacijsku klimu koja će uticati na izgradnju učeničkog stava. Za uspješan rad grupe značajne su tri komponente:

1. postavljanje zadatka
2. organizacija grupe i
3. podjela uloga.

Wheatleyev koncept podrazumijeva da zadatke treba birati tako da ih učenici imaju mogućnost riješiti koristeći prethodno stečena znanja i iskustva. Prema Wheatleyovom konceptu, zadaci treba da zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. da budu primjereni uzrastu, stečenom znanju i iskustvu učenika,
2. da budu rješivi u okviru stečenog znanja,
3. da ohrabruju učenika da postavlja pitanja tipa *Šta ako?*,
4. da podstiče učenika na primjenu vlastitih metoda,
5. da omogućuju dijalog,
6. imaju element iznenađenja i
7. da bude zanimljiv.

Etapno konstruktivističko učenje

Prema mišljenju Scotta, Dysona i Gatera (1987), jedan od mogućih oblika konstruktivističke nastave je oblik koji se sastoji od tri faze.

1. *Evokacija*. U ovoj fazi učenjem se obnavljaju ranije stečena znanja i iskustva. Iznose se, upoređuju i sučeljavaju učeničke ideje. U ovom dijelu učenici obično postaju svjesni svog i tuđeg mišljenja, što predstavlja osnovu daljeg učenja a istovremeno osnažuje interes za proučavanjem novih sadržaja.
2. *Sučeljavanje i primjena ideja*. U toku ove faze učenici objašnjavaju svoje ideje, sučeljavaju ih sa drugim učenicima, usvajaju ih ili odbacuju. Iskusan nastavnik svojim djelovanjem iscenira konfliktne situacije, proizvodeći sukob mišljenja među učesnicima što rezultira povećanjem interesa i zanimljivosti procesa. Tako je u ovom dijelu procesa učenicima, omogućeno da konsoliduju (odbace ili učvrste) svoje stavove koji će biti korišteni u njihovom daljem radu..
3. *Evolucija ideja*. U ovom dijelu od učenika se traži da uporede svoja polazna stajališta (ideje) sa konsolidiranim zaključkom, precizno označavajući sličnosti i razlike između početnog i završnog stava.

Akademski konstruktivistički model

U provođenju konstruktivističke nastave na akademskom nivou Yager (1991) preporučuje provođenje sljedeće procedure:

1. prikupiti i koristiti pitanja i ideje za objašnjenje sadržaja nastavne teme;
2. podsticati i uvažavati ideje studenata;
3. uvažavati studentsku inicijativu i isticati značaj rasprave u razmjeni mišljenja o studentskim stavovima;
4. iskoristiti stavove studenata, njihova iskustva za obradu teme;
5. preporučiti studentima korištenje alternativnih izvora informacija, kako napisanih tako i informacija koje je moguće dobiti od stručnjaka iz odgovarajuće oblasti;
6. koristiti otvorena pitanja i podsticati studente da nadograđuju stečeno znanje, tražeći odgovore na njih;
7. omogućiti studentima da traže uzročno-posljedične veze između različitih događaja;
8. zahtijevati da se studenti odnose kritički prema vlastitim idejama;
9. Analizirati ideje studenata prije prezentiranja ideja nastavnika ili prije traženja ideje iz knjiga ili drugih izvora;
10. podsticati studente na međusobnu razmjenu mišljenja;
11. koristiti zajedničko učenje kao strategiju koja ističe značaj saradnje a koja u isto vrijeme uvažava individualnost svakog studenta;

12. odrediti adekvatno vrijeme za razmatranje i analizu, uvažavati i koristiti studentske ideje i
13. podsticati samokritičnost i prikupljati realne dokaze koji učvršćuju ideju.

Model „5 E"

Ovaj model je u didaktičku praksu uveo Roger Bybee (1997). Oznaka modela je skraćeni naziv „5 etapa" (engl.„Five Es".). Te etape su: *angažovanost, istraživanje, tumačenje, razrada i procjena.*

1. *Angažovanost*:U ovoj etapi učenici se prvo upoznaju sa sadržajem zadatka, uspostavljaju vezu sa ranije stečenim znanjem i iskustvom koje će se moći proširiti u okvirima posmatrane teme. Tipične aktivnosti u ovoj fazi su: postavljanje pitanja, definisanje problema i upućivanje na iznenađujuće situacije, što će stimulisati diskusiju u malim učeničkim grupama i međusobnu razmjenu mišljenja. Uloga nastavnika je da navodi učenike na povezivanje ranije stečenih znanja sa novim znanjima.
2. *Istraživanje*: U istraživačkoj fazi učenici trebaju biti upoznati sa definicijama pojmova koji se javljaju u postavljenom zadatku kao i sa izvorima u kojima su ti pojmovi definisani. Proučavajući te izvore, oni stvaraju vezu između teorije i iskustva. Radeći zajednički u timu, učenici stvaraju zajedničku osnovu koja će im pomoći u procesu razmjene mišljenja i međusobne komunikacije. Nastavnik djeluje kao kordinator, obezbjeđuje materijale, usmjerava učeničku pažnju i upravlja samim tokom istraživanja.
3. *Tumačenje*: U ovoj – glavnoj fazi – se od učenika traži da objasne vlastitim riječima kako su došli do određenog saznanja i pri tom se ohrabruju da daju objašnjenja, slušaju kritike jedni drugih i nastavnika. U ovom dijelu nastavnik je dužan, koristeći saznanja do kojih su došli sami učenici, precizno formulisati novo uvedene pojmove i izvedene zaključke. Ako učenici imaju neriješenih pitanja, odgovore mogu nastaviti tražiti u sljedećoj fazi.
4. *Razrada*: U fazi razrade, učenici nadograđuju svoje znanje i koriste novostečeno. Testiraju ideje temeljitije i istražuju dodatne odnose. Davanje zaključka lekcije i provjera razumijevanja su glavni u ovoj fazi.
5. *Procjena:* U ovoj fazi nastavnik analizira cjelokupni proces, tj. aktivnost učenika i nivo stečenog znanja. Učenika stavlja u poziciju samoocijenjivanja znanja i metoda učenja. Nastavnik ocjenjivanje provodi korištenjem različitih metoda (testovi, kvizovi sa višestrukim izborom). U konačnoj ocjeni nastavnik posvećuje naročitu pažnju aktivnosti učenika u nastavnom procesu.

Razred sa konstruktivističkim pristupom – uloga nastavnika

Jedna od glavnih karakteristika konstruktivističke nastave je promjena uloga nastavnika i učenika. Tradicionalni koncept nastave je nastavni proces koji nastavnika stavlja u središte aktivnosti. Ovaj koncept podrazumijeva da je nastavnik odgovoran za njega i za rezultate koje postižu učenici u tom procesu. Učenik je primalac znanja. Pedagoška praksa je pokazala da su učinci ovakve nastave nedovoljno efikasni. Savremena teorija za unapređivanje nastavnog procesa predlaže reorganizaciju dostignutih nastavnih metoda, što podrazumijeva promjenu uloga nastavnika i učenika.

Uz vjerovanje u kreativne stvaralačke sposobnosti učenika, odgovornost za rezulate učenja prenosi se na njih. Planiranje nastave uz zajedničko učenje i evaluiranje rezultata postignutih u učenju može da poveća ukupnu odgovornost. Posebno su dobri rezultati u podjeli odgovornosti koja se postiže u saradničkom učenju. Sadašnji sistem nastave u školama se uglavnom bazira na metodama direktnog uticaja. To znači da nastavnik pokušava u toku realizacije obrazovnog programa da promijeni ponašanje učenika direktno pomoću gotovih modela ili dijelova vježbi.

Kako je, prema konstruktivizmu, svrha učenja prerada i ukrštanje informacija, preoblikovanje struktura informacija i ovladavanje zapamćivanjem, nastava mora da bude, u najvećem broju slučajeva, indirektan proces. Ne postoji univerzalna metoda za izvođenje nastave.Uspješan nastavnik je istovremeno dobar poznavalac nastavnih metoda i zavisno od okolnosti primjenjuje neku od njih. Usvajanje konstruktivističke paradigme učenja i poučavanja za nastavnika predstavlja složeni proces učenja tokom kojega nastavnik razvija motivaciju za promjenom konceptualnih shema nastavnog procesa i pripadajućih rutina (struktura) didaktičkog postupanja.

Konstruktivističkim strategijama poučavanja zajednička je pretpostavka da učenici sami kreiraju svoje znanje. Iz te pretpostavke izvode se zaključci o potrebnim profesionalnim aktivnostima i postupcima nastavnika. Uloga nastavnika dobiva nova značenja. Umjesto dominantne nastavničke uloge, nastavnik postaje voditelj, motivator, saradnik, suistraživač, inspirator stvaranja ideja, stavova, mišljenja, vrijednosti i sl.

Razred sa konstruktivističkim pristupom razlikuje se od tradicionalnog po aktivnosti učenika u procesu saznavanja novih činjenica. Podstičući učenike da aktivno učestvuju u različitim fazama učenja u kojima se zahtijeva postavljanje pitanja, istraživanje, zamišljanje, prognoziranje, rad s različitim predmetima, kompariranje, rješavanje problema, produkcija ideja i drugo, nastavnik kao facilitator podstiče sticanje različitih iskustava.

Prema navodima J. G. Brooksa i M. G. Brooksa (1999), upoređivanje tradicionalnih razreda i razreda sa konstruktivističkim pristupom pokazuje razlike u svim bitnim aspektima nastavnog procesa:

– shvatanju kurikuluma i njegove realizacije,

– izvorima za sticanje saznanja,

– stilu rada nastavnika,
– zahtjevima koji se postavljaju pred učenika i
– načinu provjeravanja i ocjenjivanja i socijalnim odnosima u razredu.

Elektronsko učenje

Huey B. Long (2004) navodi dvije definicije elektronskog učenja. Prva definicija pod elektronskim učenjem podrazumijeva „svako ono učenje koje se zasniva na korištenju elektroničkih medija". Druga, znatno uža, definiše elektronsko učenje kao svaki oblik učenja koji koristi mrežu za isporuku, interakciju ili facilitaciju. Učenje može biti ostvareno individualno (uz vođenje ili instruiranje kompjutera) ili kao dio nastave. Mrežna nastava može biti sinhrona (u isto vrijeme) ili asinhrona (u različito vrijeme), ili neka od kombinacija te dvije mogućnosti. Zbog jednostavnosti i veće obuhvatnosti, ovdje ćemo prihvatiti definiciju koja pod elektroničkim učenjem (ili e-učenjem) podrazumijeva svako ono učenje koje se zasniva na korištenju elektroničkih medija. Jasno je kako se to danas odnosi uglavnom na digitalne medije koji podrazumijevaju korištenje kompjutera i interneta, što prije nekoliko decenija nije bilo moguće.

Teorijske osnove elektronskoga učenja, e-učenje

U poglavlju o teorijama učenja nije posebno navedeno elektronsko učenje. To je zbog toga što e-učenje može biti ostvareno polazeći od bilo koje navedene teorije uz dodatak korištenja elektronskih sredstava. Tako je već dvadesetih godina prošlog vijeka Pressey izradio elektronsku mašinu koja se mogla koristiti za provjeru tačnosti rezultata različitih ispita.

B. F. Skinner je svoju mašinu za učenje konstruisao tako da odgovara principima biheviorističke teorije učenja. Programirana nastava je u početku bila najčešći pristup koji se koristio za ostvarivanje učenja uz pomoć kompjutera. Ona je nastala na teorijskim principima biheviorizma. Mark Lepper i Jean-Luc Gurtner (1989) navode da se kompjuter može koristiti kao nastavnik, ali i kao sredstvo za eksperimentalno učenje.

Kompjuterske simulacije s nedovršenim završetkom (open-ended simulacije) omogućavaju naučna istraživanja i osiguravaju induktivno učenje uz aktivno eksperimentisanje od strane učenika/studenta, tako da oni mogu izvoditi eksperimente koji su vrlo složeni ili preopasni da bi se izvodili uživo. Simulacije fizičkih sistema omogućuju učeniku izvođenje stvarno nepostojećih pojava (npr. oni *mijenjaju* zakon sile teže i posmatraju rezultate) i zapisuju svoja zapažanja.

Kompjuter na ovaj način prestaje biti tutor koji nas vodi kroz nastavni proces, dajući nam povratne informacije o našoj uspješnosti, već je on prije alat koji nam pomaže u našem intelektualnom istraživanju.

Uprkos velikim prednostima koje pruža savremena tehnologija, ona nas ne oslobađa napora kako bi mnoštvo dostupnih informacija povezali u smislenu

cjelinu, a još manje nas lišava mogućnosti vlastitog doprinosa onome čime se bavimo.

Devedesetih godina prošlog vijeka ubrzano se razvija internet koji postaje dostupan velikom broju korisnika u cijelom svijetu. On tada omogućuje prikaz sadržaja u obliku hiperteksta, ali u isto vrijeme služi i za slanje e-pošte čime se najavljuju njegove komunikacijske mogućnosti. Međutim, u to vrijeme se virtualna komunikacija koristila samo kao dodatak svakodnevnoj komunikaciji licem u lice. Tokom devedesetih godina 20. vijeka i početkom 21. vijeka sve više se razvijaju i koriste web sistemi koji omogućuju saradnju i komunikaciju ljudi na daljinu. Za razliku od pionirskog doba korištenja interneta, njegove trenutne mogućnosti omogućuju da on postane novi komunikacijski medij koji u nekim slučajevima može u potpunosti zamijeniti tradicionalne oblike neposredne komunikacije ljudi. Tako internet postaje virtualnim prostorom u komu se odvija komunikacija između učesnika različitih zajednica čiji članovi mogu živjeti u geografski udaljenim dijelovima svijeta i koji se nikada ne moraju fizički sresti. Uprkos naprednim mogućnostima koje ima savremena tehnologija, njih nije moguće koristiti za ostvarivanje aktivne nastave bez aplikacija čiji autori razumiju savremene pedagoške pristupe. Uvažavajući navedeno mišljenje uvođenjem specijaliziranih alata – courseware tool uklonjeni su ranije navedeni nedostaci.

Alati za e-obrazovanje (courseware tool)

Trenutno na webu postoji nekoliko različitih definicija alata za e-obrazovanje. Denis Howe u svojoj elektronskoj knjizi: The Free Online Dictionary of Computing kaže da su: „alati za e-obrazovanje programi i podaci koji su korišteni u treningu koji je baziran na rad sa računarom“. Prema NetLingo Classification: „Alati za e-obrazovanje su drugi naziv za instrukcijski softver, alat za e-obrazovanje može biti u obliku CD ROM-a, web stranice, diskete, instrukcijskog zapisa ili programa za učenje“. Alati za e-obrazovanje se često koriste za obrazovanje ljudi u korištenju računarskih poslovnih aplikacija.

Courseware alati ne mogu biti zamjena za udžbenike, već isključivo kao dopunsko sredstvo u nastavnom procesu. Ovi alati služe samo jasnijoj prezentaciji gradiva, drugom načinu sistematizacije znanja kao i drugom obliku komunikacije između nastavnika i učenika. Svi courseware alati sastoje se od dva osnovna dijela: prostor za nastavnika i prostor za učenika. Zajednička tačka ova dva područja je znanje. Prostor za nastavnika predviđen je za najjednostavniji način unošenja novih znanja, a prostor za učenika namijenjen najboljem razumijevanju tog znanja.

Kod naprednijih courseware alata prostor za nastavnika je podijeljen u tri osnovna dijela:

– prostor za autora materijala,
– prostor za nastavnika i
– prostor za administratora sistema.

Autor materijala priprema, organizuje i sistematizuje nastavne sadržaje. Uloga nastavnika je predavanje nastavnog gradiva, podsticanje komunikacije i uopšte saradnja sa učenicima radi što boljeg savladavanja gradiva.

Neki, napredniji, courseware alati daju mogućnost da materijale od istog autora primjenjuju različiti nastavnici u radu sa različitim grupama. Uz pomoć courseware alata nastavnik može pratiti učenikov napredak, učestvovati u diskusijskim grupama i slično. Uloga administratora je da osigura pravilan rad ove vrste alata. Administrator je osposobljen za održavanje i instalaciju programske i hardverske opreme. Uloga administratora je praćenje rada cijelog sistema i izrada sigurnosnih kopija.

Prednost ovih alata je u tome što omogućavaju organizaciju učenja prema načelu da svako radi onaj dio koji najbolje zna. Dosta ovih alata podržava tzv. OpenSource filozofiju što znači da nisu samo besplatni nego se uz njih dobija i izvorni kod. Takva vrsta alata omogućava korisnicima da prilagode alat svojim potrebama. Primjer besplatnih alata je ATutor (http://www.atutor.ca); Moodle (http://www.moodle.org); Claroline (http://www.claroline.net).

Osim besplatnih alata postoje i tzv. komercijalni alati. Najpoznatiji su: WebCT (http://www.webct.com); BlackBoard (http://www.blackboard.com) i IntraLearn (http://www.intralearn.com). U odnosu na besplatne alate, komercijalni alati nude i neke dodatne mogućnosti koje još nisu dostupne kod besplatnih alata:

– interni e-mail,
– korištenje kalendara,
– izbor okruženja,
– više mogućnosti u provjeri znanja,
– podršku za audio i video i
– podršku za razmjenu sadržaja.

Pri izboru alata potrebno je voditi računa o tome da li alat podržava standard za razmjenu podataka u courseware alatima. Standardi omogućuju brz prelazak s jednog courseware alata na drugi. SCORM je trenutno najvažniji standard.

U klasičnom načinu predavanja koristi se uvijek sinhrona komunikacija. To znači da u trenutku kada nastavnik predaje, učenik sluša to gradivo. Pri ovakvom načinu komunikacije učenik može u svakom trenutku prekinuti nastavnika i zamoliti ga za dodatno objašnjenje. Ovakav način komunikacije može se odvijati na tri načina:

1. Videokonferencija – u ovom obliku učenici mogu vidjeti nastavnika, a u nekim slučajevima i nastavnik može vidjeti učenika. Ovakva vrsta predavanja može se snimati za arhivu i kasnije ponovno pogledati.
2. Audiokonferencija – u ovom obliku učenici mogu samo čuti nastavnika, a slika je najčešće data u obliku prezentacije ili niza stranica koje se izmjenjuju u ovisnosti o izboru nastavnika.

3. Tekstualna konferencija – najsličniji primjer ovakvom vidu konferencije je klasični chat. Nastavnik upisuje tekst, koji se zatim ispisuje na ekran svim učenicima.

Jedna od važnih mogućnosti ovakvog načina sinhrone komunikacije je mogućnost javljanja učenika. Ovakav oblik komunikacije omogućava učeniku, koji prati takav vid predavanja, da prekine nastavnika i zamoli ga za dodatna objašnjenja.

Courseware alati najčešće signaliziraju nastavniku da neki učenik želi pojašnjenje, a nastavnik zatim može do kraja završiti taj dio izlaganja i tek zatim odgovoriti na postavljeno pitanje. Ovakav vid komunikacije u potpunosti podržavaju tek rijetki komercijalni alati, dok ga besplatni alati gotovo uopšte ne podržavaju. Za razliku od sinhrone komunikacije koja omogućuje učenicima direktno praćenje predavanja, asinhrona komunikacija je moguća sa odgodom. U ovom slučaju učenik bira vrijeme kada će usvajati koje gradivo, kojom brzinom i tempom. Komercijalni alati gotovo potpuno podržavaju sve važne mogućnosti asinhrone komunikacije, dok besplatni alati podržavaju većinu važnijih mogućnosti. Najčešće mogućnosti asinhrone komunikacije su e-pošta i diskusijske grupe. E-pošta se ne razlikuje od uobičajene e-pošte i omogućuje učenicima privatnu komunikaciju s nastavnikom. U diskusijskim grupama učenici mogu postavljati i odgovarati na sva javna pitanja i razmjenjivati mišljenje o određenoj temi.

Jedna od najvažnijih osobina courseware alata uz sinhronu i asinhronu komunikaciju je mogućnost objavljivanja sadržaja i provjere znanja učenika. Većina courseware alata omogućuje unos sadržaja direktno putem web okruženja.

Courseware alati koji podržavaju SCORM standard omogućuju i unos sadržaja putem odgovarajućih programa, koji mogu izraditi i sadržaj u tom formatu. Prilikom unosa sadržaja putem web okruženja nije potrebno predzanje HTML-a ili kojeg sličnog formata. Većina njih omogućuje unos teksta u polje koje je slično Microsoft Wordu. Napredni alati kao što je WebCT imaju mogućnost direktnog unošenja složenih matematičkih formula. Unos je izveden na sličan način kao što je to učinjeno u Microsoft Equation editoru. Pojedini komercijalni alati nude čak i mogućnost direktne konverzije materijala iz Microsoft Excela, Microsoft Worda, Microsoft PowerPointa.

Cilj svakog courseware alata je prenošenje znanja na učenika. Kako bi se moglo provjeriti da li je cilj ostvaren potrebno je imati i mogućnost provjere znanja. Ove mogućnosti razlikuju se od proizvođača do proizvođača coursewarea alata. Osnovna razlika među tim alatima je u vrsti pitanja koja se nude.Većina ih nudi mogućnost biranja jednog ili više tačnih odgovora od više ponuđenih, kao i odgovor nadopunjavanjem, a neki napredni imaju dodatne mogućnosti kao što su unos slike uz pitanje. Pitanja u courseware alatima mogu biti smještena u bazu pitanja. Courseware alati, po pravilu, mogu utvrditi i ocijeniti nivo znanja, a neki komercijalni alati mogu omogućiti nastavniku

nadgledanje ocjenjivanja i intervenciju u ocjenjivanju. Ovo je veoma važno, naročito kod pitanja kod kojih je potrebno opisno odgovoriti. Ovakvu vrstu pitanja je veoma teško ocijeniti mašinski, a važno je imati i takvu mogućnost provjere znanja.

Među alate, koji ispunjavaju sve gore navedene tehničko-pedagoške pretpostavke, između ostalih, spadaju: Moodle i Atutor, koje ćemo u daljem dijelu rada opisati, i to Moodle detaljno a ATutor u kratkim crtama.

Moodle

Moodle je aplikacija za izradu i održavanje *online* kolegija putem interneta. Projekt se kontinuirano razvija s namjenom podrške tzv. obrazovnom okruženju društvenog konstruktivizma.

„Riječ *Moodle* je skraćenica za Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (modularno objektnoorijentisano dinamičko obrazovno okruženje).

To je također i glagol koji opisuje proces sistematičnog prolaska kroz neku materiju, koji omogućuje rad u vrijeme vlastitog izbora.Taj glagol najbolje opisuje način nastanka i razvoja samog Moodle sistema kao i način na koji učenici i nastavnici mogu pristupiti obrazovnom procesu pri učenju na daljinu.

Moodle je sistem koji se neprekidno unapređuje na čemu radi veliki broj istraživača. Asocijacija prihvata nove ideje – rješenja svojih korisnika koja se u praksi pokažu efikasnim. Ako nakon javne rasprave neko rješenje dobije pozitivnu ocjenu i prođe testove kompatibilnosti, uključuje se u popis dodataka koji se mogu koristiti uz originalni program.

Broj korisnika Moodlea iz dana u dan se povećava. Do januara 2012. godine registrovano je 65.753 stranica koje se koriste u više od 200 zemalja svijeta. Aktivno je 5.732.541 kurs koji vode 1.282.410 nastavnik sa ukupnim brojem polaznika koji iznosi 56.303.498.

Moodle je web aplikacija namijenjena upravljanju kurseva (course management system – CMS). Sistem za upravljanje kursevima se obično nalazi na internet serveru i omogućuje studentima i nastavnicima pristup resursima i aktivnostima s bilo kojeg računara povezanog na internet. Sistem Moodle je prije svega namijenjen učenju koje podrazumijeva virtualnu interakciju učesnika i to ne samo sa sadržajima, već prije svega međusobno. Međutim, njega je svakako moguće koristiti i za izradu i prezentaciju sadržaja u digitalnom obliku, a time i udžbenika u elektronskom okruženju. Treba napomenuti da tako pripremljen udžbenik ne može biti korišten kao CD, već kao materijal koji se nalazi na internetu. Iako je Moodle besplatan software, on je napredna aplikacija koja omogućuje:

– izradu velikog broja kurseva na jednom sistemu,
– planiranje kursa – raspored aktivnosti, kalendar,
– upravljanje korisnicima, korisničkim ulogama i grupama korisnika na kursu,

– rad s već postojećim datotekama i obrazovnim sadržajima,
– provjera znanja i ocjenjivanje korisnika,
– praćenje aktivnosti korisnika,
– mnogobrojni alati za komunikaciju i kolaboraciju među korisnicima,
– upravljanje sistemom – sigurnosne kopije, statistike, logovi i
– opsežan sistem pomoći.

Sabine Graf i Beate List (2005: 163) su provele evaluaciju devet sistema za e-učenje otvorenog koda:

– ATutor, version 1.4.1,
– Dokeos, version 1.5.5,
– dotLRN, version 2.0.3,
– ILIAS, version 3.2.4,
– LON-CAPA, version 1.1.3,
– Moodle, version 1.4.1,
– OpenUSS, version 1.4,
– Sakai, version 1.0 i
– Spaghettilearning, version 1.1 (DOCEBO).

U pet od ukupno osam kategorija sistem Moodle se pokazao najefikasnijim:

1. komunikacijski alati (forumi, chat i sl.),
2. objekti učenja (testovi, vježbe i sl.),
3. upravljanje korisničkim podacima (pretraživanje, statistika, prepoznavanje prisutnih korisnika, podaci o korisnicima),
4. korisničko okruženje (npr. jednostavno – *prijateljsko* korisničko okruženje, podrška, dokumentacija) i
5. prilagodljivost (mogućnost prilagođavanja dizajna web sistema u cjelini i za svakog korisnika, prilagodljivost objekata učenja pojedinim korisnicima i sl.).

U preostale tri kategorije koje se odnose uglavnom na tehnički aspekt, administrativne mogućnosti i mogućnosti upravljanja kursevima, Moodle je postigao prosječne rezultate, ali se ukupno pokazao najboljim sistemom za e-učenje otvorenog koda. Sistem Moodle je dobro predstaviti kao virtualni prostor koji se sastoji od različitih podsistema organizivanih na sljedeći način:

– na naslovnoj stranici se nalaze osnovne informacije, alati i prečice koji omogućuju pristup *unutrašnjem* dijelu virtualnog prostora;
– unutrašnjost prostora je podijeljena na kurseve unutar kojih postoje različiti web alati čija je funkcija da omogući nastavniku i kreatoru kursa elektronskog učenja uređivanje i objavljivanje resursa i ostvarivanje različitih aktivnosti učenja;
– aktivnosti učenja se mogu ostvariti posredstvom komunikacijskih aktivnosti kao što su forumi, chat, radionice i sl.;

– osim toga nastavniku su na raspolaganju različiti alati za izradu upitnika, kvizova, enciklopedija u obliku hiperteksta, arhiva i sl.) i
– korisnici međusobno ostvaruju komunikaciju korištenjem privatnih poruka.

Forumi predstavljaju najvažniju komunikacijsku aktivnost koja se ostvaruje asinhrono. Forume može otvarati urednik foruma, odnosno osoba koja ima urednička ovlaštenja. Svaki se forum može sastojati od više tema koje započinje urednik foruma ili bilo koji korisnik. U okviru svake teme može biti više objavljenih priloga. Za pisanje i objavu priloga koristi se editor teksta u HTML formatu koji je vrlo sličan bilo kojem drugom tekst editoru tako da korisnici, po pravilu, nemaju problema s korištenjem foruma, ako imaju elementarno informatičko predznanje.

Objavljeni tekstovi učesnika se mogu prikazati na četiri različita načina:

1. u hijerarhijskom obliku, onako kako su učesnici odgovarali na poruke svojih prethodnika,
2. počevši od najstarijih poruka,
3. počevši od najnovijih poruka i
4. prikaz poruka u nizu (prikazana je hijerarhijska struktura naslova, imena autora i datuma objavljivanja bez teksta poruke).

Osim toga, na svakoj stranici postoji polje za upis ključnih riječi koje program može pronaći na bilo kojem forumu. Sistem dodatno omogućuje pregled svih objavljenih priloga na forumima po hronološkom redoslijedu za bilo kojeg učesnika. Sve su to mogućnosti koje olakšavaju jednostavnu kvalitativnu analizu već na samom sistemu Moodle.

Autori sistema Moodle nastoje promovisati pedagošku filozofiju u kojoj naglašavaju četiri bitna aspekta:

1. konstruktivizam koji počiva na pretpostavci da ljudi aktivno konstruišu svoje znanje u interakciji sa svojom okolinom;
2. konstrukcionizam koji smatra da je učenje posebno efikasno pri kreiranju sadržaja za druge korisnike;
3. društveni konstruktivizam povezuje prethodne ideje sa saradničkim djelovanjem lokalne zajednice i procesom stvaranja kulturnih vrijednosti koje imaju zajedničko značenje, pri čemu učesnici takvih zajednica sve vrijeme uče o tome kako biti dio te kulture na više različitih nivoa i
4. mogućnost usklađivanja dvije suprotstavljene vrste ponašanja od kojih prvo nastoji biti *objektivno* i utemeljeno na činjenicama, logički definišući svoje ideje pronalazeći nedostatke u suparničkim idejama; drugo ponašanje je više empatičko, uvažava subjektivnost, nastoji slušati i postavljati pitanja kako bi razumjelo tuđe viđenje neke situacije.

Oni smatraju kako bi prilikom organizacije učenja učenik trebao imati središnju ulogu, a ne obrazovni sadržaji prezentovani u digitalnom obliku za koje nastavnici smatraju kako bi ih učenici trebalo znati. Važno je, smatraju autori sistema Moodle, shvatiti kako svaki učesnik elektronskog učenja može biti u isto vrijeme nastavnik i učenik. Uloga *nastavnika* može od *izvora znanja* i osobe koja provjerava usvojenost znanja, postati osobom koja potiče druge na učenje, istražujući pri tome učeničke potrebe, vodeći rasprave i aktivnosti kako bi se ostvarili zajednički ciljevi učenja.

Zaključak

Konstruktivistički model nastave uz primjenu obrazovnog softwarea unapređuje nastavni proces u odnosu na tradicionalni te sugeriše obrazovnim institucijama potrebu tehničko tehnološke i kadrovske pripreme za uvođenje konstruktivističkog pristupa u nastavni proces. Ovo znači da se obrazovanju nastavnika za uspješno izvođenje konstruktivističkog modela nastave posveti posebna pažnja i da stručno usavršavanje nastavnika bude permanentni proces koji prati savremena didaktičko tehnološka nastavna sredstva. Za uspješnu realizaciju savremene nastave potrebno je osigurati da izvori informacija (biblioteka, internet, seminari…) budu dostupni svim učesnicima obrazovnog procesa. Nadamo se da će ovaj pristup nastavi naći plodno tlo na našim područjima i zaživjeti kao praksa u nastavnom procesu.

Literatura

Bork 1985: Bork, A., *Personal Computers for Education*, New York, Harper & Row.

Brooks 1999: Brooks, J. G., Brooks, M. G., *In Search of Understanding: The Case for Constructivist Classrooms Alexandria*, Virginia USA, Prentice Hall.

Bybee 1997: Bybee, R., *Achieving Scientific Literacy: From Purposes to Practices*, Portsmouth, Heinemann.

Graf, List 2005: S. Graf, B. List., *An Evaluation of Open Source E-Learning Platforms Stressing Adaptation Issues*, Beč, University of technology.

Kozmetsky 1980: Kozmetsky, G., *Problem solving and education: Issues in teaching and research*, Hillsdale, Laurence Erlbaum Press.

Lepper, Gurtner 1989: Lepper, M., J. L. Gurtner, *Children and Computers: Approaching the Twenty-First Century*, American Psychological Association, Belmont.

Long, Huey B. 2004:. *An Introduction. U Piskurich, G. M. (ur.) Getting the Most from Online Learning*, San Francisco, Pfeiffer.

Scott, Dyson, Gater 1987: Scott, P., Dyson, T., Gater, S. A., *Constructivist view of learning and teaching in science*, Leeds, University of Leeds.

Sherwood 1976: S. Sherwood, S. Smith, B. Sherwood, *Educational uses of the PLATO computer system*, New York , AAAS.

Wheatley 1991: Wheatley, G. H., *Constructivist perspectives on science and mathematics learning*, Harward, Science Education.

Yager 1991: Yager, R. E., *The Constructivist Learning Model: Toward Real Reform in Science Education*, Iowa, The Science Teacher.

Almir H. Huskanović[*]
Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet

Originalni naučni rad

EFEKTI LOŠE USVOJENOG ZNANJA STUDENATA NA RAZUMIJEVANJE INFINITEZIMALNOG RAČUNA

1. *Uvod*

Početak učenja infinitezimalnog računa podrazumijeva susret sa graničnim procesima – graničnom vrijednošću niza i funkcije. I obično se desi da taj temeljni dio bude najlošije savladan. Razlog je naravno u teoretskim postavkama graničnih vrijednosti koje mnogi studenti ne mogu savladati ni poslije dva, tri čitanja i nakon toga odustanu od daljih pokušaja razumijevanja te teorije. U dobrim udžbenicima matematičke analize teorija je potkrijepljena sa dosta primjera i komentara koji pomažu čitaocu. Međutim, isto tako je bitno da se prije graničnih vrijednosti obradi gradivo koje se odnosi na skup realnih brojeva i njegove osobine (formiranje skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, apsolutna vrijednost realnog broja, intervali u skupu $\mathbb{R}$, prebrojivi i neprebrojivi skupovi i dr.). Većina ovog gradiva se obrađuje i na gimnazijskim (i njima srodnim) kursevima matematike, ali i pored toga, neki studenti nisu adekvatno obučeni za savladavanje infinitezimalnog računa.

2. *Testiranje studenata*

Za početak možemo se zapitati koja su to predznanja bitna da bi student bez većih problema mogao savladati gradivo infinitezimalnog računa. Možemo napraviti sljedeći spisak:

– uvježbanost u operacijama sa stepenima, polinomima i racionalnim algebraskim izrazima,

– poznavanje osnovnih nejednakosti i osobina nejednakosti,

– razumijevanje pojma apsolutne vrijednosti, poznavanje osobina apsolutne vrijednosti realnog broja,

– uvježbanost u rješavanju jednačina i nejednačina,

– razlikovanje racionalnih i iracionalnih brojeva,

– poznavanje pojma intervala i razlikovanje vrsta intervala u skupu $\mathbb{R}$,

– razlikovanje prebrojivih i neprebrojivih skupova,

kao neki minimum znanja i vještina koje treba imati svaki student koji se prvi put sreće sa pojmovima limesa, izvoda, integrala itd.

[*] almirh@mf.unze.ba

Testirali smo studente Univerziteta u Zenici, među kojima su bili studenti Mašinskog, Ekonomskog i Pedagoškog fakulteta (odsjek za Matematiku i informatiku) na sredini zimskog semestra. Sadržaj testa je bio sljedeći:

1. Dat je interval $(0,2)$. Opišite ovaj interval – koji brojevi se nalaze u tom intervalu, šta se može reći o najvećem, odnosno najmanjem broju iz tog intervala?

2. Između sljedećih brojeva podvuci sve iracionalne:

$$\log 3,\ \sin\frac{\pi}{6},\ \sqrt[3]{0,001},\ \sqrt[4]{0,0004},\ \pi^2,\ \ln\sqrt[6]{e^5},\ \cos^2\frac{\pi}{4},\ \cos^3\frac{\pi}{4}.$$

3. Zaokruži tačne tvrdnje:
a) Između svaka dva realna broja nalazi se realan broj.
b) Između svaka dva racionalna broja nalazi se racionalan broj.
c) Racionalnih brojeva ima mnogo više nego iracionalnih u skupu $\mathbb{R}$.
d) Ne postoji nijedan racionalan broj u intervalu $(0,1)$.

4. Riješiti nejednačine po nepoznatoj *x*:
a) $|x-x_0|<\delta$
b) $|x-x_0|\geq -\delta$

Mogu li se odabrati brojevi x_0 i δ tako da neka od ove dvije nejednačine nema rješenja ili da ima beskonačno mnogo rješenja?

5. U jednom starom kineskom tekstu *Zhuangzi* spominje: „Ako imamo štap dužine jedne stope i ako svaki dan odsiječemo pola štapa, to bi se moglo raditi zauvijek“. Jeste li saglasni sa ovom tvrdnjom?

6. Ako vrijedi nejednakost $|x-x_0|<\delta$, kažemo da tačka *x* pripada $\delta-$okolini tačke x_0. Poznavajući tu činjenicu, izrecite poznatu definiciju granične vrijednosti:

Kažemo da je $y_0\in\mathbb{R}$ *granična vrijednost funkcije* $f(x)$ *u tački* x_0 *ili da funkcija* $f(x)$ *teži ka* y_0 *kad x teži ka* x_0 *i pišemo:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$, *ako*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in X)(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-y_0|<\varepsilon),$$

koristeći pojam okoline u dva navrata (dva puta).

7. Koristeći definiciju u šestom zadatku, dokažite da je $\lim_{x\to 3}(2x-1)=5.$

Testirano je 270 studenata. U donjoj tabeli prikazani su rezultati testiranja po broju i procentu studenata koji su rješavali test.

3. *Rezultati testiranja*

Zadatak	Tačno riješeno	Djelomično tačno	Netačno riješeno
1.	128 (47,41%)	89 (32,96%)	53 (19,63%)
2.	73 (27,04%)	186 (68,89%)	11 (4,07%)
3.	115 (42,60%)	145 (53,70%)	10 (3,70%)
4.	38 (14,07%)	124 (45,93%)	108 (40,00%)
6.	3 (1,11%)	6 (2,22%)	261 (96,67%)
7.	4 (1,48%)	7 (2,59%)	259 (95,93%)
UKUPNO	22,29 %	34,38 %	43,33%

Peto pitanje u testu ne možemo smatrati zadatkom. Ono je zadato s namjerom da se vidi da li studenti mogu razumjeti intuitivno granične procese i da li bi teoretsko znanje mogli primijeniti u praksi. Na ovo pitanje 262 studenta odgovorila su potvrdno (97,04%), a 8 studenata je odgovorilo negativno (2,96%). Studenti su poticani da dadnu i dodatno obrazloženje. Oni koji su bili saglasni sa tvrdnjom i koji su pisali neki komentar, uglavnom su napisali da je izjava kineskog mudraca tačna sa teorijskog aspekta, ali da se postupak opisan u tvrdnji ne može praktično izvesti, jer nemamo alat za rezanje štapa na mikromilimetarske dijelove. Oni koji nisu saglasni sa tom tvrdnjom istakli su upravo nemogućnost praktičnog izvođenja opisane podjele.

Ocjenjujući globalno, možemo reći da je test loše riješen, jer je skoro 50% pitanja i zadataka ostalo neriješeno ili je pogrešno riješeno.

Prva tri zadataka trebalo je da provjere koliko studenti razumiju strukturu skupa realnih brojeva. Ovi su zadaci najbolje riješeni u testu, ali ipak ispod 50% riješenosti. Treba uzeti u obzir i da su drugo i treće pitanje bili na principu odabira odgovora između više ponuđenih, tako da među studentima koji su tačno odgovorili na ta pitanja ima sigurno i onih koji su to uspjeli „na sreću“, tj. pogađanjem. Samo 59 studenata su riješili tačno prva 3 zadatka.

Četvrti zadatak je testirao vještinu rješavanja nejednačina sa apsolutnom vrijednošću. Ovaj je zadatak riješen lošije nego prva 3 zadatka. Međutim, imajući u vidu da je ukupno 60% studenata ili tačno ili djelomično riješilo ovaj zadatak, možemo zaključiti da to studentima nije nepoznata materija. Vjerovatno bi procenat rješivosti bio veći da su u nejednačini umjesto x_0 i δ bile zadate poznate konstante.

Na osnovu rezultata koje su studenti postigli na prva 4 zadatka možemo reći da većina studenata nema potrebna predznanja da bi mogli shvatiti osnovne postavke infinitezimalnog računa – graničnu vrijednost, derivaciju, integral i dr. Ovo je konkretno i potvrđeno rezultatima testa na zadnja dva pitanja. U situaciji gdje studenti trebaju konkretno pokazati kako su razumjeli definiciju granične vrijednosti i kako je mogu primijeniti, samo tri studenta su tačno riješila posljednja dva zadatka. Još sedmoro njih je djelomično odgovorilo na 6. i 7. zadatak, a ostali su većinom propustili da bilo šta napišu kao rješenje zadnja dva zadatka.

U analizi loše urađenih testova zaključili smo da je simptomatično da su najlošije uradili test oni studenti koji su loše riješili prvi zadatak. 53 studenta su netačno rješili prvi zadatak. Jedan dio njih nije ništa napisao kao rješenje, a ostali među njima su ponudili sljedeće odgovore:

– U intervalu $(0,2)$ nalazi se samo jedan broj i to 1. Taj broj je istovremeno i najveći i najmanji broj u intervalu.

– U intervalu $(0,2)$ nalaze se brojevi: $0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2.$ Najmanji je 0, a najveći broj je 2.

– U ovaj interval spadaju svi brojevi od 0 do 2. 0 je minimum, a 2 je maksimum.

– Ovaj interval zavisi o skupu brojeva koje smo odabrali. Ukoliko je ovo prirodan skup brojeva, onda 0 ne postoji, a 2 je prirodan broj.

– U intervalu se nalaze brojevi 0,1 i 2.

4. *Zaključci*

Već smo rekli da smo očekivali da će zadatke koji se odnose na definisanje granične vrijednosti uspješno riješiti samo oni koji tačno rješe zadatke i pitanja koji se tiču potrebnog predznanja. Međutim, među studentima koji su uspješno riješili prva 4 zadatka (32 studenta) bilo je mnogo više onih koji nisu riješili zadnja dva zadatka.

Problem razumijevanja pojma granične vrijednosti često se pojavljuje kao tema istraživanja na evropskim i američkim univerzitetima. U većini tih istraživanja zaključuje se da je potpuno razumijevanje pojma granične vrijednosti vrlo rijetka pojava među studentima. Nabrojaću neka od njih:

– Bezuidenhout 2001,
– Cottrill, Dubinsky i dr. 1996,
– Simonsen 1995,
– Cornu 1991,
– Williams 1991,

– Sierpinska 1987,
– Davis i Vinner 1986,
– Robert 1982,
– Tall i Vinner 1981.

Štaviše, studije koje su istraživale poteškoće studenata vezano za usvajanje pojmova neprekidnosti, diferencijabilnosti i integrala, pokazale su da je najveći dio tih poteškoća povezan sa graničnim vrijednostima (Orton 1983, Tall 1982).

Mnogi istraživači (Williams, Tall, Vinner, Monaghan, Sun i dr.) smatraju da je najčešći način shvatanja pojma limesa među studentima dinamičko-teoretsko poimanje limesa: funkcija se približava svom limesu kroz beskonačno mnogo malih uzastopnih koraka i posljedica ovakvog načina razmišljanja je pogrešan zaključak da funkcija ne može dostići traženi limes. Steven R. Williams (Washington State University) ističe još nekoliko pogrešnih predstava prilikom pokušaja razumijevanja graničnih vrijednosti:

– dinamičko-praktično poimanje limesa: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ određujemo tako da u više navrata umjesto *x* uvrštavamo vrijednosti koje su sve bliže broju x_0,

– statičko poimanje limesa: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

– limes kao granica: limes je broj ili tačka iza koje funkcija ne može ići,

– limes kao aproksimacija: limes je aproksimacija koja se može načiniti s tačnošću koju sami odaberemo.

R. L. E. Schwarzenberger i D. O. Tall u studiji iz 1978. ističu opasnosti koje se javljaju kad formalnu definiciju limesa pokušavamo objasniti neformalnim iskazima. Tada se često upotrebljavaju fraze kao što je npr. „po volji malo“ ili „blizu“, „dovoljno malo“ i sl. Takvi izrazi kod studenata vrlo često stvaraju pogrešne predstave o pojmu limesa.

Neki od autora (Tall, Monaghan, Li i Sun) zaključuju u svojim istraživanjima da ni korištenje napredne tehnologije (bazirane na računarima) nije pomoglo studentima da bolje savladaju granične procese.

Literatura

Kotril, Dubinski, Nikols, Švingendorf, Tomas, Vidaković 1996: J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf, K. Thomas, D. Vidakovic, Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated Process schema, *Journal of mathematical behavior*, No. 15, str. 167–192.

Monegan, San, Tol 1994: J. Monaghan, S. Sun, D. Tall, Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra Sistem, *Proceedings of the 18th international Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, str. 279. – 286., University of Lisbon, Portugal

Švarcenberger, Tol 1978: R. L. E. Schwarzenberger, D. Tall, Conflicts in the Learning of Real Numbers and limits, *Mathematics Teaching*, No. 82, str. 44–49.

Vilijems 1991: S. R. Williams, Models of limit held by college calculus students, *Journal for Research in Mathematics Education*, No. 22, str. 219–236.

Драгана Скочајић[*]
Бијељина

Стручни рад

МЕТОДИЧКИ ПРИСТУП ДИФЕРЕНЦИРАНОМ МОДЕЛОВАЊУ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА МЕТОДОМ ДУЖИ И ЈЕДНАЧИНА

Увод

„*Диференцирање* (differentiation, differenciation) израз потиче од латинске ријечи differentia што у преводу значи разлика и означава раздвајање, разликовање, рашчлањивање“ (Педагошка енциклопедија 1: 91).

У позитивном смислу *диференцирање* значи формирање група ученика ради њиховог ефикаснијег напредовања. За сам појам диференцирања не постоји јединствен став. Прилози и схватања аутора о појму диференцирања се разликују.

У данашњем демократичнијем свијету школско диференцирање добија напреднију улогу и усмјеравајућу, савјетодавну и социјализациону функцију. Оно је организациона мјера која усмјерава ученике према њиховим специфичним, међусобним разликама у привремене и сталне наставне групе. Савремена настава математике треба да буде активна, развијајућа и подстицајна за све ученике. Сваки ученик треба да напредује у складу са својим способностима и потенцијалним могућностима. Настава будућности треба да подстиче активно и континуирано учење наставних садржаја, откривање нових веза, правила и релација и да на такав начин омогући сваком ученику да изази своју креативност и стваралачки потенцијал. Диференцирано моделовање проблемских задатака методом дужи и једначина је само један мали корак у моделовању проблемских задатака које представља веома сложену и значајну тему са научно-теоријског и практичног аспекта и које у цјелости испуњава захтјеве савремене методичке наставе математике.

1. *Методе моделовања у почетној настави математике*

Кретање савременог свијета пропраћено је знанствено-техничком револуцијом, која пред савременог човјека ставља бројне проблеме. Зато је потребно одговарајућим системом наставе оспособљавати младе људе за живот и рад у бројним проблемским ситуацијама у којима ће морати знати, умјети и хтјети рјешавати уочене проблеме.

[*] dragana.skocajic@gmail.com

Проблем је субјективни доживљај неке супротности, а та супротност исказује се као биполарни однос између познатога и непознатога, датог и задатог, откривенога и неоткривенога, постигнутог и непостигнутог, експлицитног и имплицитног, извјеснога и неизвјеснога и сл. У настави те противрјечности као проблеме рјешавају ученици уз помоћ наставника. Помоћ наставника односи се на психолошко припремање ученика за рјешавање проблема, стварање извора који ће ученици проучавати ради проналажења рјешења, помоћ у формулацији и изоштравању проблема, савјет у самој техници и начину рјешавања проблема. Приликом рјешавања проблема долази до изражаја сва њихова стваралачка креативност у проналажењу рјешења или више начина доласка до рјешења датог им проблема. За рјешавање сваког проблема потребно је интензивно размишљање о прикупљеним подацима и њиховој комбинаторици, снага конструктивне маште у комбинацији са техником интелектуалног рада. Проблем се рјешава тако да се полази од онога датог, познатог, извјесног, експлицитног и уз помоћ проучавања извора прелази се на оно што је непознато, задано, неизвјесно. Рјешавање проблема оспособљава ученике за самосталан истраживачки рад стваралачког карактера. Приликом рјешавања математичких проблема од велике је важности метода математичког моделовања која своју примјену налази у моделовању разних животних ситуација, односно превођењу конкретних проблема на математички језик. Највећи број проблема у почетној настави математике се ипак своди на рјешавање помоћу једначина. Ту се јављају тешкоће као што су: формирање одговарајуће једначине и рјешавање исте. Због тога је од великог значаја да се почну примјењивати други погоднији модели за рјешавање проблемских задатака.

У почетној настави математике се издвајају модели као што су:

– логичко-комбинаторни модели,
– аритметичко-логички модели,
– геометријски модели рјешавања проблема,
– модели стохастичких појава,
– модели проблема мјерења, вагања и пресипања,
– модели проблема на квадратној мрежи,
– модели геометријских проблема,
– математичке игре и њихове стратегије.

Предмет даљих истраживања овог рада су геометријски модели рјешавања проблема који се користе, или могу да се користе у почетној настави математике.

1.1. *Геометријски модели рјешавања проблема*

Централно мјесто у процесу рјешавања проблемских задатака заузима фаза дефинисања модела, односно састављање плана за рјешавања истог. Дефинисању модела претходи уочавање односа међу величинама,

проналажење веза између задатих и тражених елемената на основу којих се даље утврђује модел за одређивање и рјешавање постављеног проблема. Најтежи задатак је избор модела и метода у рјешавању проблема који омогућавају да се ситуација у задатку „*види*“. Приликом превођења проблемског задатка из текстуалне форме на математички језик, корисно је у помоћ позвати неку скицу, цртеж или слику, било који графички приказ односа међу величинама који се појављују у проблемском задатку.

Геометријске фигуре су најпогодније за представљање геометријских модела рјешавања проблема:

а) метода дужи,

б) метода таблица,

в) метода правоугаоника,

г) метода графова,

д) метода блокдијаграма.

Захваљујући примјени оваквих *очигледних* метода приликом проналажења рјешења и рјешавања проблемских задатака, ситуације у проблемским задацима постају много јасније, ближе и занимљивије ученицима.

1.1.1. *Метода дужи*

При рјешавању проблема посебну тешкоћу представља уочавање односа међу величинама. Приликом *превођења* проблема на математички језик корисно је служити се: дужима, графовима, правоугаоницима, круговима итд.

Дуж се, као геометријска фигура, може користити при постављању математичког модела неких проблема, све у циљу лакшег формирања саме једначине за њихово рјешавање.

Метода дужи:

– познате и непознате величине се изражавају дужинама, а једначина се своди на једноставнији облик који је лакше ријешити.

Метода дужи поједностављује формирање једначине за неке групе задатака и упрошћава њихов облик, а тиме и њихово рјешење.

Основне математичке релације могу се приказати дужинама на сљедећи начин:

а) Једнакост двије величине а и б:

величина а: |_____|

величина б: |_____|

б) Величина а је за четири већа од величине б:

величина а: |_____|__4__|

величина б: |_____|

в) Величина а је два пута већа од величине б:

величина а: |_____|_____|

величина б: |_____|

г) Узастопни природни бројеви:

Први број (n): |_____|

Други број (n+1): |_____|__|

Трећи број (n+2): |_____|__|__|

Четврти број (n+3): |_____|__|__|__|

д) Узастопни парни (непарни) бројеви:

Први број (n): |_____|

Други број (n+2): |_____|___|

Трећи број (n+4): |_____|___|___|

Четврти број (n+6): |_____|___|___|___|

Примјер 1[1]: Перица има 36 лоптица: бијелих, жутих и плавих. Бијелих лоптица има два пута више него жутих, а плавих лоптица колико бијелих и жутих заједно. Колико Перица има бијелих, жутих и плавих лоптица?

Рјешење: жутих лоптица: |_____|

бијелих лоптица: |_____|_____|

[1] Примјери задатака узети из уџбеника др Јаноша Пинтера, Математичко моделовање у почетној настави математике, Сомбор, 1997.

плавих лоптица: |_____|_____|_____|

заједно: |_____|_____|_____|_____|_____|_____|

Укупно: 36 лоптица.

36 : 6 = 6; Ж = 6, Б = 2 · 6 = 12, П = 3 · 6 = 18.

Одговор: Жутих лоптица има 6, бијелих 12, а плавих лоптица има 18.

Примјер 2: Збир четири узастопна парна броја је 4020. Који су то бројеви?

Рјешење: Први број: |_____|

Други број: |_____|__2_|

Трећи број: |_____|__2__|_2__|

Четврти број: |_____|__2__|__2__|__2__|

Збир бројева: |_____|_____|_____|_____|___12__|

Тражена једначина је: 4 x + 12 = 4020

x = 4008 : 4

x = 1002

Одговор: Тражени бројеви су: 1002, 1004, 1006 и 1008.

Примјер 3: Збир два броја је 56, њихов количник је 4 и остатак 1. Који су то бројеви?

Рјешење: Први број: |_____|_____|_____|_____|___1__|

Други број: |_____|

Њихов збир: |_____|_____|_____|_____|_____|__1__|

Тражена једначина је: 5 x + 1 = 56

$5x = 56 - 1$

$x = 55 : 5$

$x = 11$

Одговор: Први број је $4x + 1 = 4 \cdot 11 + 1 = 45$, а други је 11.

1.2. *Модели савремене обраде проблемских задатака*

У настави математике ученик је активан само онда када је у стању да садржаје схвати, мисаоно преради и примијени у даљем учењу, тј. ако може да их успјешно усваја уз повећани напор који треба да буде у складу са његовим интересовањима и индивидуалним могућностима. Активност ученика опада или се губи када наставни задаци не захтијевају повећане напоре од њих, али и када задатке не успијевају да ријеше и поред уложеног напора. Зато ће они ученици који без већих напора лако и брзо рјешавају постављене проблеме бити недовољно мотивисани и њихов рад ће бити површан. Ученици чије су могућности за рјешавање проблема скромније могу доживљавати неуспјехе, који могу довести до појаве несигурности, али и незаинтересованости за даље учење. Ово указује на неопходност сталне и одговорно организоване диференцијације и индивидуализације у настави математике. Од наставника се тражи добро познавање личности ученика и владање методичким поступцима диференциране и индивидуализоване наставе математике. Наставник мора да бира такве методе и поступке који ће допринијети да сваки појединиученик схвати и разумије садржај наставе математике и успјешно рјешава проблемске задатке у складу са индивидуалним могућностима и општим програмским захтјевима наставе математике. Најадекватнији начини диференцијације и индивидуализације наставе математике су: индивидуална наставникова инструкција, рад на задацима различитог нивоа тежине и сложености и рад са наставним листићима. Пошто је наставник јако важан актер у васпитно-образовном процесу, његов општи став и однос према иновацијама у настави може у великој мјери утицати на практичну примјену истих у настави. У једном одјељењу ученици се разликују по својим знањима али и по начинима на које размишљају о школским проблемима и како их рјешавају. Квалитет образовних постигнућа се процјењује не само количином запамћених чињеница већ, прије свега, нивоом и врстом интелектуалних знања којима ученик располаже. Када размишља како да организује наставу и на који начин да провјери да ли су ученици савладали и на ком нивоу неко градиво, наставник (учитељ) би требало да води рачуна о индивидуалним разликама које постоје међу ученицима, али и о начинима који су типични за одређени узраст и који се, током времена мијењају.

Примјери и ситуације у задацима треба да буду свакодневни и познати како би их ученик што боље разумио. Приликом рада треба користити разна визуелна средства и конкретна помагала (табеле, разне моделе, скице, дијаграми и сл.), разговарати о проблему (постављати питања везана за сам начин рјешавања проблема и пронаћи одговоре на иста), давати ученицима што више прилике за самосталан рад, давати повратну информацију о успјеху рјешавања проблема, додатно мотивисати ученике при рјешавању истих и др.

Приликом рјешавања самих проблемских задатака ученици стичу трајнија знања, која су већег квалитета и могу се примијенити у различитим животним ситуацијама.

„Рјешавање проблемских задатака развија код ученика:

– способност апстрактног мишљења,
– креативност ученика,
– мисаоне операције и интелектуалне функције,
– рационално расуђивање,
– објективно образлагање и аргументовање,
– систематски и плански рад,
– самосталност у раду,
– интересовање и радозналост,
– развој позитивних особина личности ученика: сигурност, прецизност,

истрајност, упорност и др.“ (Пинтер 1996: 70).

Избор проблемских задатака зависи од самог циља и оперативних задатака наставе математике. Степен тежине задатака зависи од типа часа на коме се примјењују. Када се обрађују нови наставни садржаји задаци су једноставнији и формулисани тако да при рјешавању истих ученици примјењују знања која су усвојили на том часу. На часовима вјежбања и провјеравања примјењују се сложенији задаци.

Проблемски задаци својим садржајем треба да конкретизују стварност и да буду вјерна слика онога што се догађа у блиској и даљој околини ученика. Од редосљеда података у тексту, формулације проблемског питања зависи степен тежине задатка.

Проблемски и примијењени задаци су сложенији од осталих врста задатака и њихово рјешавање захтијева примјену сложенијих методских поступака, састављених од сљедећих корака у рјешавања проблема:

– схватање и анализа проблема (разумијевање текста задатка, схватање датих величина, уочавање тражених величина, веза и однос између њих);

– проналажење информација, појмова и правила, неопходних за његово рјешавање (математичка знања која ученик користи у циљу избора пута који води до рјешења);

– дефинисање математичког модела;

– рјешавање задатка (у овом дијелу долази до изражаја техника рачунања, извођења рачунских операција);

– провјеравање резултата и дискусија рјешења.

Потребно је захтијевати од ученика да проблемске задатке рјешавају на више начина, из сљедећих разлога: оспособљава ученике за самостално рјешавање проблема, развија мишљење и логичко закључивање, развија смисао за проналажење и испитивање разних могућности за рјешавање проблема, учи ученике да траже најкраће и најједноставније рјешење проблема, разноврсност задатака подстиче развој интересовања и мотивације код ученика.

Савремени приступ проблемским задацима захтијева пуно уважавање принципа диференцирања и индивидуализовања, и најпотпуније се остварује кроз индивидуални облик рада. Да би ученици могли самостално рјешавати сложене проблемске задатке, неопходно их је оспособити колективним рјешавањем које подразумијева директну помоћ наставника да се дође до рјешења.

При рјешавању тежих задатака ученицима се помаже на тај начин што им се постављају други прости или мање сложени задаци које они могу да ријеше, а који им омогућавају са схвате и ријеше сличне, а сложеније задатке.

Циљ коме тежи почетна настава математике је оспособљавање ученика за самостално рјешавање проблемских задатака. Треба водити рачуна да ученици задатке рјешавају самостално, а при томе треба подстицати њихову активност, кеативност и мотивисаност за проналажење рјешења истих.

Методички приступ самосталној обради проблемских задатака подразумијева заступљеност свих корака у рјешавању проблема.

1.3. *Савремени приступ геометријском моделовању проблемских задатака*

Будући да су одјељења су у нашим школама састављена од ученика разних способности, постоји потреба да се пружи инструктивна помоћ и стимулација потребна за оптималан развој и активност свих категорија ученика. То се може постићи садржајном диференцијацијом. У таквом облику диференцирања основни циљеви и задаци наставе математике не подлијежу диференцирању, већ само обим, дубина, степен тежине, сложеност и апстрактност наставног садржаја, као и темпо и начин усвајања градива. Наставниково моделовање егземпларног задатка је у директној вези са успјехом ученика у рјешавању проблемских задатака и њиховом самосталношћу у раду. Зато је јако важно да наставник образлаже извођење поступка рјешавања проблема корак по корак (кораке за рјешавање истих смо навели у претходном поглављу).

Примјер:

Три рибара су пецала рибу. Заједно су упецали 47 кг рибе. Други је упецао 5 пута више него први, а трећи 8 кг мање него други. Колико је упецао сваки од њих?

1. ЧИТАЊЕ ЗАДАТКА И САГЛЕДАВАЊЕ ПРОБЛЕМА	1. Прво ћу себи разјаснити садржај.
Кратке реченице Сопственим ријечима	Рибари су пецали рибу. Њих тројица су упецали 47 кг рибе. Други је упецао пет пута више него први. Трећи 8 кг мање него други. Колико је упецао сваки од њих?
2. АНАЛИЗА САДРЖАЈА	2. Анализа садржаја
Подвући битно	а) Подвлачим важне податке. б) Записујем дате и задате податке математичким симболима и правим скицу проблемске ситуације. Познато ми је: – да су укупно њих тројица упецали 47 кг рибе; – да је други упецао 5 пута више него први; – да је трећи упецао 8 кг мање него други рибар.
Скица	Скица: Први рибар: |__| Други рибар: |__|__|__|__|__| Трећи рибар: |__|__|__|__|__| ←−8 Укупно: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__| ←−8 Проблем: Колико је упецао сваки од њих?
3. ДЕФИНИСАЊЕ МОДЕЛА	3. Размишљам: – Коју ћу методу користити? Методу дужи и једначина.

– Како ћу на основу нацртаних дужи поставити једначину?

Првог рибара означимо са X и на основу тога могу израчунати колико су упецали рибе друга два рибара.

На крају поставим одговарајући једнакост.

Први рибар: |__| X
Други рибар: |__|__|__|__|__| 5 ·X
Трећи рибар: |__|__|__|__|__| $\overset{\leftarrow -8}{}$ 5 · X – 8
Укупно: X + 5 · X + 5 · X – 8 = 47
11 · X – 8 = 47

4. Размишљам:

4. РАЧУНАЊЕ

Први корак

а) Како ћу ријешити постављену једначину? Шта треба прво урадити?

Пошто је непозната саставни дио умањеника, написаћемо га као збир разлике и умањиоца.

11 · X = 47 + 8

Други корак

б) Којим редосљедом ћу вршити рачунање?

Прво ћемо сабрати бројеве 47 и 8 а затим добијени збир подијелити бројем 11.

11 · X = 55
X = 55 : 11
X = 5

Трећи корак

в) Рјешавањем једначине добије се колико је упецао рибе први рибар.
Како ћу израчунати колико је упецао други и трећи рибар?
Колико је упецао други рибар израчунаћемо тако што ћемо број рибе

	коју је уловио први помножити бројем 5.
	$5 \cdot 5 = 25$
	Колико рибе је упецао трећи рибар добићемо кад од количине коју је упецао други рибар одузмемо број 8.
	$25 - 8 = 17$
	Одговор: Први је упецао 5 кг рибе, други 25 кг, а трећи 17 кг рибе.
5. ПРОВЈЕРА	5. Да ли је рјешење тачно?
	Тачно је, јер сабирањем количине рибе коју је упецао сваки од њих добијамо број тј. количину од 47 кг рибе са почетка задатка. $5 + 25 + 17 = 47$

Примјеном *очигледних* метода, приликом рјешавања проблемских задатака, ти математички садржаји постају много јаснији и занимљивији ученицима овог узраста. Посебан акценат ћемо ставити на методу дужи, јер је она у овом случају предмет нашег истраживања. Познате и непознате величине изражавају се дужима, а једначина се овом методом своди на једноставнији облик који се лакше рјешава.

1. 4. *Примјери рјешавања проблемских задатака различитих нивоа сложености*

Ево неколико примјера рјешавања проблемских задатака различитог нивоа сложености методом једначина и дужи. Успјешно и самостално рјешавање проблемских задатака је најјачи облик мотивације за ученике, а и подстицај за још веће улагање напора за савладавање и тежих проблемских захтјева. Различити нивои тежине задатака омогућавају сваком ученику да напре- дује, да нешто уочи, закључи, запамти и сам уради, а све у складу са интересовањима, знањима и могућностима сваког од њих.

I НИВО

Примјер: Двије групе ученика су брале јабуке у школском воћњаку. Прва група ученика је набрала 30 кг јабука, а друга два пута више него прва. Колико је килограма јабука набрала друга група ученика? Колико су килограма јабука набрале обје групе?

1. ЧИТАЊЕ ЗАДАТКА И САГЛЕДАВАЊЕ ПРОБЛЕМА	1. Прво себи, својим ријечима разјаснити садржај задатка. Прва група је набрала 30 кг јабука. Друга група два пута више од прве. Колико су заједно набрале јабука?
2. АНАЛИЗА САДРЖАЈА	2. Анализа садржаја а) Подвући важне податке. б) Записати дате податке математичким симболима и правити скицу за рјешавање проблема. Познато ми је: – да је прва група набрала 30 кг јабука; Прва група: |___| – да је друга група набрала 2 пута више него прва група; Друга група: |___|___|
3. ДЕФИНИСАЊЕ МОДЕЛА	Проблем: Колико је килограма јабука набрала друга група, а колико обје групе заједно? 3. Размишљам: – Коју ћу методу користити? Методу дужи и једначина.
4. РАЧУНАЊЕ	4. Рачунање:

Прва група: |___| 30 кг
Друга група: |___|___| 2 · 30 кг
Укупно: |___|___|___|

$30 + 2 \cdot 30 = 30 + 60 = 90$ кг

Одговор: Друга група је сакупила 60 кг јабука, а обје су сакупиле укупно 90 кг јабука.

5. ПРОВЈЕРА

5. Да ли је тачно рјешење?
Тачно је, јер кад од укупног броја сакупљених јабука одузмемо колико је сакупила прва група ученика (то нам је био познати податак) добијамо колико је сакупила друга група ученика.

$90 – 30 = 60$ kg

II НИВО

Примјер: Три друга Милан, Петар и Жарко су пошли на љетовање. Милан је понио 300 КМ, Петар 150 КМ мање од Милана, а Жарко колико њих два заједно. Колико су скупа понијели новца на љетовање?

1. ЧИТАЊЕ ЗАДАТКА И САГЛЕДАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

1. Прво себи, својим ријечима разјаснити садржај.

Три друга су пошли на љетовање. Милан је понио 300 КМ. Петар је понио 150 КМ мање од Милана. Жарко је понио колико њих два заједно. Колико су укупно новца понијели?

2. АНАЛИЗА САДРЖАЈА

2. Анализа садржаја

Познато ми је:
– Милан је понио 300 КМ
Милан: |____|

– Петар је понио 150 КМ

	мање од Милана Петар: |__| – Жарко је понио колико Милан и Петар заједно Жарко: |____|__|
3. ДЕФИНИСАЊЕ МОДЕЛА	Проблем: Колико су укупно понијели новца на љетовање? Размишљам: – Коју ћу методу користити? Методу дужи и једначина. Како ћу на основу нацртаних дужи поставити једначину? Милан: 300 |____| Петар: 300 – 150 |__| Жарко: 300 + (300 – 150) |____|__| Укупно: ?
4. РАЧУНАЊЕ	3. Рачунање: Милан: 300 КМ Петар: 300 – 150 = 150 КМ Жарко: 300+(300–150)=300+150=450КМ Укупно: 300 + 150 + 450 = 900 КМ Одговор: Три друга су заједно понијели на љетовање 900 КМ.
5. ПРОВЈЕРА	4. Провјера рјешења, да ли је тачно. Рјешење је тачно, јер сабирањем новца које је понио сваки од њих добијамо укупно 900 КМ, што је и рјешење овог задатка. 300 + 150 + 450 = 900 КМ

III НИВО

Примјер: Горан има на штедној књижици 300 КМ. Његова сестра Ана има 100 КМ више, а брат Игор 50 КМ мање од збира Горанове и

Анине штедње. Колико КМ је уштедјела Ана, а колико Игор, колико су уштедјели Ана и Игор заједно и Горан, Ана и Игор заједно?

1. ЧИТАЊЕ ЗАДАТКА И САГЛЕДАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

1. Разјаснити себи садржај задатка.

Горан има на штедној књижици 300 КМ. Ана има 100 КМ више од Горана. Игор има 50 КМ мање од Горана и Ане заједно.

Питања су:
Колико на штедњи има:
Ана: _____
Игор: _____
Ана и Игор: _____
Горан, Ана и Игор: _____

2. АНАЛИЗА САДРЖАЈА

2. Анализа садржаја

Познато ми је:
– да Горан има на штедној књижици 300 КМ
Горан: |___|

– да Ана, његова сестра, има 100 КМ више од њега
Ана: |___|_|
– да Игор, његов брат, има 50 КМ мање од збира Горанове и Анине штедње
Игор: |___|_|← - 50

Проблем: Колико на штедњи има:
Ана: _____
Игор: _____
Ана и Игор: _____
Горан, Ана и Игор: ___ _____

3. ДЕФИНИСАЊЕ МОДЕЛА

Размишљам:
– Коју ћу методу користити?
Методу дужи и једначина.

Горан: 300
Ана: 300 + 100

	Игор: [300 + (300 + 100)] - 50
4. РАЧУНАЊЕ	3. Рачунам: Горан: 300 КМ Ана: 300 + 100 = 400 КМ Игор: [300 + (300 + 100)] – 50 = = (300 + 400) – 50 = 700 – 50 = 650 КМ Укупно: 1350 КМ Одговор: Горан на штедњи има 300 КМ. Ана на штедњи има 400 КМ Игор на штедњи има 650 КМ Ана и Игор имају 400 + 650 = 1050 КМ
5. ПРОВЈЕРА	Горан, Ана и Игор: 300+400+650=1350 4. Да ли је рјешење тачно? Тачно је, јер кад саберемо колико су уштедјели Горан, Ана, Игор добијемо 1350 КМ.

Закључак

Данас се често истичу слабости и недостаци класичног и постојећег модела организације наставног рада. Зато се све више истиче потреба унапређивања васпитно-образовног процеса у цјелини. Ствара се и унапређује савремена наставна технологија која се заснива на индивидуалним могућностима и способностима ученика. Да би се остварили постављени циљеви васпитно-образовног рада, потребно је између осталог, користити савременије облике рада који дозвољавају пуну слободу и самосталност ученика и чешће их доводе у ситуацију да стваралачки учествују и самостално проналазе путеве и рјешења математичких проблема.

Успјешна реализација наставе постиже се, прије свега, добром организацијом исте, која подразумијева подизање нивоа наставе, актуализацију наставног процеса, стварање ситуација у којима ће ученици, улажући сопствене напоре у складу са својим могућностима, усвајати трајнија и активна знања и развијати способности за примјену истих. Одјељења у нашим школама састављена су од ученика различитих

способности и зато постоји потреба за садржајном диференцијацијом. Диференцијација се не састоји само у изради диференцираних захтјева програмских садржаја већ и у различитим приступима самим ученицима, различитим начинима мотивације, усмјеравања, праћења и сл. Успјешно рјешавање проблема тј. самостално рјешавање постављених проблемских задатака је најјачи облик мотивације за ученике, а и подстицај за још веће улагање напора за савладавање и тежих проблемских захтјева. Различити нивои тежине и сложености омогућавају сваком ученику да напредује у складу са својим могућностима и интересовањима.

При рјешавању проблемских задатака посебну тешкоћу ученицима представља уочавање односа међу величинама. Геометријске фигуре могу користити при *превођењу* проблема на математички језик, при постављању математичког модела неких проблема, ради лакшег формирања једначине и рјешавања исте. Рјешавањем проблема ученици се оспособљавају за самосталан истраживачки рад стваралачког карактера. Диференцирано моделовање проблем- ских задатака методом дужи и једначина доприноси: повећању креативне способности ученика, повећава се способност у рјешавању математичких проблема примјеном очигледних метода (у овом случају методе дужи и једначина), постиже се бољи квалитет знања, повећава се мотивација ученика због постизања бољих резултата приликом рјешавања проблемских задатака и настава математике постаје интересантнија за ученике, ученици изграђују критички став према свом раду и резултатима истог и др.

Проблемски задаци својим садржајем треба да конкретизују стварност и да буду вјерна слика онога што се догађа у непосредној околини ученика. Од редосљеда података датих у тексту задатка, формулације самог проблемског питања зависи степен тежине задатка. Проблемски задаци су сложенији од осталих врста задатака и њихово рјешавање захтијева примјену сложенијих методских поступака, а кораци у рјешавању проблемских задатака тј. проблема су сљедећи: схватање и анализа проблемске ситуације, проналажење извора информација, појмова и правила потребних за рјешавање истог, дефинисање математичког модела, рјешавање пробле-ма, провјеравање резултата.

Овај рад је мали скромни допринос употреби диференциране наставе са новим математичким моделима (у овом случају методом дужи и једначина), примјереним нашим условима рада и да ће се и у будуће радити на стварању ефикасније наставе математике која ће као резултат имати трајнија, свјеснија, разумљивија, у пракси примјенљивија знања, што ће бити од великог значаја за педагошку теорију и праксу.

Литература

Банђур, Поткоњак 1999: Банђур, В., Поткоњак, Н., *Методологија педагогије,* Београд, Савез педагошких друштава.

Банђур, Поткоњак 19969: Банђур, В., Поткоњак, Н., *Педагошка истраживања у школи,* Учитељски факултет Београд.

Вилотијевић 1999: Вилотијевић, М., *Дидактика1 – предмет дидактике*, Београд, Научна књига.

Ђорђевић 1979: Ђорђевић, Ј., *Савремени проблеми диференциране наставе,* Београд, Настава и васпитање бр. 3.

Квашчев 1974: Квашчев, Р., *Развијање креативног понашања личности*, Сарајево, Завод за уџбенике.

Квашчев 1978: Квашчев, Р., *Моделирање процеса учења*, Београд, Просвета.

Мандић 1987: Мандић, П., *Иновације у настави*, Сарајево, Завод за уџбенике и наставна средства.

Милинковић 2002: Милинковић, Д., *Савремени приступ обради аритметичких модела проблемских задатака*, магистарски рад, Бијељина, Универзитет у Српском Сарајеву, Учитељски факултет.

Мићић 1998: Мићић, Б., *Математика за пети разред основне школе*, Источно Сарајево, Завод за уџбенике и наставна средства.

Педагошка енциклопедија 1 и 2 1989: Београд, Завод за уџбенике и наставна средства.

Пинтер 1997: Пинтер, Ј., *Математичко моделовање у почетној настави математике*, Сомбор, Универзитет у Новом Саду, Учитељски факултет.

Продановић, Ничковић 1984: Продановић, Т., Ничковић, Р., *Дидактика,* Београд, Завод за уџбенике и наставна средства.

Резиме

У склопу научног скупа *Наука и идентитет* одржаног на Филозофском факултету на Палама 21-22. маја 2011. године организована је *Прва математичка конференција Републике Српске*. Као резултат ове значајне конференције настао је Зборник радова, који се објављује као трећи том зборника Филозофског факултета. У овој свесци налази се тридесет и четири рада презентована на самој Конференцији.

Рад *Прве математичке конференције Републике Српске* био је организован у четири секције, односно осам сесија. У Зборнику се налазе радови са секција за *Анализу, Алгебру, геометрију и дискретну математику, Примијењену математику* и *Методику наставе математике и информатике.* Сви ови радови представљају одлично полазиште за наставак организовања оваквих конференција у будућем периоду, а сам зборник постаће незаобилазно штиво свим изучаваоцима наведених научних дисциплина.

Summary

The First Mathematics Conference of the Republic of Srpska was organised during the Academic Conference "Science and identity" which was held at the Faculty of Philosophy in Pale, from 21-22nd May 2011. As a result of this significant Conference, *Conference proceedings* in Mathematics Studies were published in the third volume of the *Conference proceedings* of the Faculty of Philosophy. Within this volume there are thirty-four papers which were previously presented at the Conference itself.

The work of the First Mathematics Conference of the Republic of Srpska was organised in four sections, that is, eight sessions. In the *Conference proceedings*, papers from the following sections were published: Analysis, Algebra, Geometry and Discreet Mathematics, Applied Mathematics and Teaching Methodology of Mathematics and Information Technology. All these papers represent important basis for organization of future similar conferences, and the *Conference proceedings* itself will become inevitable reading for all researchers of the above mentioned disciplines.

Садржај

Секција за анализу 5

Миленко Т. Пикула
Владимир В. Владичић
О ЈЕДНОМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОМ
ОПЕРАТОРУ И ЊЕГОВИМ СВОЈСТВЕНИМ ВРИЈЕДНОСТИМА 7

Miloš Ž. Tomić
ON THE CONVERSE THEOREM OF APPROXIMATION
IN VARIOUS METRICS FOR NON-PERIODIC FUNCTIONS 13

Nebojša K. Elez
POLINOMI BLISKI POLINOMIMA ČEBIŠEVA 27

Секција за алгебру, геометрију и дискретну математику 31

Rade T. Živaljević
Dušan R. Živaljević
ICOSAHEDRON AND A PAPER DRAGON 33

Milan R. Janjić
GENERALIZED COMPOSITIONS OF NATURAL NUMBERS 39

Dušan S. Jokanović
RICKART RINGS WITH INVOLUTION 51

Nenad U. Stojanović
POLUPRAVILNI MNOGOUGLOVI
NAD CJELOBROJNIM REŠETKAMA 59

Радослав В. Милошевић
НЕКЕ НОВИЈЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЈЕ АЛГЕБРЕ ИСКАЗА 77

Алија Р. Мандак
ФРОБЕНИУСОВА ГРУПА РЕДА 20 И ПРОЈЕКТИВНА РАВАН РЕДА 9 81

Видан Љ. Говедарица
Марко Љ. Ћитић
КОНВЕКСНИ ЦЈЕЛОБРОЈНИ
ПОЛИГОНИ СА ГРАНИЧНИМ ТРАПЕЗИМА 87

Katija J. Lonza
DEFINIRANJE PSEUDOULTRAMETRIKE
NA PROFINITNIM STRUKTURAMA 93

Bernadin F. Ibrahimpašić
SOLVING A FAMILY OF QUARTIC THUE
INEQUALITIES USING CONTINUED FRACTIONS 101

Емил Л. Илић-Георгијевић
ПАРАГРАДУИРАНИ ЏЕКОПСОНОВ РАДИКАЛ 107

Sanja Tipurić-Spužević
INTEGRISANE POLUGRUPE I INTEGRISANA
RJEŠENJA APSTRAKTNOG KOŠIJEVOG PROBLEMA 115

Секција за примијењену математику 131

Раде Лазовић и др.
ПРИМЕНА ДВОПАРАМЕТАРСКИХ
РАСПОДЕЛА У ИНТЕРВАЛНОЈ АХП МЕТОДИ 133

Milorad K. Banjanin
MATEMATIČKE I DIGITALNE KOMPETENCIJE
ZA RAČUNARSKU VIZIJU I MULTIAGENTNU KOMUNIKACIJU 141

Зорица Станимировић
Мирослав Марић
ХИБРИДНИ ГЕНЕТСКИ АЛГОРИТАМ ЗА РЕШАВАЊЕ
ХАБ ЛОКАЦИЈСКОГ ПРОБЛЕМА НЕОГРАНИЧЕНИХ
КАПАЦИТЕТА СА ЈЕДНОСТРУКИМ АЛОКАЦИЈАМА 157

Marina Zirojević
MODELING WITH MATHEMATICA 8.0 173

Милован С. Миливојевић
Јелена Недовић
РАЗВОЈ ИНТЕРАКТИВНОГ СОФТВЕРА ЗА АНАЛИЗУ ТОКА
ФУНКЦИЈА, НУМЕРИЧКО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ И ИНТЕГРАЦИЈУ 181

Милан В. Живановић
ГЕОГЕБРА И ГЕОМЕТРИЈСКА
МЕСТА ЗНАЧАЈНИХ ТАЧАКА ТРОУГЛА 197

Љубица Ж. Диковић
ИНТЕРАКТИВНИ ЈАВА АПЛЕТИ У ФУНКЦИЈИ ИНТЕГРАЦИЈЕ 205

Дарко З. Дракулић
ИНВЕРЗИЈА У ПРОГРАМСКОМ АЛАТУ ГЕОГЕБРА 215

Небојша В. Ивковић
ИНТЕРПОЛАЦИЈА РАЦИОНАЛНЕ
ФУНКЦИЈЕ СА ДВЕ НЕЗАВИСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ
ПОМОЋУ ПОЛИНОМИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ 219

Slobodan Sekulović i dr.
STRUCTURAL IDENTITY FORMULAS AND SERIES WITH
APPLICATION TO ELASTICITY WITH THE STATISTICAL INDEX 227

Секција за методику наставе математике и информатике 243

Нела Т. Малиновић-Јовановић
ПОВЕЗАНОСТ ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА О
ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА У ОКВИРУ САДРЖАЈНОГ И
КОГНИТИВНИХ ДОМЕНА У IV РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ 245

Кармелита Х. Пјанић
Санела Е. Несимовић
АЛГЕБАРСКА И ГРАФИЧКА
РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА ПОЈМА ФУНКЦИЈЕ 263

Драгица Ц. Милинковић
ЕФЕКТИ ПРИМЈЕНЕ ДИФЕРЕНЦИРАНИХ
ИНСТРУКЦИЈА У РЈЕШАВАЊУ АРИТМЕТИЧКИХ ПРОБЛЕМА 271

Сандра Б. Косић-Јеремић
СТАВОВИ СТУДЕНАТА О ПОСТОЈЕЋОЈ
НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НА ТЕХНИЧКИМ ФАКУЛТЕТИМА 285

Naida I. Bikić
MODEL PROBLEMSKOG PRISTUPA
MODELOVANJU NASTAVNOG ČASA 299

Сања М. Маричић
Крстивоје М. Шпијуновић
МЕТОДИЧКО МАТЕМАТИЧКО
ОБРАЗОВАЊЕ УЧИТЕЉА У СРБА У XIX И XX ВЕКУ 307

Видосава Остојић
ОБРАЗОВНА ПОЛИТИКА КАО ФАКТОР НЕУСПЈЕХА У
НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНИМ ШКОЛАМА ЦРНЕ ГОРЕ 317

Vladimir Šarović
ELEKTRONSKI KONTEKST KONSTRUKTIVISTIČKE NASTAVE 333

Almir H. Huskanović
EFEKTI LOŠE USVOJENOG ZNANJA STUDENATA
NA RAZUMIJEVANJE INFINITEZIMALNOG RAČUNA 349

Драгана Скочајић
МЕТОДИЧКИ ПРИСТУП ДИФЕРЕНЦИРАНОМ МОДЕЛОВАЊУ
ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА МЕТОДОМ ДУЖИ И ЈЕДНАЧИНА 355

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

51(082)
001(082)

НАУЧНИ скуп Наука и идентитет (6 ; 2011 ; Пале)
Наука и идентитет ; Прва математичка конференција Републике Српске : зборник радова са Научног скупа , (Пале , 21-22. мај 2011.) / [главни уредник Миленко Пикула] . – Пале : Филозофски факултет , 2012 (Пале : DiS Company) . – 372 стр. : илустр. ; 24 цм . – (Посебна издања . Научни скупови ; Књ. 6, т. 3)

Тираж 300. – Библиографија уз све радове.

ISBN 978-99938-47-41-0
1. Математичка конференција Републике Српске (1 ; 2011 ; Пале)

COBISS.BH-ID 2760216